名著翻译

非线性边值问题的一些解法

〔法〕Lions, J. L 著

郭柏灵　汪礼礽译

中山大学出版社

非线性边值问题的一些解法

[法]J. L. Lions 著
郭柏灵　汪礼礽译

中山大学出版社

ETUDES MATHEMATIQUES

COLLECTION DIRIGEE PAR P. LELONG

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

Quelques méthodes de résolution

des problèmes aux limites non linéaires

J. L. LIONS

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

Professeur à l' Ecole Polytechnique

DUNOD GAUTHIER-VILLARS

Paris

1969

非线性边值问题的一些解法

[法]J. L. Lions 著

郭柏灵 汪礼礽译

中山大学出版社出版发行

广东省新华书店经销

南海系列印刷公司印刷

850×1168毫米 32开本 18.75印张 52万字

1992年3月第1版 1992年3月第1次印刷

印数：1—1000册

ISBN7-306-00252-X

O·18 定价：18.80元

内容简介

本书全面总结并发展了非线性偏微分方程边值问题的一些解法，主要内容是非线性问题的解法和变分不等式理论。书中详细介绍了紧致法、单调性方法、正则化方法、惩罚法和迭代法，完整论述了解的存在性、唯一性和光滑性。变分不等式推广了原来方程的性质，是现代控制论的一个重要工具，也是偏微分方程现论中一个新分支。

书中包括许多先验估计的途径和技巧，以一章篇幅介绍来源于致值分析的迭代法，还举出不少最优控制理论的精彩例子。每章附有问题，书末附有参考文献。

本书可供大学数学专业、应用数学专业和计算数学专业的研究生作教材，也可供大学有关专业学生、教师、科技工作者使用。

中译版序

法国著名数学家 J. L. Lions 教授所写的"非线性边值问题的一些解法"一书是偏微分方程理论中有关非线性问题解法和变分不等式理论的一本名著，它以内容丰富、思想清晰、深入浅出、言简意深等显著的特点深受我国偏微分方程研究工作者的喜爱. 该书发展了非线性问题的许多解法，书中所述的许多结果是属于作者本人和他的学生的. 正因为如此，该书的叙述是十分清晰和明确的，强调地有时甚至是提纲式地提出问题，指出解决问题的基本思想，证明定理的各个原则步骤，以及各种不同方法对同一问题不同处理的比较. 在每章末尾还附有与书中所考察问题相接近的尚未解决的问题，以及关于参考文献的评述. 虽然这本书自从 1969 年第一次出版以来迄今已经二十年了，然而它处理非线性问题的思想和方法至今还留有深刻的影响和发挥巨大的作用. 我们希望这本书中译版的问世，将对我国非线性偏微分方程及其有关领域的研究有所俾益. 鉴于译者的水平所限，书中的翻译难免出现一些错误和不当之处，所有这些均恳请读者批评指正. 这本书虽然早已译好，由于种种原因至今才得以和读者见面，这里我们要特别感谢周毓麟、孙和生、李大潜诸教授对此书出版中译本的热情支持和鼓励，也要感谢中山大学出版社的同志们的大力支持和帮助，他们为此书的出版耗费了大量的时间和精力.

译　　者

1989 年 10 月 1 日于北京.

俄译本编者序

本书作者是著名的法国数学家 J. L. Lions，他是巴黎大学数值分析实验室和信息与自动化研究所数学部的负责人，在解决与偏微分方程和最优控制问题有关的应用问题方面作出了巨大贡献。

本书论述偏微分方程理论中两个重要分支——非线性问题的解法和变分不等式理论。书中所述的大部分结果是作者与他的学生们得到的。

作者采用流体力学，塑性理论和其他连续介质力学分支，还有量子力学和物理学方面的各种典型方程作为例子来叙述解非线性问题的方法。一般的讨论过程为：构造问题的近似解，作出近似解的先验估计，在此基础上证明存在收敛于精确解的近似解序列。对于某些问题，利用补充的先验估计，在资料足够光滑的情况下确定了解的光滑性。应该指出，用这种方式在具体的数学物理方程上得到的结果，不仅引出了非线性问题的解法，而且在应用上也很有意义。

许多重要的应用问题导致所谓单向边值条件问题或变分不等式。这类问题中最简单的例子是以下问题：在以 Γ 为边界的区域 Ω 内，求方程 $\Delta u=f$ 的解 u，使它在 Γ 上满足边界条件 $u\geqslant 0$，$\frac{\partial u}{\partial \nu}\geqslant 0$，$u\frac{\partial u}{\partial \nu}\geqslant 0$。这个问题的广义解满足的不是积分恒等式（如同 Dirichlet 问题那样），而是满足某个积分不等式，这种积分不等式称为变分不等式。

