全国高等教育自学考试

自学考试
应试诀窍与考前演练

高等数学

（一）

GAO DENG SHU XUE

丁大公 包超兰 编

上海交通大学出版社

全国高等教育自学考试

自学考试
应试诀窍与考前演练

高等数学(一)

丁大公　包超兰　编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书是根据自学考试大纲,结合指定教材编写的应试必备读物。书中针对考试题型,分类讲授了了解出题意图、分析题意和解答方法,同时提供了大量的练习来巩固这些应试能力。是自学考试者的考前演练首选读物,可以作为自学考试辅导的教学参考。

图书在版编目(CIP)数据

自学考试应试诀窍与考前演练.高等数学.1/丁大公,包超兰编.--上海:上海交通大学出版社,2001
ISBN 7-313-02590-4

Ⅰ.自… Ⅱ.①丁…②包… Ⅲ.高等数学 高等教育 自学考试 自学参考资料 Ⅳ.G726.9

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第73027号

自学考试应试诀窍与考前演练

高等数学(一)

丁大公 包超兰 编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路877号 邮政编码200030)

电话:64071208 出版人:张天蔚

上海交通大学印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本:890mm×1240mm 1/32 印张:9.75 字数:280千字

2001年1月第1版 2001年3月第2次印刷

印数:3051~6100

ISBN 7-313-02590-4/G·350 **定价:16.00元**

前　　言

《自学考试应试诀窍与考前演练》是根据国家高等教育自学考试委员会制定的自学考试大纲，结合指定教材编写的一套丛书。丛书的目的是在紧扣知识点的基础上，讲授应试技术，提高考试能力。考场如战场，是一个充满技术拼搏的舞台，掌握知识点是必须的，而临场发挥更是关键一着。本丛书由长期从事自考辅导的教师编写，旨在指导考生掌握出题的意图，寻找解题的突破口，分析做题的思路，并给出大量的实战练习。考生只要认真阅读本书，认真练习，就能在较短时间的训练后，从考试中胜出。

为了提高应试能力，本书的练习不是按照教学的展开而组织内容的，而是针对考题的类型编写的，而且按照试卷出题顺序编排，有助于考生迎考前的实战训练。全书分三大部分：第一部分应试技巧与练习，是全书的重点。编者根据自学考试的要求，对各种类型的考题给出了相应解题的方法和技巧。书中的练习题与考试的题型、范围、难度相一致，并尽可能按知识考核点分类给出，具有典型性和代表性。第二部分为各章节要点，编者对考生必须掌握的一些知识要点、公式、定理等作了概括和总结，有助于考生记忆和运用。第三部分为模拟试卷和历年考卷（包括最新的“2000年（下）全国高等教育自学考试《高等数学（一）（财）》试卷”），提供读者作实战训练。附录给出书中所有练习题的答案、模拟题答案和历年试卷答案。

读者在复习时应该紧扣大纲要求，不要追求难题，偏题，而要强调难度适中。本书始终贯彻这种意图。在使用本书的时候，建议先看第二

部分内容，针对内容提要自问是否真的知道其定义、方法或结论，对不知道部分查教材先行补上，然后再看第一部分与做练习。相信本书的出版，会给广大参加全国高等教育自学考试的考生带来帮助，这是编者的愿望。

编　者

2000 年 10 月

目　　录

第一部分　应试技巧与练习

第二部分　各章节要点

第三部分 试 卷

附录 参考答案

第一部分

应试技巧与练习

历年来高等教育自学考试《高等数学(一)》试卷的特点是题量大、知识点多、覆盖面广。要能顺利通过考试,考生必须认真按照考试大纲的规定,扎扎实实地学好教材中各章节的内容,并在掌握基本概念、基本理论与基本运算的基础上,通过适当的练习,熟悉和掌握各种题型的解题方法。

《高等数学(一)》试卷有单项选择题、计算题、应用题、证明题等四种题型,下面将分别介绍这四种题型的解题方法与技巧。

1 单项选择题

《高等数学(一)》的试卷有 40 道单项选择题,每题一分,占试卷总量的 40%。单项选择题放在试卷的开始部分,所以解题的速度与准确率对考试的成败起着举足轻重的作用。选择题主要考核基本概念、基本定理、基本公式、基本性质等基础知识和基本运算能力。历届试卷的选择题都是单项选择题,四项备选答案中只有一项是正确的。选择题的知识面广,概念性强,备选答案的迷惑性也很大,解答时考生又不能花费太多的时间。但是在给出的选择题四个备选答案中,包含了正确答案。所以考生除了要扎实掌握大纲中涉及的各个知识点外,还要熟练掌握解题的技巧和方法,善于巧用试题中所给出的信息,准确快速地选出正确的答案。

