应用泛函基础

东南大学出版社

李延保　楼宇同　编著

应用泛函基础

（第二版）

李延保　楼宇同　编著

东南大学出版社

内容简介

本书是具有初等微积分与线代数知识的读者学习泛函分析的入门书。全书包括分析初步（集合与映射、实直线与连续映射、Lebesgue 测度与 Lebesgue积分简介）、度量空间、Banach 空间与Hilbert空间等四章。本书取材精炼、深入浅出、适用面广、宜于自学，习题与《泛函分析习题集》配套(注 习题集已由东南大学（原南京工学院）出版社出版。

本书可作为工科研究生或应用数学专业学生的一学期教程(60～70学时)，也可供理科、师范院校数学系师生及工程技术人员参考。

责任编辑 徐步政

应用泛函基础

（第二版）

李延保 楼宇同 编著

东南大学出版社出版

（南京四牌楼2号）

江苏省新华书店发行 南京人民印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 印张 9 3/16 字数 206千

1990年1月第2版 1990年1月第1次印刷

印数7001—10000册

ISBN 7-81023-141-3

O·28 定价：1.85元

第二版序言

《应用泛函基础》出版后得到许多读者的热情关注，他们既肯定了本书具有简明、实用、内涵丰富的特点，也指出了某些不足之处。第一版七千册在一年多时间内就业已告罄，表明泛函分析知识不仅在数学界，而且在工程技术界，在工科研究生中越来越为人们所重视。这次再版，我们根据读者的指教对原书中阐述不清楚的地方均作了适当的修改，同时也增加了一些证明和实例，以期减少初学者的困难。

我们真诚地希望本书日臻完美，对使用本书的诸多教师的来信指教，在此表示衷心的谢意。由于水平有限，这次修订版中的缺点和错误，仍在所难免，欢迎广大读者继续批评指正。

编者　1988.9

符 号 说 明

$\in$	属于
$\notin$	不属于
$\subset$、$\supset$	包含符号
$\rightarrow$	趋于极限
$\mapsto$	映射到
$\Longrightarrow$	（1）蕴涵；（2）必要性
$\Longleftarrow$	（1）被蕴涵；（2）充分性
$\Longleftrightarrow$	充分且必要条件，等价
$\exists$	存在着，有
$\forall$	对所有，对每一
sup	上确界
inf	下确界
$\cup$	并(集)
$\cap$	交(集)
$m(A)$	集A的Lebesgue测度
$\mathring{A}$	集A的内部
A'	集A的导集
$\overline{A}$	集A的闭包
$X\times Y$	X与Y的积集
$d(x,y)$	点x到y的距离
$d(x,A)$	点x到集A的距离
$V(x_0,r)$	点x_0的r邻域、开球，也简记为$V_r(x_0)$
$V[x_0,r]$	点x_0的r闭邻域、闭球，也简记为$V_r[x_0]$

$S(x_0, r)$	点x_0为心、r为半径的球面
$\bar{z}$	复共轭
$\|z\|$	绝对值、复数模
$R_e(z)$	实部
$I_m(z)$	虚部
ϕ	空集
A^c	集A的余集
N	自然数集
R	实数集
C	复数集
R^n	n维欧氏空间
A^T	矩阵A的转置阵
A^*	算子A的共轭算子(伴随算子)
$f(A)$	集A的象
$f^{-1}(A)$	集A的原象
$\triangleq$	定义为
$B(X,Y)$	$X\to Y$的有界线性算子构成的空间
$C(X,Y)$	紧算子空间
$C[a,b]$	连续函数空间
$C^{(k)}[a,b]$	具有k阶连续导数的函数空间
$L^p[a,b]$	p次幂(L)可积函数空间
$L^\infty[a,b]$	本性有界可测函数空间
l^p	$\sum_1^\infty \|\xi_i\|^p$收敛的数列$(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)$组成的数列空间

l	有界数列空间
X^*	X的共轭空间
$\dim X$	X的维数
$\text{dia}\,A$	集A的直径
$\text{span}M$	M的张成空间
$M^{\perp}$	M的正交补
$N(A)$	算子A的零空间
$R(A)$	算子A的值域
$D(A)$	算子A的定义域
$\lVert x \rVert$	向量x的范数
$\lVert f \rVert$	泛函f的范数
$\lVert A \rVert$	算子A的范数

第一版序言

泛函分析是研究无穷维空间及其上定义的算子的一门分析数学，是现代数学的重要基础。

近年来，由于计算机技术的发展使得人们对具有无穷多自由度的物理系统有可能作更多的数值研究，泛函分析正是从事这类研究的数学工具之一。因此泛函分析正不断地向工程技术领域渗透，在国内外工程技术领域的论文和专著中，泛函分析的语言和基本理论、方法已被广泛地采用，工科院校的研究生也增设了应用泛函分析基础课。

泛函分析本身具有高度抽象性和概括性，它对许多分支的数学问题提出了统一的观点与处理方法。学习泛函分析需要有一定的数学基础，这给仅具有微积分和线代数知识的工程技术人员及工科学生带来一定的困难。