作为偏微分方程理论新分支的变分不等式理论是最近十年中

产生的，还没有专著综述过它的成果。此理论的创建，最初是为了求解弹性理论中的问题（Signorini 问题），它最早在 G. Fichera [1]的工作中被全面地研究过，该工作奠定了变分不等式理论的基础。此后，J. L. Lions，G. Stampacchia 及其学生们继续从事这方面的工作。特别是，他们考察了导致变分不等式的各种问题的抽象提法。

虽然本书中各种方法的运用在多数情况下都是通过个别例子表现出来，但这些方法具有很大的普遍性，可以应用于更广泛的某些类型的非线性问题。

第一章研究的各种问题（相对论量子力学中的方程，非线性振动方程，Navier-Stokes 方程，Schrödinger 方程，非定常渗流方程等等）中，近似解是根据 Galërkin 方法或 Faedo-Galërkin 方法（在非定常情况下）构造的。然后，对近似解建立能量不等式型的先验估计，并在此基础上借助 Соболев 嵌入定理证明所得到的近似解序列的紧致性。

在第二章里，根据相应算子的单调性或拟单调性证明近似解序列的收敛性。当存在单调性时，容许在较弱的（与嵌入定理的条件相比较）先验估计条件下证明近似解序列的收敛性。在这一章里还证明了具有单调性的抽象算子方程的存在定理，并给出了这些定理在具体的数学物理方程上的应用（特别是自由边界问题）。

第三章给出了许多应用正则化方法的例子。所谓正则化方法就是在方程或边界条件中添上带有小参数 ε 的算子，使当 $\varepsilon>0$时可以得到已被很好研究过的可解的问题。然后对这些问题的解建立关于 ε 的一致性估计，并在此基础上取 $\varepsilon\to0$的极限。正则化方法有时也称为入工粘性法。von Neumann J.，Richtmer R. 在工作

[1]中曾对这一方法的使用作过巨大的推动，在他们的工作中，小的人工粘性被引入气体动力学方程组，以便对方程组进行数值解。正则化方法对于构造退化方程的解（参见 Олейник О. А. 和 Радкевич Е. В：Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой，Итоги Науки，ВИНИТИ，1971г.）①，以及构造非线性双曲型方程的间断解（见 Олейник О. А. [1]）也具有重要意义。

Courant R. 在经典变分法问题中引入的“Strafe”法容许将变分不等式问题归结为微分方程问题。这个方法就是在泛函中添加这样一个带参数的项，使在闭凸集中的泛函最小值问题化为新的整个空间上的泛函最小值问题。

在第四章里，通过在一系列具体问题以及某些类型的算子方程上的应用，叙述了有限差分法和 Rothe 方法（半离散化法）；以求解 Carleman 方程组为例，叙述了分裂法（或分数步长法）。某些问题，例如 Navier-Stokes 方程问题，在全书各章中都作了阐述。

在每章结尾，附有与书中所考察的问题接近的尚未解决的问题以及关于参考文献的评述，评述中还指出了本书采用的文献来源。

值得指出的是，本书的叙述是十分清晰和明确的：书中突出了所有基本思想，定理证明中的每个主要步骤都列成单独的小节。书中言简意明，提纲挈领，选材广泛，思想丰富，这些都是本书的特点。

本书的读者应当熟悉泛函分析的基本概念和了解 Соболев 空间上的嵌入定理。这些定理的论述可以在 С. Соболев [1]和 С. М.

---

① 有英译本——原文或译者注（下同）。

Никольский 的著作（Приближение функций многих переменных и теоремы вложения，Наука，1969）① 的著作中找到，也可参见不久前出版的 Lions J. L. 和 Magenes E. [1]一书的俄译本。

本书乃是从事偏微分方程理论研究、应用研究和数值解法研究的数学工作者的一本极有价值的参考书。而力学和物理学工作者无疑地也能从本书中得到他们感兴趣的东西。

本书俄译本的问世，定能有力地促进应用数学领域中一直是困难的而又重要的非线性边值问题理论的研究。

O. A. Олейник

① 有英译本.

序言

1. 本书发展了非线性微分方程边值问题的某些解法.

本书内的研究方法(不是包罗万象的)是与具体例子一起引进的,这些具体例子主要是:

1° 力学和物理学中的古典非线性边值问题:Navier—Stokes 方程,板的非线性振动,量子力学中的方程等等;

2° 与强制变分问题有关的非线性边值问题,包括力学(塑性,单侧联结等等)中的变分不等式问题和最优控制问题.

求解这些问题的基本步骤为:

a) 推导先验估计;

b) 利用这些估计.

