路路通丛书

高三数学总复习

LULUTONG

与新教材同步 重点中学名师主笔

◆丛书主编／莫志斌
◆本册主编／李生根

- 知识要点通晓
- 典型例题通析
- 综合能力通训
- 课本习题通解
- 单元考点通测

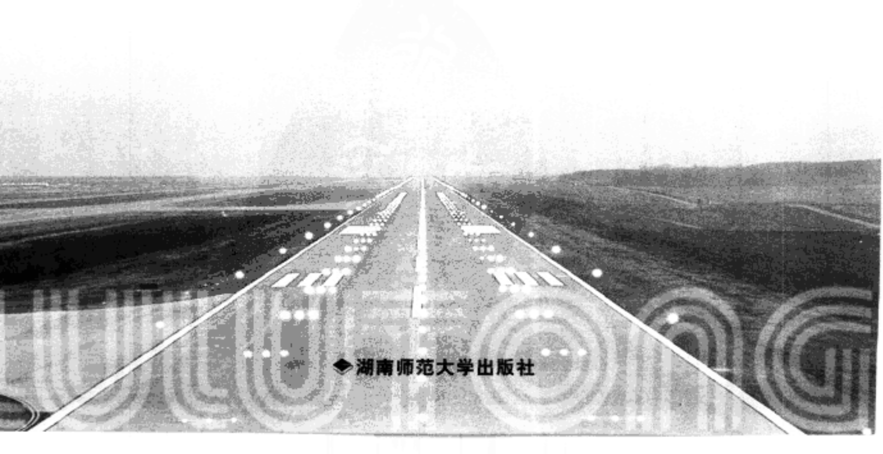
湖南师范大学出版社

路路通丛书

◆丛书主编／莫志斌
◆丛书副主编／陈来满　何宪才

高三数学

◆本科主编／陈来满
◆本册主编／李生根
◆撰　　稿／李生根
　　　　　　李建刚
　　　　　　姜海平



◆湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

路路通丛书·高三数学 / 莫志斌主编 .—长沙：湖南师范大学出版社，2002.6

ISBN 7—81081—159—2/G·099

Ⅰ.路 ... Ⅱ.莫 ... Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 036351 号

路路通丛书·高三数学

丛书主编：莫志斌
本册主编：李生根
策划组稿：何海龙
责任编辑：李巧玲　陈冠初
责任校对：刘琼琳

湖南师范大学出版社出版发行
（长沙市岳麓山）
湖南省新华书店经销　　长沙市银都教育印刷厂印刷
730×988　16 开　16.75 印张　424 千字
2002 年 6 月第 1 版　2002 年 6 月第 1 次印刷
印数：1—8200 册
ISBN 7—81081—159—2/G·099
定价：17.00 元

前 言

《路路通丛书》是一套涵盖中学主要课程(语文、数学、英语、物理、化学)的同步学习辅导用书,根据人民教育出版社最新教材编写.丛书含金量高,特点鲜明,主要体现在以下几个方面:

一、名师主笔.作者来自湖南师范大学附属中学、长郡中学等湖南省重点中学教学第一线的优秀骨干教师.

二、内容适用.丛书紧密结合教材内容,先抓住课本知识要点进行梳理;然后精辟讲解三种难度不一的、涉及中(高)考点的题目(基础题、提高题、强化题),基础一般的同学可以循序渐进,基础较好的同学可以直接攻坚,从中可以掌握学习方法,少走弯路,举一反三.而后则是名师们精心编排的最新的题库,以训练你的综合能力(从后面的答案可以知道自己"能量"的大小)..当然,接着的课本习题解答与提示更具有实用性和启发性.至于每个单元的考点测试题(附答案)则是检验阶段性学习成果的一把好"尺子".

三、体例新颖.丛书包括五个栏目:知识要点通晓、典型例题通析、综合能力通训、课本习题通解、单元考点通测.体例是依照学生的学习规律而设计的,它主要是能让学生掌握巧学方法,提高综合能力.它不仅能同时满足不同学习程度的学生的需要,而且能使学生更快、更牢固地掌握课堂内外知识,逐步提高分析、解决问题的能力.