本书编者结合多年为工科研究生开设应用泛函分析基础课程的经验，在他们原有讲义的基础上编写了这本教材作为学习泛函分析的入门书。

编者考虑到读者的现有数学基础，从初等微积分和线代数知识出发，适当地补充了实分析的一些必备知识，再将读者引进泛函分析的领域。全书体系完整，重点突出，叙述深入浅出，论证删繁就简，并注意联系直观背景，配有较多的例题，很适合自学。

目前，我国高等工科院校普遍将泛函分析课作为研究生的必修课或选修课，并已制定了工科研究生用的《应用泛函

分析（基础部分）大纲》，本书可作为这种课程的教材或参考书。

对于应用数学系学生、工程技术人员、理科和师范院校数学系学生也可用作教材或参考书。

南京大学　马吉溥

一九八六年十月

目　录

第一章 分析初步

本章内容是学习泛函分析的预备知识，扼要地介绍关于集合（简称集）及映射的一些基本知识、实数集R的若干基本命题、连续映射以及勒贝格（Lebesgue）测度和勒贝格积分的意义及性质。

§1.1 集合与映射

一、集合的概念及其运算

集是现代数学中最基本的概念之一，它渗透于数学各个分支之中。

集，用通俗的话讲，是指具有某种性质的事物的全体，其中的个别事物称之为**集的元素**或**元**，有时也称为集中的**点**。

通常，用大写字母，如A,B,C，…表示集；用小写字母，如a,b,c,…表示集的元素。

如果A是一个集，$a\in A$表示a是集A的一个元素，当a不是集A的元素时，记为$a \overline{\in} A$.

所谓给定一个集合A，是指给定了集A中元素所满足的特性，使得对于任一元素x要么$x\in A$，要么$x \overline{\in} A$，两者必居其一。

具有特性P的全体元素的集合，记作

$$A=\{x;\ x\text{具有特性}P\}$$

其中，括号中分号前面的字母代表集合中的一般元素（这里是用x表示），分号后面的部分表示集中元素应具备的性质（上面用P表示）。

例如，$A=\{x;\ a\leqslant x\leqslant b\}$ 表示由满足条件 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切x所组成的集合。显然

$$A=[a,b]$$

又如，若B是代数方程$x^2-1=0$的实数解的集合，则可将B表示成$B=\{x;x^2-1=0\}$或者$B=\{-1,1\}$。

全体自然数组成的集N可以表示成为

$$N=\{1,2,3,\cdots\}$$

或写成 $N=\{n;n\text{为自然数}\}$.

不含任何元素的集称为**空集**，记作ϕ.

集中的元素并非一定都是数。例如，在区间$[a,b]$上连续函数的全体所成的集，称为区间$[a,b]$上的连续函数集，用记号$C[a,b]$表示，该集中的元是连续函数。

定义 1.1.1 子集和相等

设A，B是两个集，若$\forall x\in A$ 都有$x\in B$，则称A是B的**子集**，记为 $A\subset B$ （或$B\supset A$），读作A含于B（或B包含A）；

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则集A与B中元素完全相同，称A与B**相等**，记为 $A=B$；

若$A\subset B$ 且 $A\neq B$，称A为B的**真子集**，记为$A\subsetneqq B$，简称集B比集A大。

对任意集A，规定$\phi\subset A$.

由定义，显然有 $A\subset A$ 及 $A=A$，且

$\{a,b\}=\{b,a\}$ 及 $\{x,x\}=\{x\}$.

注意，集$\{0\}$是仅含数零的单元素集（独点集），它

不是空集。

有了相等关系就可以定义集的运算。

定义 1.1.2 集的并、交、差

设A，B，是两个集合，记

$$A\cup B\triangleq\{x;x\in A\text{或}x\in B\}$$

称为A与B的**并集**（**和集**）；

$$A\cap B\triangleq\{x;x\in A\quad\text{且}\quad x\in B\}$$

称为集A与B的**交集**；

$$A-B\triangleq\{x;x\in A\quad\text{且}\quad x\overline{\in}B\}$$

称为集A与B的**差集**；

若$A\cap B=\phi$　称A与B**互不相交**。

例如，设　$A=\{1,2\}$，$B=\{1,3,4\}$，$C=\{1\}$，$D=\phi$，则

$$A\cup B=\{1,2,3,4\}$$
$$A\cap B=\{1\}$$
$$A-B=\{2\}$$
$$D-A=\phi$$
$$C-A=\phi$$

