$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

河南财经学院线性代数编写组

经济数学基础（二）

线性代数

河南大学出版社

前　言

国家教委高教司于1989年10月颁布了包括经济数学基础、计算机应用基础在内的十一门高等院校财经类专业核心课程的教学大纲，要求在全国范围内贯彻实施，以提高财经类专业的总体教学水平。目前国内所用教材都不同程度地与新颁大纲不相吻合，编写出版新教材成为贯彻大纲的当务之急。为此，我系成立了教材编写委员会，并组成了微积分、线性代数、概率论与数理统计、计算机应用基础四个编写组，完成了《经济数学基础》的三个分册：《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》及《计算机应用基础》共四本教材的编写工作。

本书是《经济数学基础》的三个分册之一。与目前国内同类教材相比，本书有以下几个特点：

第一，本教材符合新颁大纲要求，体现了新颁大纲精神，在内容取舍、顺序安排以及学时分配诸方面和新颁大纲相吻合。

第二，本教材充实了数学在经济中的应用内容，增加了在经济管理中应用较多的新知识、新方法。如增加了向量空间、非负矩阵、对角占优矩阵以及二次型等方面的内容。

第三，本教材重视概念教学，引进概念力求自然，讲述概念尽量简洁明了，同时，注重基本方法和技巧的训练。书中配有较多的各种类型的典型例题，使读者有更多的解题训练机会，以培养分析和解决实际问题的能力。深入浅出，通俗易懂，利教利学，文字精炼是这套教材编写者的追求目标。

第四，本教材各章后面配有相当数量的练习题，分为A、B两组。A组为传统题型，B组为是非判断和选择两大类标准化试

题题型，并在书末附有答案，供读者查对，也为自学者提供方便。

第五，本教材为适合不同专业及层次的需要，对于要求较高的内容或较深的部分加了“*”号，使用时可视具体情况酌情取舍。

参加本书编写工作的有：张瑞、刘泮振、杨保和、李双玺、马福斌、臧振春、苏白云、曹守明。参加审稿的 . 李双玺，曹守明、马福斌三位同志。

在《经济数学基础》的写作和出版过程中，我们得到了各方面的关心、支持和帮助。特别是河南省数学会副理事长孙荣光教授在百忙中主审了全书。在此，我们谨向河南财经学院副院长侯恒教授、孙荣光教授以及河南财经学院教务处、成人教育部和河南大学出版社表示最诚挚的谢忱。

由于时间仓促，编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请读者不吝赐教。

河南财经学院经济信息系教材编写委员会

1991年元月于河南财经学院

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 行 列 式

行列式理论是线性代数的主要内容之一。它是人们从解线性方程组的需要中建立起来的，它在经济计量学及其它科学分支上都有广泛的应用。本章将主要讨论行列式的基本概念、性质、计算方法及利用行列式解方程组的克莱姆(Cramer)法则。

第一节 n阶行列式

(一)二、三阶行列式

在介绍n阶行列式之前，先简单复习一下二、三阶行列式。

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}。$$

例 1 $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3\times3-4\times2=9-8=1。$

同样，用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

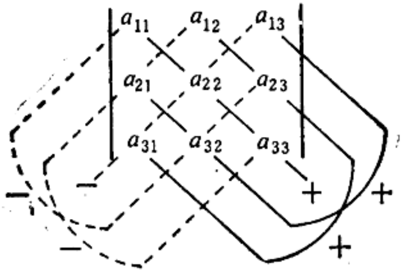
表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},$$

称为三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

三阶行列式的计算可由三阶行列式的对角线规则（或又叫沙流氏规则）来记忆（如下图）。其中实线上元素之积前加正号，虚线上元素之积前加负号。



例 2 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

$$=1\times(-1)\times2+0\times1\times4+2\times3\times6-2\times(-1)\times4$$
$$-1\times6\times1-0\times3\times2=-2+36+8-6=36.$$

观察二、三阶行列式，不难发现其展开式中，有的项前带正号，有的项前带负号。这一规律不易看出。我们将利用“排列”给出这一规律，从而给出 n 阶行列式的定义。

（二）排列

定义 1.1 由数码1，2，…，n 组成的每一个无重复的有序 n 元数组，称为一个 n 级排列，记作$i_1i_2\cdots i_n$。

例如，1324与1423是两个不同的4级排列；13435不是一个5级排列；2435既不是4级排列，也不是5级排列。

由定义1.1可知，n级排列的总数是：$n(n-1)\cdots 2\cdot 1=n!$。

$12\cdots n$是一个n级排列，这个排列称为自然排列。

定义 1.2 在一个n级排列$i_1i_2\cdots i_n$中，若$i_s>i_t$且i_s排在i_t前面，则称i_s与i_t构成一个逆序。一个n级排列中所有逆序的总数，称为它的逆序数，记作$N(i_1i_2\cdots i_n)$。