四、版式独特.丛书采用国际流行开本,每个版面配有精美的图片,内芯小五号字体,容量更加丰富.

每年暑假推出新书,上下册合为一本,买一本用一年,不但经济合算,而且便于预习与复习,起到有备而"战"、温故而知新的作用.

高三年级的图书根据教育部考试中心《2002年普通高等学校招生全国统一考试说明》编写.初三用书亦与中考紧密结合,实用价值更大.

受教材改版等因素影响,丛书中个别分册体例稍有差异.

丛书编写过程中错漏之处在所难免,敬请读者批评指正.

编 者

2002年6月

MAK 72/11

目　录

路路通

第一章

集合与函数

第一节

集　　合

知识要点通晓

1. 理解集合、全集、空集、子集、交集、并集、补集的概念;

2. 掌握集合元素的特性,集合的表示方法,明确元素与集合、集合与集合之间的关系,并能正确表达;

3. 掌握集合的交、并、补运算法则及运算律并能作简单应用.

典型例题通析

基础题

例1　设 $M=\{x|x\leqslant 2\sqrt{3}\}$, $a=\sqrt{11+\sin x}$,其中 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$,则下列关系式正确的是(　　).

A. $a\subset M$　　B. $a\notin M$　　C. $\{a\}\in M$　　D. $\{a\}\subset M$

例2　已知集合 $M=\{a^2,a+1,-3\}$, $N=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$,若 $M\cap N=\{-3\}$,则 a 的值是(　　).

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

例3　若集合 $M=\{1,3,x\}$, $N=\{x^2,1\}$,且 $M\cup N=\{1,3,x\}$,那么满足条件的 x 的取值的集合是________.

答案:1. D;2. A;3. $\{0,\pm\sqrt{3}\}$.

提高题

例4　已知 $\mathbf{R}$ 为全集, $A=\{x|\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2\}$, $B=\{x|\frac{5}{x+2}\geqslant 1\}$,求 $\overline{A}\cap B$.

讲析　$A=\{x|-1\leqslant x<3\}$, $\therefore \overline{A}=\{x|x<-1$ 或 $x\geqslant 3\}$, $B=\{x|-2<x\leqslant 3\}$, $\therefore \overline{A}\cap B=\{x|-2<x<-1$ 或 $x=3\}$.

例5　已知集合 $A=\{x|-x^2+3x+10\geqslant 0\}$, $B=\{x|x^2-2x+2m<0\}$,若 $A\cap B=B$,求实

数 m 的取值范围.

讲析 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$, $A\cap B=B\Leftrightarrow B\subseteq A$,当 $\Delta=4-8m\leqslant 0$ 即 $m\geqslant\frac{1}{2}$ 时,$B=\varnothing\subseteq A$.

当 $\Delta>0$ 即 $m<\frac{1}{2}$ 时,由 $B\subseteq A$ 得 $-4\leqslant m<\frac{1}{2}$,综合得 $m\leqslant -4$.

强化题

例 6 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x\mid x^2-ax+a-1=0\}$, $C=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$,且 $A\cup B=A$, $A\cap C=C$,求实数 a 的值和 m 的取值范围.

讲析 $A=\{1,2\}$, $A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$, $A\cap C=C\Leftrightarrow C\subseteq A$.

当 $x^2-mx+2=0$ 有等根时,$m=\pm 2\sqrt{2}$,不符合题意.

当 $x^2-mx+2=0$ 有不等根 1 和 2 时,$m=3$.

当 $x^2-mx+2=0$ 无实根时,$-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$,综合得 $m=3$ 或 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

综合能力通训

一、选择题

1. 如图 1.1 所示,I 为全集,M、P、S 是 I 的三个子集,则图中阴影部分表示的集合是(　　).