单选题的常用解题方法有直接法、排除法、验证法、特殊值法、图象法等五种,下面分别进行介绍。

1.1 单项选择题应试技巧

1.1.1 直接法

直接法是解选择题常用的方法,是根据题目给出的条件运用概念、定理、公式、法则,通过推理、计算直接得出结论的方法。

例 1 下列极限存在的有 (1998 年上)

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+1)}{x^2}$ (B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2^x-1}$

(C) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$ (D) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$

分析 本题是求极限,可直接计算。

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x+1)}{x^2}=1$，极限存在，(A)正确。由于单选题四个备选答案中有且只有一个是正确的，既然已得出(A)正确的结论，还有三个备选答案就不必花时间再去计算。故应选(A)。

例 2　过曲线 $y=\frac{4+x}{4-x}$ 上一点(2,3)的切线的斜率是　(1993 年上，2000 年上)

(A) -2　　(B) 2　　(C) -1　　(D) 1

分析　本题考核导数的几何意义。

先求出 $y'=\frac{8}{(4-x)^2}$，再以 $x=2$ 代入，得 $y'|_{x=2}=2$。由导数的几何意义 $y'|_{x=2}=2$ 即是点(2,3)的切线的斜率，故选(B)。

例 3　对于函数 $z=xy$，原点(0,0)

(A) 不是驻点　　(B) 是驻点但非极值点

(C) 是驻点且为极大值点　　(D) 是驻点且为极小值点

分析　本题是多元函数的极值问题。

先求出偏导数 $z'_x=y, z'_y=x$，有 $z'_x(0,0)=0, z'_y(0,0)=0$，得(0,0)是驻点。接下来本题不必再用二阶偏导判别(0,0)是否为极值点，可直接由极值的概念得到(0,0)不是极值点。$\because z(0,0)=0$，而在(0,0)周围的点(x,y)中，当 x,y 同号时，$z>0$；当 x,y 异号时，$z<0$。故(0,0)不是极值点，应选(B)。

1.1.2　排除法

根据题设条件与有关数学知识，通过观察、分析、计算排除错误的结论，从而得出正确的结论。

例 4　将半径为 R 的球加热，如果球的半径增加 ΔR，则球的体积增量，即 $\Delta V\approx$　(1991 年上，1993 年上，1994 年下，1998 年上)

(A) $\frac{1}{3}\pi R^3\Delta R$　　(B) $4\pi R^2\Delta R$　　(C) $4\pi R^2$　　(D) $4\pi R\Delta R$

分析　本题考核微分在近似计算中的应用，即 $\Delta V\approx \mathrm{d}V=V'\Delta R$，结果中必须含有 ΔR，排除(C)；又体积必定是 R^3 的函数，其导数必定是 R^2 的函数。排除(A)、(D)，故选(B)。

例 5 $\int \mathrm{d}\arcsin\sqrt{x} = (\quad)$ （1994 年下）

(A) $\arccos\sqrt{x}$　　(B) $\arcsin\sqrt{x}$

(C) $\arcsin\sqrt{x}+C$　　(D) $\arccos\sqrt{x}+C$

分析 本题考核积分与微分的关系。

由于本题是不定积分，其结果必须含有积分常数 C。∴ 排除(A)，(B)。由积分与微分互为逆运算的关系，得(C)成立。故选(C)。

例 6 设 $u = e^{xyz}$，则 $\mathrm{d}u = (\quad)$ （1992 年上，1998 年上）

(A) $yze^{xyz}\mathrm{d}x$　　(B) $xze^{xyz}\mathrm{d}y$

(C) $xye^{xyz}\mathrm{d}z$　　(D) $e^{xyz}(yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z)$

分析 本题考核多元函数全微分。

∵ $u = e^{xyz}$ 是三元函数，它的全微分 $\mathrm{d}u$ 是三个偏微分之和，∴ 否定(A)、(B)、(C)，故选(D)。

由于历届试卷的选择题都是单项选择题，所以如果能排除三个错误的结论，则余下的一个肯定是正确的。

例 7 在下列级数中发散的是 （1999 年上）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^3+1}$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$

分析 本题判别级数的敛散性。

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n} = 3\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 是公比 $q = \frac{1}{2}$ 的等比级数，收敛；(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是交错级数，由莱布尼兹判别法该级数收敛；(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^3+1}$ 是正项级数，与收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 比较，可得该级数收敛。排除(A)(B)(C)，故选(D)。

1.1.3 验证法

验证法是将各个备选答案代入题中验算，判断其是否符合已知条

件，从而选出正确答案。

例 8 当 $x \to 0$ 时，与 $e^{2x}-1$ 等价的无穷小量是 （2000 年上）

(A) x　　(B) $2x$　　(C) $4x$　　(D) x^2

分析 本题考核等价无穷小量的概念。

将备选答案逐个代入检验，

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}\cdot 2}{1}=2$ 否定(A)。

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\cdot 2}{2}=1$$

故选(B)。

例 9 方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=0$ 的通解为 $y=$ （1998 年上）