例如，在排列53241中，5排在比它小的数3，2，4，1前面，所以5与3，2，4，1均构成逆序；3排在比它小的数2，1前面，所以3与2，1均构成逆序；同样，2与1，4与1也均构成逆序。所以53241的逆序数为8，即$N(53241)=8$。

定义 1.3 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列。

例如上述排列53241，由于$N(53241)=8$，故其为偶排列。

例 3 求$2\ 4\ 6\cdots(2n)\ 1\ 3\ 5\cdots(2n-1)$的逆序数，并讨论其奇偶性。

解：由于2与1构成1个逆序，4与1，3构成2个逆序，…，$2n$与1，3，…，$2n-1$构成n个逆序。故

$N[246\cdots(2n)135\cdots(2n-1)]=1+2+\cdots+n=[n(n+1)]/2$。

当$n=4k$及$4k+3$时，排列为偶排列；

当$n=4k+1$及$4k+2$时，排列为奇排列。

定义 1.4 若将排列$i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$中的两个数码$i_s$，$i_t$对调，其它数码位置不变，则得到新排列$i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$。这样的变换称为一个对换，记作对换$(i_s,\ i_t)$。

例如，514326中，作对换(1，2)，得排列524316。

例 4 将4213经对换变成自然排列。

解：对4213作对换(1，4)得1243，再作对换(3，4)便得自然排列1234。

下面讨论对换对排列奇偶性的影响．上例中 $N(4213)=4$，故4213为偶排列；经对换$(4,1)$后$N(1243)=1$，故 1243 为奇排列；再经对换$(4,3)$，1234又成了偶排列．所以对换前后两排列的奇偶性刚好相反．这并不是偶然的情况，而是一般的规律．

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性．

证：(1) 先看对换两个相邻数码的情形．

设 n 级排列为

$$\cdots ij\cdots \tag{A}$$

作对换(i,j)得排列

$$\cdots ji\cdots \tag{B}$$

其中“…”代表那些不动的数码．比较(A)与(B)的逆序．“…”代表的数码之间的逆序是不变的．在(A)中，i，j 与其它的数码若构成逆序，则在(B)中仍然构成逆序；若不构成逆序，则在(B)中亦不构成逆序．(A)与(B)不同之处，只是 i，j 的次序颠倒了，若 $i>j$，则在(A)中 i 与 j 构成一个逆序，而在(B)中 i，j 便不构成逆序了，故(B)的逆序数比(A)的逆序数少 1；同样，若 $i<j$，则(B)的逆序数比(A)的逆序数多 1．所以，(A)与(B)的奇偶性总是相反，故定理成立．

(2) 再看一般情形．

设 n 级排列为

$$\cdots ik_1\cdots k_sj\cdots \tag{C}$$

作对换(i,j)得排列

$$\cdots jk_1\cdots k_si\cdots \tag{D}$$

其中“…”代表那些不动的数码．不难发现，(D)可由(C)经一系列相邻对换得到：对$\cdots ik_1\cdots k_sj\cdots$作$s+1$次相邻对换得$\cdots k_1\cdots k_sji\cdots$，再作 s 次相邻对换便得 $\cdots jk_1\cdots k_si\cdots$．所以，(D)是由(C)作$(s+1)+s=2s+1$次相邻对换得到．由情形(1)立刻得到(D)的奇偶性与(C)的奇偶性相反，定理成立．

（三）n阶行列式的定义

n 阶行列式是二、三阶行列式的推广．我们将以三阶行列式为例，通过观察其特点，给出 n 阶行列式的定义．

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32} -a_{12}a_{21}a_{33}$$

有如下特点：

1．它是3^2个元素组成的记号，表示代数和．

2．代数和里的每一项都是取自不同行、不同列的三个元素之积：$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$（$j_1j_2j_3$为三级排列）．当$j_1j_2j_3$取遍所有三级排列时，即得到三阶行列式的所有项．

3．每一项$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$前的符号按下列法则确定：当 $j_1j_2j_3$ 为偶排列时取正号，奇排列时取负号．