2. 目前还不存在推导先验估计的一般方法(特别是因为在非线性问题中利用 Fourier 变换是不可能的).

最简单的先验估计起源于物理定律. 先验估计一般是这样建立起来的:将所求解方程乘以未知函数后进行线性迭加,然后适当地运用分部积分.

在推导"补充的"先验估计时,可将所求解方程乘以未知函数的非线性表达式,参见第三章 § 4 Kdv 方程.

利用分裂法(从数值分析得到启发的一种方法)也可得到足够精确的先验估计,参见第四章 § 2 Carleman 方程.

一般说来,在先验估计问题上(或者在选择我们所要求解问题的函数空间问题上,这个问题在不同程度上也归结为先验估计问题),线性问题和非线性问题是有本质区别的. 在线性问题中,对于

已知的绝大多数情况，存在着无限多的先验估计①，但对于非线性问题，一般只有极少数能建立起先验估计②.

这一困难同样存在于光滑性问题中：即能够证明所研究的非线性问题在某个泛函集合中是适定的，下述论断一般还是不能成立：只要给定问题的数据很光滑，解也必定是很光滑的.

这样，选择合适的可以求解问题的泛函空间就起着绝对重要的作用③.

3. 泛函框架选定之后，为了求解问题必须利用先验估计.

我们将方法分成以下几种：

(i) 紧致法；

(ii) 单调法；

(iii) 正规法；

(iv) Strafe 法；

(v) 迭代近似法.

当然，在某些情况下，也可以同时使用几种方法.

方法(i)　(第一章)

所谓紧致法是使用中最直接的方法.

1) 利用 Galerkin 方法(定常情况)或 Faedo—Galerkin 方法(非定常情况)将问题简化为有限维情况，并构造近似解(或者，至少我们希望将其成为近似解)；近似解的存在性可利用下列定理加以证明：

---

① 注意，如果在求解过程中已经得到两个估计的话，则在线性问题中根据非线性拓扑空间的插值理论就能得到无限多个先验估计.

② 目前除了相当少数特殊情况以外，我们在非线性问题中还不能利用插值方法，也许应当发展非线性泛函类的非线性插值理论.

③ 当然，没有任何理由限制在向量空间内；在第一章 § 3.2，第四章 § 1.3 中会遇到这样的例子，实际上我们在非线性泛函类中进行工作

不动点定理(定常情况);

常微分方程组解的存在定理(发展情况).

2) 接着取空间维数趋于无穷大时的极限. 这时,必须克服一个基本困难:我们使用的非线性算子一般不是弱连续的,因此,需要证明(一般说,其理由详见方法(ii))近似解序列在适当的强拓扑中(在其中我们的算子为连续)是紧致的(由于先验估计). 这里所利用的基本工具为 α 阶 Соболев 空间嵌入低于 α 价的 Соболев 空间的紧致性定理,以及第一章 § 5 和 § 12.2 中所列举的较特殊的结果.

方法(ii) (第二章)

当算子具的单调性(类似于 Banach 空间可微凸函数的微分性质)时,在先验估计较弱(与紧致法所要求的先验估计相比)时,即可取空间维数趋于无穷大时的极限.

就此而言,单调比紧致法简单.

另外,正是在单调法适用的范围内可以研究"变分不等式"(见 i(2°));方程所满足的许多性质都可以推广到(也许会在意料之外)这些变分不等式.

方法(iii) (第三章)

在方法(i)中和(ii)中近似解是用同一方法求得的(基本上用 Galërkin 方法),然后再取极限,或者利用紧致性,或者利用单调性(或者混合使用两种方法,参见第二章 § 5).

在方法(iii),(iv),(v)中改变了逼近的方式,然后在取极限时再利用紧致性和单调性.

在方法(iii)中,先将方程正则化,即用"最佳的"和已经解决的方程去"逼近"要求解的方程.

正则化方法包括粘性法,椭圆正则化和抛物正则化.

这里我们显然遇到了非线性问题所固有的另一种困难——明显的不稳定性：本来认为是"很小"的项可能根本改变形势. 因此，必须注意正确选择正则化项；相当一般的例子放在第三章中.

方法(iv) （第三章）

"Strafe"法(来源于变分计算并与正则化方法有联系)可以归结为用其他方法已解决的和较为经典性质的非线性方程逼近变分不等式. "Strafe"法还可用于求非圆柱型区域的发展问题.

方法(v) （第四章）

迭代逼近法主要产生于数值分析[①]中，我们指出以下几种迭代方法：

1）逐次逼近法，牛顿法；这里又是空间的选择具有决定意义；

2）离散化方法(有限差分法)；

3）分裂法.

