实用工程数学

卢名高 金海林 编著

石油大学出版社

GONGCHENGSHUXUE
GONGCHENGSHUXUE
GONGCHENGSHUXUE
GONGCHENGSHUXUE
GONGCHENGSHUXUE
GONGCHENGSHUXUE
GONGCHENGSHUXUE
GONGCHENGSHUXUE
GONGCHENGSHUXUE

内容简介

本书综合了〈线性代数〉、〈计算方法〉和〈最优化方法〉各门课的主要内容。书中重视数值计算，并加强了计算机技能的训练和培养，对于各种重要的算法都有计算框图和BASIC语言程序，还备有配套的微型机软盘；书中内容深入浅出，通俗易懂，具有高等数学基础的读者都能学懂、掌握。

本书是为石油化工类各专业编写的，其他有关专业可作为教学参考书，也可供从事实践工作的工程技术人员自学。

书中每章附有适量习题，供教学使用。

实用工程数学

卢名高
金海林 编著

*

石油大学出版社出版
（山东省东营市）
山东省新华书店发行
山东电子工业印刷厂印刷
（淄博市周村）

开本850×1168 1/32 12.8125印张 333千字
1990年6月第1版 1990年6月第1次印刷
印数1—4000册
ISBN 7-5636-0090-6/O1·05
定价：4.80元

前　言

随着科学技术的飞速发展，理工科院校各学科、各专业对数学课程提出越来越高的要求：内容要新、知识面要广、实用性要强、学时要少，这是当前工科数学教材改革应重视的方向。著名科学家钱学森最近给数学家杨乐的信中指出："老的大学数学课程是本世纪初设计的，那时没有计算机，所以数学教学的重点放在求解，也可以说是微观的。今天是电子计算机时代，老一套当然远离实际。"我们在多年的教学实践中，深深地感到了钱老所提问题的严重性。为了使教学适应时代的需要，培养能够尽快进入科技前沿的现代化人才，我们总结了多年来教学与实践的经验，在教学讲义的基础上，编写了这本《实用工程数学》，本书以石油化工类型各专业的需要为目的，综合了原"工程数学"中的〈线性代数〉、〈计算方法〉和〈最优化方法〉的三部分主要内容，删去"工程数学"原单科设课时教材中的重复、繁琐内容，淡化其部分的理论推导、证明；它加强了教材的针对性和实用性，特别是强化了计算机技能的训练，并且使教学时数由原来单科设课时的110～120小时压缩为72～80小时。

在编写过程中，我们对全书各章节在精选内容的基础上，力求准确、简明、重点突出、通俗易懂；在方法和技巧的处理上着重于思路和几何的直观解释；为便于应用，我们对全书一些重要算法都配有计算框图和BASIC语言程序，还备有配套软盘，使工程数学"工程"的含义浓化了，实用性加强了，至于有关各种"算法收敛性"的论证、"最优性条件"等的理论问题，限于篇幅，一般只给出结论或说明，读者如要进一步了解，可参阅本书提供的有关专著。

本书一至四章和第十一、十二章由卢名高编写；五至十章由金海林编写，全书由卢名高主编。

石油大学王才经副教授担任全书主审，他对书中各章节内容提出了很多宝贵意见和建议；本教材的出版还得到石油大学教务处、石油大学出版社、北京石油化工专科学校张富元副教授及化工教研室应金良主任等同志的大力支持和帮助。在此，我们一并致以衷心的感谢！

由于我们水平所限，加上仓促完稿，书中错误、不妥之处在所难免，恳请读者和同行给予批评指正。

编　者

1990年6月

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章　行列式、矩阵

行列式、矩阵是线性代数最基本、最重要的内容，它不但渗透到现代数学的各个分支，而且在科学研究、工程技术应用等方面也是一个不可缺少的工具。正确理解它的基本概念，熟练掌握其算法，是学好本课程的基础。

§1.1　n阶行列式

我们在初等数学里已学习过二阶、三阶行列式的计算方法，这里更一般地引述n阶行列式概念。为讨论方便，我们定义一阶行列式为

$$|a_{11}|=a_{11}$$

因此，二阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}|a_{22}|-a_{12}|a_{21}|$$

三阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

不难看出它们的规律是：把这个行列式的第一行各元素乘以划去该元素所在的行和列后剩下的一个行列式，然后在各乘积前面冠以正负相间的符号，最后再求它们的代数和。

这个算法，因每一项都以行列式第一行的一个元素为其因

子，因此称此行列式是按第一行展开的。事实上，按第一列展开，甚至按任意行、任意列展开都可以。

例1 计算行列式 $|A|=\begin{vmatrix}3 & -2 & 2\\ 1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}$