因而

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3)} (-1)^{N(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

二阶行列式显然也具有上述特点．将其推广到 n 阶行列式，便得到 n 阶行列式的定义．

定义 1.5 由 n^2 个元素 a_{ij}（i，$j=1$，2，…，n）组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 n 阶行列式，记作D或 $|a_{ij}|$。它表示所有取自不同的行不同的列的 n 个元素乘积$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$($j_1j_2\cdots j_n$是 n 级排列)的代数和，当$j_1j_2\cdots j_n$为偶排列时，该项前取正号，当为奇排列时取负号。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$称为行列式的一般项，当 $j_1j_2\cdots j_n$取遍所有 n 级排列时，便得到行列式的所有项。

n 阶行列式共有$n!$项。规定一阶行列式 $|a|=a$。

例如，4 阶行列式 D 共有 $4!=24$ 项，其一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$的行标排列为1234，列标排列为 2314，故 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$是取自 4 阶行列式不同行、不同列的 4 个元素的乘积，所以它是4阶行列式展开式中的一项，由于$(-1)^{N(2314)}=(-1)^2=1$，所以该项前应取正号。而 $a_{11}a_{12}a_{23}a_{34}$却不是D中的项，因为a_{11}，a_{12} 同取自第一行。$-a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 亦不是D的项，因为$(-1)^{N(1234)}=1$，所以$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 前应取正号。

例 5 求 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

的值，其中$a_{ii}\neq 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$。

解：设 D 的一般项为 $(-1)^{N(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，$j_1j_2\cdots j$ 为任意 n 级排列。由于D的元素中有很多零，故只考虑非零的项。在D中第一行的元素除a_{11}外全为零，故 a_{1j_1} 取 a_{11}，从而$j_1=1$；在第二行中除a_{21}，a_{22}外全为零，故a_{2j_2}只能取 a_{21}或a_{22}，从而$j_2=1$或2，由于 $j_1=1$，所以只有 $j_2=2$；如此类推得$j_n=n$。所以，在D的展开式中，非零的项只有

$$(-1)^{N(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}。$$

于是可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}。$$

上述行列式称为下三角形行列式，其值等于主对角线（从左上角到右下角这条对角线）上元素的乘积。

同理可得上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

其中$a_{ii}\neq 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$。

特别地：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}。$$

其中$a_{ii}\neq 0$ ($i=1, 2, \cdots, n$)。

上述行列式称为对角形行列式。

例 6 计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解：同例5道理一样，D中不为零的项只可能是$a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-12}a_{n1}$，其前面的符号应为：

$$(-1)^{N(n(n-1)\cdots 21)}=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

因而 $$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-12}a_{n1}.$$

用定义确定行列式各项前的符号时，须将此项元素按行标的自然顺序排起来，这时列标排列的逆序才决定该项符号。由于数的乘法满足交换律，n个元素可以任何次序相乘，那么此时该项的符号将如何确定呢？

定理 1.2 设n阶行列式$D=|a_{ij}|$，则$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$是$D$的项，且其前所带符号为

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)},$$

其中$i_1i_2\cdots i_n$与$j_1j_2\cdots j_n$均为n级排列。

证：因为$i_1i_2\cdots i_n$与$j_1j_2\cdots j_n$均是n级排列，所以

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1}$$

是D的取自不同行、不同列的n个元素之积，因而是D的项。下面决定其前面的符号。将(1)按行标的自然顺序排起来：

$$a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'} \tag{2}$$

这时(1)的符号即为(2)的符号$(-1)^{N(j_1'j_2'\cdots j_n')}$。由(1)变到(2)可以经$s$次元素的对换来实现。而每作一次元素的对换，$i_1i_2\cdots$

i_n与 $j_1j_2\cdots j_n$ 就都同时作一次对换．故 (1) 经 s 次元素对换变到 (2)时，$i_1i_2\cdots i_n$经 s 次对换变成$12\cdots n$，同时$j_1j_2\cdots j_n$ 经 s 次对换变成$j_1'j_2'\cdots j_n'$．故$12\cdots n$与$j_1'j_2'\cdots j_n'$的奇偶性分别是$i_1i_2\cdots i_n$与$j_1j_2\cdots j_n$的奇偶性改变 s 次所得．因而

$$N(12\cdots n)+N(j_1'j_2'\cdots j_n')$$

与

$$N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)$$

的奇偶性相同，所以

$$(-1)^{N(j_1'j_2'\cdots j_n')}=(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