A. $(M\cap P)\cap S$　　B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap\overline{S}$　　D. $(M\cap P)\cup\overline{S}$

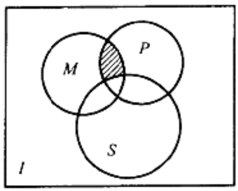


图 1.1

2. 已知集合 $M=\{x\mid x=m+\frac{1}{6}, m\in\mathbf{Z}\}$, $N=\{x\mid x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3}, n\in\mathbf{Z}\}$, $P=\{x\mid x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6}, p\in\mathbf{Z}\}$,则 M、N、P 满足的关系是(　　).

A. $M=N\subset P$　　B. $M\subset N=P$

C. $M\subset N\subset P$　　D. $N\subset P\subset M$

二、填空题

3. 已知 $A=\{x\mid \frac{6}{6-x}\in\mathbf{Z}, x\in\mathbf{Z}\}$,用列举法表示集合 $A=$__________.

4. 设全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$,集合 $M=\{(x,y)\mid \frac{y-3}{x-2}=1\}$, $N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$,那么 $\overline{M\cup N}=$________.

5. 已知集合 $M=\{a,0\}$, $N=\{x\mid x^2-3x<0, x\in\mathbf{Z}\}$,且 $M\cap N=\{1\}$,若 $P=M\cup N$,那么集合 P 的子集的个数为________.

三、解答题

6. 已知全集 $I=\{x\mid x^2-3x+2\geqslant 0\}$, $A=\{x\mid |x-2|>1\}$, $B=\{x\mid \frac{x-1}{x-2}\geqslant 0\}$,求 $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cup B$.

7. 已知三个集合:$A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$, $B=\{x\mid \log_2(x^2-5x+8)=1\}$, $C=\{x\mid 2^{x^2+2x-8}=1\}$,若 $A\cap B\neq\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$,求实数 a 的值和集合 A.

8. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=-\frac{1}{3}x+\log_2\frac{k-1}{k}\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2-8y^2+18y+18y\cdot\log_2\frac{k-1}{k}=9(\log_2\frac{k-1}{k}+1)^2\}$，若 $A\cap B\supset\varnothing$，求 k 的范围.

第二节

含绝对值的不等式与一元二次不等式的解法

知识要点通晓

1. 解含绝对值的不等式的基本思路是根据绝对值的定义及其几何意义去绝对值，对含几个绝对值的不等式一般是零点分段去绝对值求解；

2. 对一元二次不等式，要理解二次函数、一元二次方程、一元二次不等式三者之间的关系，再根据三者之间的关系熟练地求解.

典型例题通析

基础题

例 1 关于 x 的不等式 $3b+|a-5x|>0(b<0)$ 的解集是(　　).

A. $\{x\mid x<\frac{a+3b}{5}$ 或 $x>\frac{a-3b}{5}\}$　　B. $\{x\mid x<\frac{a-3b}{5}$ 或 $x>\frac{a+3b}{5}\}$

C. $\{x\mid x<\frac{-a+3b}{5}$ 或 $x>\frac{-a-3b}{5}\}$　　D. $\{x\mid x<\frac{-a-3b}{5}$ 或 $x>\frac{-a+3b}{5}\}$

例 2 关于 x 的不等式 $|x+1|+|3-x|>a$ 的解集是 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是____.

例 3 已知不等式 $ax^2+2x+c>0$ 的解集是 $\{x\mid -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\}$，则关于 x 的不等式 $-cx^2+2x-a>0$ 的解集为________.

答案：1. A；2. $a<4$；3. $\{x\mid -2<x<3\}$.

提高题

例 4 解不等式

①$|x|+|x+1|\leqslant 2$　　②$|2x+3|-5>a$

讲析 ①$\begin{cases}x\geqslant 0\\ x+x+1\leqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1\leqslant x<0\\ -x+x+1\leqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<-1\\ -x-x-1\leqslant 2\end{cases}$

解得 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 或 $-1\leqslant x<0$ 或 $-\frac{3}{2}\leqslant x<-1$，故解集为 $\{x\mid -\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\}$.