解 若按第一行展开，则有

$$|A|=3\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}1 & -3\\ 4 & 2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}$$

$$=21+28-14=35$$

这样，我们用一阶行列式来定义二阶行列式，用二阶行列式来定义三阶行列式。类似地，我们可定义四阶、五阶，乃至 $n-1$ 阶行列式，从而用 $n-1$ 阶行列式来定义 n 阶行列式。

定义1 设有 n^2 个数（或字母），把它们排成 n 行 n 列的一个正方形（数表），记

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

其中 a_{ij} 叫做第 i 行第 j 列上的元素。

把 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，余下的元素按原来的相对位置构成一个 $n-1$ 阶行列式，记

$$M_{ij}=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n}\\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

我们称它为元素a_{ij}的**余子式**；而在M_{ij}前添置符号$(-1)^{i+j}$，记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

则称它为元素a_{ij}的**代数余子式**。于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12} \quad \text{（按第一行划）}$$

$$=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22} \quad \text{（按第二列划）}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}$$

$$\text{（按第}i\text{行，}i=1,\ 2,\ 3\text{）}$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}$$

$$\text{（按第}j\text{列，}j=1,\ 2,\ 3\text{）}$$

若将例1按第一列计算，则有

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}$$

$$=3\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+4\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=21+6+8=35$$

定义2 数表A的行列式$|A|$是以它的任一行(列)的所有各元素与它的代数余子式乘积之和。即

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}$$

$$(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

称$|A|$为n**阶行列式**。

利用这个定义，可把一个n阶行列式的计算归结为计算n个$n-1$阶行列式，而其中的每一个$n-1$阶行列式还可展为$n-2$阶

行列式，依此类推，最后就可算出n阶行列式的值。这个定义，我们通常叫做把行列式按第i行(列)展开。

例2　将例1分别按第二行和第三列展开

解　(1) $|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$

$$= 1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix} + 2\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix}$$

$$+(-3)\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 1\end{vmatrix}$$

$= 6 - 4 + 33 = 35$　(按第二行展开)

(2) $|A| = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$

$$= 2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix} + (-3)\times(-1)^{2+3}$$

$$\times\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 1\end{vmatrix} + 2\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}$$

$= -14 + 33 + 16 = 35$

可见行列式按任一行(列)展开，其结果都是一样的。

几个特殊行列式及其结果

1° $$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & a_{nn}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$ （称上三角行列式）

2° $$\begin{vmatrix}a_{11} & & & 0\\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$ （称对角行列式）

3° $$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots\cdots & a_{2\,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & 0\\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

（从第n列至第一列展开）

4° $\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \begin{matrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{matrix} & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$

§1.2 行列式的性质

为了简化行列式的计算，下面介绍行列式的一些性质。

定义 把行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行依次变为相应的列，所得的行列式

$$|\boldsymbol{A}^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为$|\boldsymbol{A}|$的转置行列式。

性质1 行列式与它的转置行列式相等。即

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^T|$$

证 当$n=2$时，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$

设$n=k$时成立，$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^T|$。

当$n=k+1$时，将$|\boldsymbol{A}|$按第$k+1$行展开，而$|\boldsymbol{A}^T|$按第$k+1$列展开，得

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1\,k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{k\,k+1} \\ a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \cdots & a_{k+1\,k} & a_{k+1\,k+1} \end{vmatrix}$$

$$= a_{k+1\,1}A_{k+1\,1} + \cdots + a_{k+1\,k+1}A_{k+1\,k+1}$$

$$= a_{k+1\,1}A^T_{k+1,\,1} + \cdots + a_{k+1\,k+1}A^T_{k+1,\,k+1}$$

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{k1} & a_{k+1\,1} \\ a_{12} & \cdots & a_{k2} & a_{k+1\,2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1\,k+1} & \cdots & a_{k\,k+1} & a_{k+1\,k+1} \end{vmatrix}$$

$$= a_{k+1\,1}A^T_{k+1\,1} + \cdots + a_{k+1\,k+1}A^T_{k+1\,k+1}$$

$$\therefore |A| = |A^T|$$

性质2 交换行列式的两行(列)，行列式的值变号。

证　当$n=2$时，下式成立。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

设　$n=k$时成立，即

$$A(i,\ j) = -A(j,\ i)$$

式中$A(i,\ j)$表示i行在上，j行在下。

当$n=k+1$时，设$r \neq i,\ j$

$$|A(i,\ j)| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots\cdots & a_{1\,k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots\cdots\cdots & a_{i\,k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots\cdots\cdots & a_{j\,k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k+1\,1} & \cdots\cdots & a_{k+1\,k+1} \end{vmatrix}$$