故(1)的符号为$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}$．定理得证．

例如，$a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$ 是 4 阶行列式中的一项，按定理 1.2，其符号为$(-1)^{N(2314)+N(1243)}=(-1)^{2+1}=-1$，即负号．若将其按行标的自然顺序排起来为 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$．则符号为 $(-1)^{N(4123)}=(-1)^3=-1$，即负号．两种方法决定的符号是一致的．

由定理1.2 知：在 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，若将每项的 n 个元素按列标的自然顺序排起来，即

$$a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n},$$

则其前面符号为

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}.$$

用定理1 .2 来决定行列式中项的符号的好处在于，行指标与列指标的地位是对称的，从而行、列的地位亦是对称的．

例 7 若$(-1)^{N(i432k)+N(52j14)}a_{i5}a_{42}a_{3j}a_{21}a_{k4}$ 是五阶行列式的项，则 i，j，k 应为何值？此时该项的符号是什么？

解：由行列式定义，每一项的元素取自不同的行不同的列．故有$j=3$；$i=5$，$k=1$，或$i=1$，$k=5$．

当 $i=5$，$j=3$，$k=1$时，$N(54321)+N(52314)=16$，该项带正号．

当 $i=1$，$j=3$，$k=5$时，$N(14325)+N(52314)=9$，该项带负号．

第二节　行列式的性质

行列式的计算是个很重要的问题。但是，由定义计算行列式需要计算$n!$个项，而每一项又是n个元素的乘积，需作$n-1$次乘法，故仅仅乘法就需作$n!(n-1)$次。当n比较大时，$n!(n-1)$是一个惊人的数目。如计算20阶行列式，需作$20!\times 19\approx 4,622,513\times 10^{13}$次乘法，即使用一台每秒能作一亿次运算的计算机来作这么多次乘法，也得一万多年，这是无法实现的。故必须对行列式作进一步的研究，找出切实可行的计算方法。

本节将介绍行列式的性质及利用性质来简化行列式的计算。

（一）行列式的性质

首先给出转置行列式的概念。

定义 1.6　将行列式D的行和列互换后得到的行列式，称为D的转置行列式，记为D^T或D'。即如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1　行列式转置后值不变。即$D^T=D$。

证： 设D的一般项为$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$。则在$D^T$中，$a_{1j_1}$位于第$j_1$行，第1列；$a_{2j_2}$位于第$j_2$行，第2列；$\cdots a_{nj_n}$位于第$j_n$行，第$n$列。故$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$是$D^T$中不同行不同列的$n$个元素的乘积，其在$D^T$中符号为$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)+N(12\cdots n)}$

$=(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}$。故$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$亦是$D^T$的项。所以$D$的项都是$D^T$的项。同理$D^T$的项也都是$D$的项。故$D^T=D$。

由此可知，行列式行所具有的性质，列同样也具有。以下性质仅对行加以证明。

性质 2 交换行列式的某两行（列），行列式值变号。

证：设n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (k) \\ \\ \\ \end{matrix},$$

交换i，k两行得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (k) \\ \\ \\ \end{matrix},$$

欲证$D_1=-D$。

设$(-1)^{N(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$为$D$的一般项。由于在$D_1$中，$a_{1j_1}$位于第1行、第$j_1$列；…；$a_{ij_i}$位于第$k$行、第$j_i$列；…；$a_{kj_k}$位于第$i$行、第$j_k$列；…；$a_{nj_n}$位于第$n$行、第$j_n$列。故

$$a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$$

为D_1中取自不同行不同列的 n 个元素之积，其在 D_1 中符号为：

$$(-1)^{N(1\cdots k\cdots i\cdots n)+N(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}$$

由于 $1\cdots i\cdots k\cdots n$ 是自然排列，由定理 1.1 知，$1\cdots k\cdots i\cdots n$ 是奇排列。故 $a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$ 在 D_1 中符号为 $-(-1)^{N(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}$。因此$D$与$D_1$中每项符号均相反，所以有$D=-D_1$

性质 3 若行列式中有两行（列）的对应元素相同，则行列式值为零。

依据性质 2 这是显然的。

性质 4 用数 k 乘行列式某行(列)，等于以数 k 乘此行列式。

证：设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

令D_1的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$
$$=k[(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}],$$

而 $$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

恰为D的一般项。故有$D_1=kD$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com