②当 $a<-5$ 时，解集为 $\mathbf{R}$；当 $a=-5$ 时，解集为 $\{x\mid x\neq-\frac{3}{2}\}$，当 $a>-5$ 时，解集为 $\{x\mid x<\frac{-a-8}{2}$ 或 $x>\frac{a+2}{2}\}$.

例 5 解关于 x 的不等式($a\in\mathbf{R}$).

①$2x^2+ax+2>0$　　②$56x^2+ax<a^2$

讲析 ①当 $a<-4$ 或 $a>4$ 时，$\Delta>0$，不等式的解集为 $\{x \mid x<\frac{1}{4}(-a-\sqrt{a^2-16})$ 或 $x>\frac{1}{4}(-a+\sqrt{a^2-16})\}$.

当 $a=\pm4$ 时，$\Delta=0$，不等式的解集为 $\{x \mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq-\frac{a}{4}\}$. 当 $-4<a<4$ 时，$\Delta<0$，不等式的解集为 $\mathbf{R}$.

②当 $a>0$ 时 $\frac{a}{8}>-\frac{a}{7}$，不等式的解集为 $\{x \mid -\frac{a}{7}<x<\frac{a}{8}\}$.

当 $a=0$ 时，$\frac{a}{8}=-\frac{a}{7}$，不等式的解集为 $\varnothing$.

当 $a<0$ 时，$\frac{a}{8}<-\frac{a}{7}$，不等式的解集为 $\{x \mid \frac{a}{8}<x<-\frac{a}{7}\}$.

强化题

例 6 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象过点 $(-1,0)$，是否存在常数 a、b、c，使不等式

$x\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}(1+x)^2$ 对一切实数 x 都成立？

讲析 过点 $(-1,0)$，$\therefore a-b+c=0$. ①

令 $x=0$ 得 $0\leqslant c\leqslant\frac{1}{2}$，令 $x=1$ 得 $a+b+c=1$ ②，故 $c=\frac{1}{2}-a$，$\therefore 0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$.

将①、②代入原不等式，根据恒成立可得 $a=c=\frac{1}{4}$. 故存在满足题设条件的 $a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{4}$.

综合能力通训

一、选择题

1. 不等式组 $\begin{cases} x<0 \\ \left|\frac{3-x}{3+x}\right|<\frac{2-x}{2+x} \end{cases}$ 的解集为（　　）.

A. $\{x \mid -2<x<0\}$　B. $\{x \mid -\frac{5}{2}<x<0\}$　C. $\{x \mid -\sqrt{6}<x<0\}$　D. $\{x \mid -3<x<0\}$

2. 已知 a_1、a_2、b_1、b_2、c_1、c_2 均不为 0，设命题 P：关于 x 的不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$，$a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集相同，命题 Q：$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$，则 Q 是 P 成立的（　　）.

A. 充分非必要条件　B. 必要非充分条件　C. 充要条件　D. 既非充分又非必要条件

二、填空题

3. 不等式 $|x^2-2x|\leqslant\frac{1}{2}x$ 的解集为________.

4. 不等式 $4x^2+4x+1>0$ 的解集为________；不等式 $x^2+25\leqslant10x$ 的解集为________；不等式 $x^2+3>3x$ 的解集为________.

5. 不等式 $(a^2-1)x^2-(a-1)x-1<0$ 的解是全体实数，则 a 的取值范围是________.

路路通

三、解答题

6. 已知 $A=\{x \mid |x-1|<c, c>0\}$，$B=\{x \mid |x-3|>4\}$，且 $A\cap B=\varnothing$，求 c 的取值范围.

7. 已知不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x \mid \alpha<x<\beta\}$，其中 $\beta>\alpha>0$，试用 α、β 表示不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集.

8. 设不等式 $2x-1>m(x^2-1)$ 对满足 $|m|\leqslant 2$ 的一切 m 的值都成立，求 x 的取值范围.

第三节

映射、函数与反函数

知识要点通晓

1. 了解映射及其有关的概念、映射的表示方法，能根据映射的定义判断一个对应是否是映射；

2. 理解函数的概念，明确函数是一个特殊的映射，其特殊性表现在 A、B 是两个非空的数集；

3. 理解反函数的概念，会求一些简单函数的反函数；

4. 掌握反函数的基本性质、互为反函数的两个函数间的相互关系.