$$= a_{r1}A_{r1}(i,\ j) + \cdots + a_{r\,k+1}A_{r\,k+1}(i,\ j)$$

(按第r行展开)

$$|A(j,\ i)|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots\cdots & a_{1\,k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots\cdots\cdots & a_{j\,k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots\cdots\cdots & a_{i\,k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k+1\,1} & \cdots\cdots & a_{k+1\,k+1} \end{vmatrix}$$

$$=a_{r1}A_{r1}(j,\ i)+\cdots+a_{r\,k+1}A_{r\,k+1}(j,\ i)$$

$$=-[a_{r1}A_{r1}(i,\ j)+\cdots+a_{r\,k+1}A_{r\,k+1}(i,j)]$$

$$\therefore |A(i,\ j)|=-|A(j,\ i)|$$

推论 若行列式中有两行(列)的元素相同，则行列式的值为零。

证 设这个行列式为$|A|$，把其中相同的两行交换，得到新行列式为$-|A|$。另一方面，交换相同的两行，行列式并没有改变，即

$$|A|=-|A| \qquad \therefore |A|=0$$

性质3 若行列式的第i行(列)中各元素都可以写成两项之和，$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。则此行列式等于两个行列式之和，它们的第$i$行分别是$b_{ij}$及$c_{ij}$，而其余各行都不变，即

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots\cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots\cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots\cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{记}}{=} |B| + |C|
$$

证　按第i行展开

$$
\begin{aligned}
|A| &= (b_{i1}+c_{i1})A_{i1} + \cdots + (b_{in}+c_{in})A_{in} \\
&= (b_{i1}A_{i1} + \cdots + b_{in}A_{in}) + (c_{i1}A_{i1} + \cdots + c_{in}A_{in}) \\
&= |B| + |C|
\end{aligned}
$$

性质4　若行列式某一行(列)的元素有公因子k,则k可提到行列式外相乘。即

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots\cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots\cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

证　把左边行列式按第i行展开，即

$$
\begin{aligned}
\text{“左边”} &= ka_{i1}A_{i1} + \cdots + ka_{in}A_{in} \\
&= k(a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}) \\
&= k|A| = \text{“右边”}
\end{aligned}
$$

推论　一个行列式中如有一行(列)的元素全为零，则行列式之值为零。

性质5　行列式中如有两行(列)的对应元素成比例，则行列式之值为零。

这可由性质4及性质2的推论得到证明。

性质6　行列式中任一行(列)的各元素与另一行(列)对应的各元素的代数余子式乘积之和为零。即

$$
a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j)
$$

$$a_{1i}A_{1j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0\ (i\neq j)$$

证　先证第一式，不妨设$i<j$，由定义

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots\cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots\cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{j1}A_{j1}+\cdots+a_{jn}A_{jn}$$

（按第j行展开）

在上式中把第j行所有元素换为相应的第i行所有元素，令

$$a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=|\widetilde{A}|，但$$

$$|\widetilde{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots\cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots\cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j)$$

同理可证第二式。

性质7　若将行列式的某一行(列)的元素同乘以数k对应地加到另一行(列)上去，则行列式的值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots\cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & \cdots\cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots\cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots\cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 按第j行展开

$$
\begin{aligned}
\text{“左边”} &= (a_{j1}+ka_{i1})A_{j1}+\cdots+(a_{jn}+ka_{in})A_{jn} \\
&= (a_{j1}A_{j1}+\cdots+a_{jn}A_{jn})+k(a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}) \\
&= a_{j1}A_{j1}+\cdots+a_{jn}A_{jn}=\text{“右边”}
\end{aligned}
$$

下面利用行列式的性质来简化行列式的计算。符号r_i表示第i行，c_j表示第j列。(i，$j=1$，2，…，n)

例1

$$
\begin{vmatrix} 1 & 9 & -2 & 3 \\ -2 & 7 & 4 & 105 \\ 5 & 1 & -10 & 21 \\ -3 & -6 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{（根据性质 5）}
$$

例2

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_3 & a \end{vmatrix}
\xlongequal[\substack{r_1(-a_2)+r_3 \\ r_1(-a_3)+r_4}]{r_1(-a_1)+r_2}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-a_1 & a_2-a_1 & a_2-a_1 \\ 0 & 0 & a-a_2 & a_3-a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a-a_3 \end{vmatrix}
$$

$$
=(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3) \quad \text{（上三角行列式）}
$$

例3 证明

$$
\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}
$$

证 下面符号“ ”表示互换

$$
\text{“左边”} = \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}
$$

（根据性质3）

$$
= \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}
$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com