我们将列举可以用迭代法求解的问题的若干例子，(在我们看来)，这些问题用上面的方法是不可能解决的.

4. 应该强调的是，上面各种逼近方法是互不等价的.

事实上，先验估计是对给定方程建立的，要求选择这样的逼近方法，它容许对近似方程至少得到与对原始问题同样多[②]的先验估计[③].

总之要明确，为求解原始问题，必须

1）选择泛函空间，

2）选择近似方法，

---

① 这里不作系统研究

② 对于某些情况(见第四章 § 2 分裂法)利用近似方程组可以得到更多的估计

③ 我们指出，为此甚至在某一方法范围内也需要运用特殊的工具，参见 Faedo－Galërkin 方法中的"专门基"(第一章)

3）取极限.

5. 上面给出的方法适合于证明解的存在性.解的唯一性的证明(当唯一性成立时)需要相当特殊的技巧,我们将列举几个这方面的例子.

即使在问题已经是适定的较好情况下,还会出现一系列其他问题,特别是光滑性问题:当问题的资料的"光滑性"提高时,解的"光滑性"是否也提高?

如上所述,一般说,下述论断不能成立:问题的资料的 C^∞ 光滑性导致解的 C^∞ 光滑性(但书中也有一些例子,表明有时候此论断可以成立).然而在许多情况下,如果给定问题的资料属于函数类 Y 时,非线性问题的解属于函数类 X,则存在相应的函数类的子集 X_s,Y_s,使得当问题的资料属于 Y_s 时,问题必定在 X_s 内适定.在很特殊的情况下得以运用内插理论.或许在这方向上可以有较大的发展.

对于发展型方程,某些光滑性质可以利用线性半群理论来建立.

在与发展型方程有关的定性问题中,我们将考察以下问题:

研究时间周期解(第二章§7.4;第四章§6和§7);研究整个时间轴上有界的解(第四章§8);这一问题与我们所研究的拟周期解(关于拟周期解的理论,我们推荐 Amerio L., Prouse 的书[1])有关①.

6. 当然,如此广泛的非线性问题的许多方面在本书正文中都未讨论,而只在评述中略提一笔,以便与正文中所考察的问题加以

---

① 参见 Levitan B. M. & Zhikov. V, Almost periodic function and diff. eq. 1982 英译本—— 校者注.

对照.我们特别指出以下几点：

变分学在 Hölder 空间上椭圆型方程的 Leray—Schauder 经典理论方面应用的详细研究(详见 Ладыженская 和 Уральцева[1], Miranda啊 C. [1]Morrey C. B. [1]等著作及其中所引文献)；

非线性双曲型方程和冲击波理论(参见 Рождественский 和 Яненко[1]及其中所引用文献)；

“整体”分析的应用,特别是在非线性特征值问题方面的应用(参见 Browder F. E. [9])；

稳定性问题,该问题(期待着运用拓扑工具向它多方位的冲击)目前只有一些零散的结果.

我们没有考察(除几个非常特殊的例子外)多值算子方面的应用,这一问题可参见 Browder F. E. [7].

关于最优控制的非线性问题,也只有很短的注记(第四章§9).

7. 应用(流体和固体力学,最优控制等等)是问题的源泉,这一源泉几乎是不可穷尽的,甚至是不断扩大的(特别是由于电子计算机研究日益复杂模型的可能性);大量这类问题还没有解决,其中一部份列举于每章的结尾.

由于应用的多样性和问题的大量和广泛,同时由于这些问题相对于“小”变化的不稳定性,我们觉得,将方程按类型分类是不切实际的,因此,我们主张按方法分类.

书末给出了方程类型的索引,注明所在章节,在这些章节中用各种不同的方法考察了相应类型的方程.

8. 本书原是 1968—1969 学年我在巴黎自然科学系主讲的第三轮讲座的教程.我深切感谢 Bardoc, C. , Brezis, H. Raviart, P. A. , Tartar, L. 和 Temam, R. ,他们帮助我在形式和内容上改进

了一系列问题的叙述.

我还感谢 F. Boutan 和 W. Miller，他们作了讲座的记录；感谢讲座的听众，正是他们对讲座的兴趣促使我将讲稿整理成书出版.

我特别感谢 P. Lelog，他慷慨答应将本书编入他主持出版的丛书.

我非常感谢 Poincaré 研究所数学部秘书处和 DUNOD 出版社为本书出版所做的杰出的工作.

9. 书末列出基本符号，方程类型索引和详细目录.

每章开头都有一个简短的一般方向性的指示，初读时可将其略去.

文献指南都列在每章结尾的评述中.

目　　录