典型例题通析

基础题

例 1 下列从集合 A 到集合 B 的对应中为映射的是(　　).

A. $A=B=\mathbf{N}$，对应法则 $f: x\to y=|x-3|$

B. $A=\mathbf{R}$，$B=\{0,1\}$，对应法则 $f: x\to y=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

C. $A=\mathbf{R}_+$，$B=\mathbf{R}$，对应法则 $f: x\to y=\pm\sqrt{x}$

D. $A=\mathbf{Z}$，$B=\mathbf{Q}$，对应法则 $f: x\to y=\dfrac{1}{x}$

例 2 设 $A=\{x \mid x=n^2, n\in\mathbf{Z}\}$，定义映射 $f: A\to B$：对 $x\in A$，$f(x)$ 等于 x 除以 5 所得的余数. 为保证 $y\in B$，总存在 $x\in A$ 使 $f(x)=y$，则 B 中所含元素的个数为(　　).

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

例 3 已知 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$，则 $f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 的值为______.

答案：1. B；2. B；3. ln3.

提高题

例 4 求下列函数的反函数.

(1) $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqslant x<0)$　　(2) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\geqslant 0\\ x+1 & x<0\end{cases}$

讲析 (1)$y=1-\sqrt{1-x^2}$平方得$(y-1)^2=1-x^2$, $\because -1\leqslant x<0$, $\therefore x=-\sqrt{2y-y^2}$, $\therefore f^{-1}(x)=-\sqrt{2x-x^2}$, $0<x\leqslant 1$.

(2)分段求反函数得 $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & x\geqslant 1,\\ x-1 & x<1.\end{cases}$

例5 设 $f_1(x)=-\frac{1}{3}x$, $f_2(x)=\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}$, $f_3(x)=\frac{2}{3}x-2$, 符号 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 表示 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的最大的数(若最大者不止一个,此符号则表示这些数的公共值).定义函数 $f(x)=\max\{f_1(x),f_2(x),f_3(x)\}$.

(1)求 $f(x)$的解析式;

(2)关于 x 的方程 $|f(x)|=a$ 恰有两解,求 a 的取值范围.

讲析 (1)在同一坐标系中作出 $f_1(x)$、$f_2(x)$、$f_3(x)$的图象即得

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x & x\leqslant 1\\ \frac{1}{6}x-\frac{1}{2} & 1<x\leqslant 3\\ \frac{2}{3}x-2 & x>3\end{cases}$$

(2)将 $f(x)$的图象在 x 轴下方部分对称反到上方,根据图象即得 $a>\frac{1}{3}$ 或 $a=0$.

强化题

例6 给定实数 a, $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$,设函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}$($x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq\frac{1}{a}$),证明这个函数的图象关于直线 $y=x$ 对称.

讲析 由 $y=\frac{x-1}{ax-1}$可求得 $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{ax-1}$,故 $f(x)$的图象关于 $y=x$ 对称.

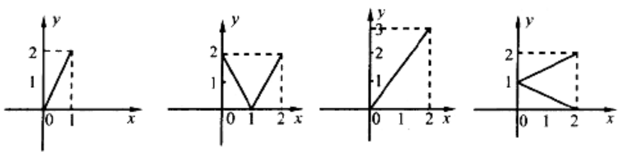
综合能力通训

一、选择题

1. 设 $A=\{1,2,3\}$,映射 $f:A\to A$,满足 $f[f(x)]=x$ 对所有的 $x\in A$ 均成立,这样的映射有( ).

A.3个　　B.4个　　C.5个　　D.8个

2. 设 $M=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$, $N=\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$,给定下列四个图象,其中能表示集合 M 到集合 N 的函数关系的有( ).



A.0个　　B.1个　　C.2个　　D.3个

二、填空题

3. 设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{x,y\}$，那么，从 A 到 B 可以建立的映射的个数为________个，从 B 到 A 可以建立的映射的个数为________个.