差集　$A-B$，也可记作B_A^C，称为**B关于A的余集**（**补集**）。

特别，当所讨论的集合均是某个基本集X的子集时，子集A关于基本集X的余集A_X^c就简记为A^c，称为**集A的余集**，即

$$A^c=\{x;x\in X\quad\text{且}\quad x\overline{\in}A\}$$

例如，若以实数集R为基本集，Q为直线上有理点集，P为直线上无理点集，则

$$P=Q^c \quad 及 \quad Q=P^c$$

集合之间的关系常可用文氏(Euler-Venn)图来示意：

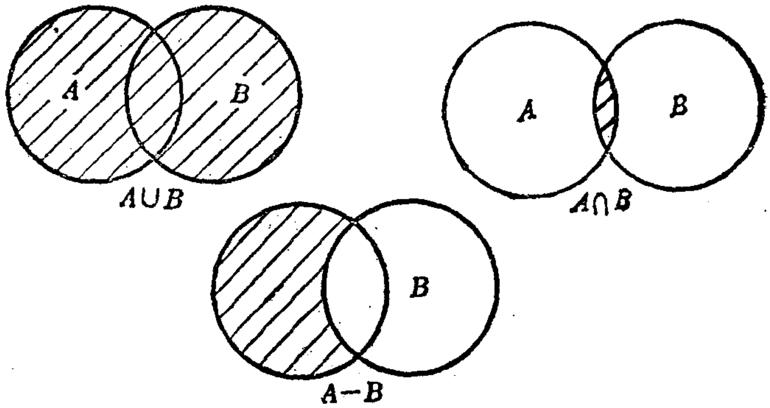

图1.1

集的运算有如下一些基本法则。（注：若无特别说明，今后所涉之集总认为在基本集X之中。）

定理 1.1.1 集的运算性质

交换律 $A\cup B=B\cup A$

$A\cap B=B\cap A$

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

对偶律 (De-Morgan公式)

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$$

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$$

由集合相等的定义，欲证 $A=B$

只须证

$$A\subset B \quad 且 \quad B\subset A$$

即证

$$\forall x\in A \Rightarrow x\in B \quad 且 \quad \forall x\in B \Rightarrow x\in A$$

例如，求证 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

先设

$$\begin{aligned} x\in(A\cup B)^c &\Longrightarrow x\notin A\cup B \\ &\Longrightarrow x\notin A \quad 且 \quad x\notin B \\ &\Longrightarrow x\in A^c \quad 且 \quad x\in B^c \\ &\Longrightarrow x\in A^c\cap B^c \end{aligned}$$

$$\therefore \quad (A\cup B)^c\subset A^c\cap B^c$$

再设

$$\begin{aligned} x\in A^c\cap B^c &\Longrightarrow x\in A^c \quad 且 \quad x\in B^c \\ &\Longrightarrow x\notin A \quad 且 \quad x\notin B \\ &\Longrightarrow x\notin A\cup B \\ &\Longrightarrow x\in (A\cup B)^c \end{aligned}$$

$$\therefore \quad (A\cup B)^c\supset A^c\cap B^c$$

即证得

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$$

本例可简写成如下的等价演算的形式：

$$
\begin{aligned}
x\in(A\cup B)^c &\iff x\overline{\in}A\cup B\\
&\iff x\overline{\in}A \quad 且 \quad x\overline{\in}B\\
&\iff x\in A^c \quad 且 \quad x\in B^c\\
&\iff x\in A^c\cap B^c
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad (A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

但是，不是所有这类证明都能写成等价演算的形式。

其余公式不再一一验证。

除去定理 1.1.1 所列基本运算性质外，下面一些常用的关系式显然是成立的。

（1） $(A^c)^c=A$

（2） $A\cup A^c=X$，$A\cap A^c=\phi$

（3） $A-B=A\cap B^c$

（4） 若$A\subset B$，则 $A^c\supset B^c$

（5） 若$A\cap B=\phi$，则$A\subset B^c$ 及 $B\subset A^c$

集合的运算还可作如下的推广，定义

$$\bigcap_{a\in I}A_a\triangleq\left\{x;\ x\in A_a,\ \forall a\in I\right\}$$

$$\bigcup_{a\in I}A_a\triangleq\left\{x;\ \exists a\in I,\ 使x\in A_a\right\}$$

其中 I 为集A_a的指标集。如果 a 取遍自然数集N，就记

$$\bigcup_{a\in N}A_a=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

以及

$$\bigcap_{a\in N}A_a=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$$

易知下面运算律成立：

分配律 $A\cap\left(\bigcup_{a\in I}A_a\right)=\bigcup_{a\in I}(A\cap A_a)$

$$A\cup\left(\bigcap_{a\in I}A_a\right)=\bigcap_{a\in I}(A\cup A_a)$$

对偶律 $\left(\bigcup_{a\in I}A_a\right)^c=\bigcap_{a\in I}A_a{}^c$

$$\left(\bigcap_{a\in I}A_a\right)^c=\bigcup_{a\in I}A_a{}^c$$

例 1 $A\cup B=B\Longleftrightarrow A\subset B\Longleftrightarrow A\cap B=A$

例 2 $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

证明 利用集的运算律，有

$$\begin{aligned}&(A-B)-C\\&=(A\cap B^c)\cap C^c\\&=A\cap(B^c\cap C^c)\\&=A\cap(B\cup C)^c\\&=A-(B\cup C)\end{aligned}$$

例 3 若 $A_n=\left[0,\ 1+\frac{1}{n}\right)$，证明 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=[0,1]$

证明 设$x\in[0,\ 1]$ 则