(A) Cx　　(B) $\dfrac{C}{x}$　　(C) $\dfrac{1}{x}+C$　　(D) $x+C$

分析 本题考核微分方程通解的概念。

将备选答案代入方程中检验。

以(A) $y=Cx$ 代入方程，$\because \dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=(Cx)'-\dfrac{Cx}{x}=0$ 满足方程，故选(A)。

例 10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{5n}$ 的收敛区间是 （1999 年下）

(A) $(0,2)$　　(B) $(0,2]$　　(C) $[0,2)$　　(D) $[0,2]$

分析 本题考核幂级数收敛区间的求法。

由于四个备选答案的区间的端点相同，差别仅在于端点是否包含在区间内，所以只需验证级数在 $x=0$ 及 $x=2$ 点是否收敛。

在 $x=0$ 点，级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot(-1)^n\cdot\dfrac{1}{5n}=-\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散；

在 $x=2$ 点，级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{5n}=\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 收敛，故选(B)。

1.1.4 特殊值法

特殊值法是选择某些特殊值代入题目中的条件，通过验证计算，定

出正确答案的方法。

例 11 若 $f(\sin x)=3-\cos 2x$，则 $f(\cos x)=$ （1995 年上）

(A) $3-\sin 2x$　　(B) $3+\sin 2x$

(C) $3-\cos 2x$　　(D) $3+\cos 2x$

分析 本题考核三角变换，可以用三角公式进行推导。但是若用特殊值法求解则要简便得多。

取 $x=0$ 代入 $f(\sin x)=3-\cos 2x$ 得 $f(0)=2$

$\because f\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)=f(0)=2$ $\therefore$ 以 $x=\frac{\pi}{2}$ 逐一代入备选答案，得(A) 3 (B) 3 (C) 4 (D) 2，故选(D)。

例 12 若 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$ 及函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域是 （1999 年下）

(A) $[-a,1-a]$　　(B) $[-a,1+a]$

(C) $[a,1-a]$　　(D) $[a,1+a]$

分析 本题考核复合函数的定义域。

为了便于选择，由题设条件 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$，取 $a=\frac{1}{4}$，代入 $f(x+a)$ 与 $f(x-a)$

$\because f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$ 即 $0\leqslant x\leqslant 1$

$\therefore f(x+a)=f\left(x+\frac{1}{4}\right)$ $0\leqslant x+\frac{1}{4}\leqslant 1$ 即 $-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}$

$f(x-a)=f\left(x-\frac{1}{4}\right)$ $0\leqslant x-\frac{1}{4}\leqslant 1$ 即 $\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5}{4}$

得 $f\left(x+\frac{1}{4}\right)+f\left(x-\frac{1}{4}\right)$ 的定义域是 $\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}$

$\therefore f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域是 $a\leqslant x\leqslant 1-a$

故选(C)。

例 13 用下面的符号连接表达式：e^x ___ $e\cdot x$，其中 $x>1$ （1998 年上）

(A) $\geqslant$　　(B) $\leqslant$　　(C) $>$　　(D) $<$

分析 本题若用直接法，可利用导数的符号与函数单调性的关系，直接推导出成立的不等式。令 $f(x)=e^x-ex$，求 $f'(x)=e^x-e$。由

$x>1$ 得 $f'(x)>0$，从而 $f(x)$单调上升；又 $f(1)=0$，故当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，从而选(C)。这样推导既化费时间，又因为用到的知识点多，对考生来讲，有一定难度。

而由题设 $x>1$，可选取特殊值 $x=2$ 代入，显然 $e^2>e\cdot 2$，故选(C)。用特殊值法解题，既快又容易得出正确结论。

例 14　$\arcsin x+\arccos x=$（　　）　(1995 年上)

(A) 0　　(B) $\frac{\pi}{2}$　　(C) π　　(D) 2π

分析　本题是三角函数中的一个公式：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$，故选(B)。

若考生对这个公式不熟悉，则可用特殊值法。只需取 $x=0$ 代入，由 $\arcsin 0+\arccos 0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$，得正确答案是(B)。