4.《中华人民共和国税法》规定，公民的工资、薪金所得不超过800元的部分不必纳税，超过800元的部分为全月应纳税所得额，此项税款按下表分段累计进行：

全月应纳税所得额	税率
不超过500元部分	5%
超过500元至2000元的部分	10%
超过2000元至5000元的部分	15%

某人一月份应交纳此项税款26.78元，则他的当月工资、薪金共计为________元.

5. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x-1)=x^2-2x+3(x\leqslant 0)$，则 $f^{-1}(x+1)=$________.

三、解答题

6. 设点 $M(1,2)$ 既在函数 $f(x)=ax^2+b(x\geqslant 0)$ 的图象上，又在其反函数的图象上，

(1)求 $f^{-1}(x)$；

(2)证明 $f^{-1}(x)$ 在其定义域上是减函数.

7. 动点 P 从边长为1的正方形 $ABCD$ 的顶点 A 出发，沿正方形的边顺次经过 B、C、D 再回到 A，设 x 表示 P 点的行程，y 表示 PA 的长，求 y 关于 x 的函数关系式.

8. 某家庭今年一月份、二月份和三月份煤气用量和支付费用如下表所示：

月份	用气量	煤气费
一月份	4米^3	4元
二月份	25米^3	14元
三月份	35米^3	19元

若每月用气量不超过最低限度 A 米^3，只付基本费3元和每户每月的定额保险 C 元，若用气量超过 A 米^3，超过部分每立方米付 B 元，又知保险费 C 不超过5元，根据上面的表格求 A，B，C.

第四节

函数的表达式

知识要点通晓

1. 掌握函数的三种表示方法——列表法、解析式法、图象法.

若函数在其定义域的不同子集上，因对应法则不同而用几个不同式表示，这种形式的函数称之为分段函数. 分段函数求值时，必须注意函数定义域.

2. 如果 $y=f(u)$, $u=g(x)$,那以 $y=f[g(x)]$叫做 f 与 g 的复合函数, u 叫做中间变量, $g(x)$叫内函数, $f(u)$叫做外函数.

3. 求函数解析式的主要方法有:待定系数法、配方法、换元法、参数法及解方程组法.

4. 研究函数必须注意"定义域优先".

典型例题通析

基础题

例 1 已知 $f(\frac{2}{x}+1)=\lg x$,则 $f(x)=$ ________.

例 2 函数 $f(x)=\begin{cases}x+2 & x\leqslant -1\\ x^2 & -1<x<2\\ 2x & x\geqslant 2\end{cases}$,若 $f(x)=3$,则 x 的值为(　　).

A. -1　　B. $\pm\sqrt{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

例 3 已知 $3f(x-1)+2f(1-x)=2x$,则 $f(x)=$ ________.

答案:1. $\lg\frac{2}{x-1}(x>1)$;2. D;3. $2x+\frac{2}{5}$.

提高题

例 4 已知二次函数 $f(x)$满足 $f(2)=0$, $f(2-x)=f(x)$,且方程 $f(x)=x$ 有等根.

(1)求 $f(x)$的解析式;

(2)是否存在 m、$n(m<n)$,使当 $f(x)$的定义域为$[m,n]$时,其值域为$[2m,2n]$. 若存在,求出 m、n 的值;若不存在,说明理由.

讲析 (1)设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$、$f(2-x)=f(x)$,则 $-\frac{b}{2a}=1$.①

$f(2-0)=f(0)=0$,故 $c=0$.② $f(x)=x$ 有等根,$(b-1)^2-4ac=0$.③

①②③联立得 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$.

(2)由(1)得 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$. 又值域为$[2m,2n]$,故 $2n\leqslant\frac{1}{2}$,即 $n\leqslant\frac{1}{4}$. 这时 $f(x)$在$[m,n]$上递增,由 $f(m)=2m$, $f(n)=2n$ 得存在 $m=-2$, $n=0$ 满足题设.

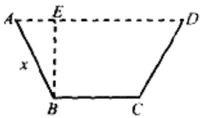


图 1.2

例 5 设计一水槽,其横截面为等腰梯形,如图 1.2,要求满足条件 $AB+BC+CD=a$(常数),$\angle ABC=120°$,写出横截面的面积 y 与腰长 x 间的函数关系,并求它的定义域和值域.

讲析 设 $AB=CD=x$,则 $BC=a-2x$,作 $BE\perp AD$ 于 E. $\because\angle ABC=120°$, $\therefore\angle BAE=60°$, $BE=\frac{\sqrt{3}}{2}x$、$AE=\frac{x}{2}$, $AD=a-x$,由梯形面积公式,$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x(a-2x+a-x)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}ax$. 又 $x>0$, $a-x>0$ 且 $a-2x>0$,得 $0<x<\frac{a}{2}$,即为定义域. 由 $y=-\frac{3\sqrt{3}}{4}(x-$

$\frac{a}{3})^2+\frac{\sqrt{3}}{12}a^2$ 得 $y\in(0,\frac{\sqrt{3}}{12}a^2]$.

强化题

例 6 某蔬菜基地种植西红柿,由历年市场行情得知,从 2 月 1 日起的 300 天内,西红柿市场售价与上市时间的关系用图 1.3 的一条折线表示;西红柿的种植成本与上市时间的关系用图 1.4 的抛物线段表示.

(1)写出图 1.3 表示的市场售价与时间的函数关系式 $P=f(t)$;

写出图 1.4 表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(t)$.

(2)认定市场售价减去种植成本为纯收益,问何时上市的西红柿纯收益最大?

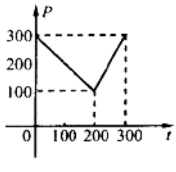


图 1.3

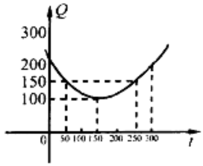


图 1.4

(注:市场售价与种植成本的单位,元/10^2 千克,时间单位:天.)

讲析 (1)$f(t)=\begin{cases}300-t & 0\leqslant t\leqslant 200,\\ 2t-200 & 200<t\leqslant 300,\end{cases}$ $g(t)=\frac{1}{200}(t-150)^2+100,0\leqslant t\leqslant 300$.

(2)当 $t=300$ 时,$h(t)$在区间$(200,300]$上取得最大值 87.5,当 $t=50$ 时,$h(t)$在区间$[0,200]$上取得最大值 100.

由 $100>87.5$ 可知,$h(t)$在区间$[0,300]$上可以取得最大值 100.此时 $t=50$,即从 2 月 1 日起的第 50 天,上市的西红柿纯收益最大.

综合能力通训

一、选择题

1. 设 $f(x)=2x+a,g(x)=\frac{1}{4}(x^2+3)$且 $g[f(x)]=x^2-x+1$,则 a 的值为(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 1 或 -1　　D. 不存在

2. 给出函数 $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^x & x\geqslant 4,\\ f(x+1) & x<4,\end{cases}$ 则 $f(\log_2 3)$的值为(　　).

A. $-\frac{23}{8}$　　B. $\frac{1}{11}$　　C. $\frac{1}{19}$　　D. $\frac{1}{24}$

二、填空题

3. 给出如下三个等式:$f(x+y)=f(x)+f(y)$,$f(xy)=f(x)+f(y)$,$f(xy)=f(x)\cdot f(y)$.对函数 $f(x)=x^2$,$f(x)=3x$,$f(x)=\lg x$,$f(x)=\sin x$,不满足上述三个等量关系中的任何一个的函数是________.

4. 设 $f(x)=1+a_1x+a_3x^3+\cdots+a_{2n-1}x^{2n-1}$($n\in\mathbf{N}$,其中 $a_1,a_3,\cdots,a_{2n-1}$ 为常数),$f(2001)=-2000$,则$f(-2001)=$________.

5. 若函数 $f(x)=(x+a)^3$ 对任意实数 t 都有$f(1+t)=-f(1-t)$,则 $f(2)+f(-2)$的值