1.1.5　图象法

由题设画出有关函数的图象，然后观察图象，得出结论。

例 15　下列函数中在$(0,+\infty)$内单调下降的函数是

(A) $y=\cos x$　(B) $y=\ln x$　(C) $y=e^x$　(D) $y=\frac{1}{x}$

分析　本题考核基本初等函数的图象与性质。

这四个函数都是基本初等函数，只需画出它们的图象，由图象马上可以得出结论。

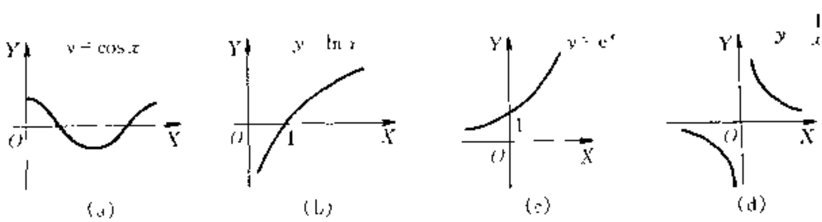


图 1.1

应选(D)。

例 16　函数 $y=x^2-1$ 在区间$[-1,1]$上的最大值是　(1999 年

下）

（A）0　　　（B）1

（C）2　　　（D）不存在

分析　本题考核函数的最值。

画出函数 $y=x^3$ 在$[-1,1]$上的图象，然后沿 Y 轴向下平移 1 个单位得 $y=x^3-1$ 的图象，显然它在$[-1,1]$取最大值 0。故选(A)。

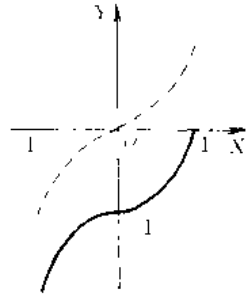


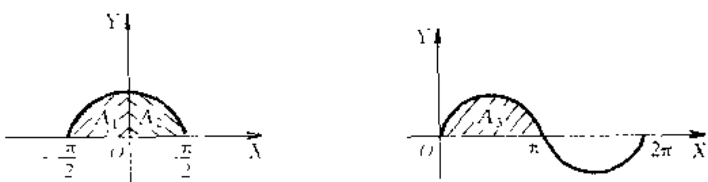
图 1.2

例 17　根据定积分的几何意义，下列各式中正确的是　(1998 年下)

(A) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos x\,\mathrm{d}x<\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x$　(B) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos x\,\mathrm{d}x>\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x$

(C) $\int_{0}^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=0$　　(D) $\int_{0}^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=0$

分析　本题考核定积分的几何意义。先作出 $y=\cos x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的图象，见图 1.3(a)。显然面积 $A_1=A_2$。由定积分的几何意义，有



(a)　　(b)

图 1.3

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos x\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x$，否定(A)，(B)。

再作出 $y=\sin x$ 在$[0,2\pi]$的图象，见图 1.3(b)。有

$\int_{0}^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=A_3$ 的面积 >0，否定(C)。故选(D)。

以上介绍的是解答单选题的常用方法。由于单选题在给出错误答案的同时，也给出了正确答案，所以解题时要灵活思考，充分利用题目

给出的信息和学过的知识，采用适当的方法快速地选出正确答案。至于采用何种方法解题，具体情况要具体分析。实际解题时，常常不是单独使用某一种方法，而是将几种方法综合起来使用。一般解单选题分为三步进行。

第一步，看清题目考核的是基本概念、基本定理，还是计算能力。属于哪一部分的内容？

第二步，浏览供选择的答案，删去明显错误的和与题无关的备选项，缩小选择范围。

第三步，比较剩余的选择项，用上述介绍的方法确定正确的答案。

下面再看几个例子：

例 18 设 $x=\ln\frac{z}{y}$ 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ （1999 年上）

(A) 1　　(B) e^x　　(C) ye^x　　(D) y

分析 本题考核求偏导数。

本题给出的函数 $x=\ln\frac{z}{y}$ 是隐函数，所以求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 可用隐函数求导法。但是从 $x=\ln\frac{z}{y}$ 很容易解得 $z=ye^x$，显然马上可得 $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^x$，故选(C)。

显然，采用这种解法比用隐函数求导法简单。

例 19 微分方程 $y\ln x\mathrm{d}x=x\ln y\mathrm{d}y$ 满足 $y|_{x=1}=1$ 的特解是（1994 年下）

(A) $\ln^2x+\ln^2y=0$　　(B) $\ln^2x+\ln^2y=1$

(C) $\ln^2x=\ln^2y$　　(D) $\ln^2x=\ln^2y+1$

分析 本题考核微分方程的特解。

采用排除法与验证法相结合。先将初始条件 $y|_{x=1}=1$ 代入备选答案中验证，得出(A)、(C)满足，(B)、(D)不满足，排除了(B)、(D)。然后再将(A)代入微分方程检验。由(A)得 $2\ln x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x+2\ln y\cdot\frac{1}{y}\mathrm{d}y=0$ 显然不满足微分方程，排除(A)，故选(C)。

例 20 用区间表示满足不等式 $|x|>|x-2|$ 所有 x 的集合是（1995 年下）