集群无线通信系统
话务工程计算机模拟

冯锡生 赵冬梅 张维钢 著

中 国 铁 道 出 版 社

集群无线通信系统话务工程计算机模拟

集群无线通信系统话务工程计算机模拟

冯锡生　赵冬梅　张维钢　著

中　国　铁　道　出　版　社

1994 年 · 北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书是集群无线通信系统话务工程计算机模拟的学术专著。它采用计算机模拟的方法来研究集群无线通信系统的话务问题，省去了传统方法的繁琐理论分析和计算。书中选用编写程序简单、调试方便及自动统计模拟结果的 GPSS 离散系统模拟语言对集群无线通信系统进行了话务模拟，得出了集中控制式、分布控制式集群无线通信系统的话务特性，重点分析了集群无线通信有线电话互联系统的话务性能，并给出了大量的具体模拟结果。

为了验证这一方法的正确性和实用性，书中从几个方面进行了论证。第一，用 GPSS 模拟有线电话系统，所得结果与有线电话话务理论计算结果相一致。第二，将集群无线通信系统中某典型调度呼叫模拟结果与美国 Motorola 公司提出的话务负荷曲线做了比较，结论相吻合。此外，书中还从理论上求证了计算机话务模拟结果的置信度。所有研究结果证明：应用 GPSS 对集群无线通信系统话务问题进行模拟是有效的和可靠的。

本书可供从事无线通信和有线通信的工程技术人员学习参考，亦可供高等学校通信专业师生选用。

集群无线通信系统话务工程计算机模拟
冯锡生　赵冬梅　张维钢　著
*
中国铁道出版社出版、发行
（北京市东单三条 14 号）
责任编辑　郭　宇　封面设计　王毓平
各 地 新 华 书 店 经 售
中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 毫米 1/16　印张：10.5　字数：268 千
1994 年 2 月　第 1 版　第 1 次印刷
印数：1－3000 册

ISBN7－113－01718－5/TP・174　定价：11.60 元

前　言

话务工程是通信中的重要内容。它涉及到整个通信系统的设备数量、业务处理能力、服务质量及设备利用程度等诸多方面的联系。研究通信系统的话务问题，从理论上搞清系统中的各种业务关系，可以有效地指导实际工作，达到经济、合理、高质量地设计和利用通信系统的目的。

集群无线通信系统是近年来无线通信领域发展非常迅速的一种通信制式，其应用已越来越广。在我国，正在运行的集群无线通信系统已有近百个，实践中提出许多相关问题迫切需要解决，其中很重要的一个就是话务问题。要想使有限的集群无线通信设备为尽可能多的用户提供最好的服务，需要研究集群无线通信系统的话务问题。

但是，目前对于集群无线通信系统话务问题的认识还不够深入，在工程实践中多用有线电话的话务理论来近似地估算集群无线通信系统的话务问题。不容置疑，集群无线通信系统与有线通信系统在话务方面有许多共同之处，而且基于爱尔兰公式之上的有线电话话务理论已比较成熟。但是，必须看到，集群无线通信系统有其自身的特点。一方面，由于集群无线通信系统并不能很好地满足有线电话话务理论的前提条件，因而也就不能直接借用有线电话话务理论的结果。另一方面，由于集群无线通信系统的灵活性和复杂性，使用数学推导的方法研究其话务问题也较为困难。

计算机模拟是研究复杂系统运行特性的一种新型方法，它省去了繁琐的理论分析和计算。使用计算机对真实系统的运行进行模拟，不仅可以得到与真实系统的实际运行特性近似的结果，还可以比实际系统的运行节省大量的时间、人力和物力。因此，我们选择了计算机模拟的方法来解决集群无线通信系统的话务问题。显然，它是研究集群无线通信系统话务问题较理想的方法。

对用户的呼叫进行服务的集群无线通信系统，可以看作是一个离散的随机服务系统，因此本书用专用的离散系统模拟语言 GPSS(General Purpose Simulation System)对集群无线通信系统进行话务模拟。这一方法当然也适用于有线电话系统。使用 GPSS 可以较方便地模拟随机服务系统，具有编写程序简单、易调试及自动统计模拟结果等优点。

为了验证这一方法的正确性，我们进行了几个方面的工作：第一，用 GPSS 模拟了有线电话系统，包括全利用度线束呼损系统、全利用度线束等待系统以及部分利用度线束系统，所得结果与有线电话话务理论计算结果相比较是一致的。第二，对典型调度呼叫进行了模拟，其结果与 Motorola 公司给出的话务负荷曲线作了比较，结论相一致。

本书第 1 章对集群无线通信系统话务工程的基本概念作了简要介绍，并对全利用度线束呼损系统、全利用度线束等待系统及部分利用度线束的理论进行了讨论，提出了集群无线通信系统的话务问题。第 2 章对 GPSS 模拟语言的特点作了概要说明，并结合集群无线通信系统话务工程的实际应用讲述了 GPSS 模拟语言解决该问题的有效性及可靠性。第 3 章对使用 GPSS 模拟语言模拟有线通信系统话务问题的结果与有线电话话务理论计算结果进行了比较。结论是，两者的结果相吻合。第 4 章对集群无线通信系统中的典型调度呼叫进行了模拟，其结果与当今世界先进水平的 Motorola 公司给出的话务负荷曲线作了比较，结论相一致。同时本章还对集中控制式、分布控制式集群无线通信系统的话务问题进行了研究和分析。第 5 章是本书的重点，给出了我们对集群无线通信有线电话互联系统话务问题的研究结果，以及实际模拟结果。此外，本书第 2 章还从理论上求得了计算机话务模拟结果的置信度。所有这些工作，都从不同的侧面证明：应用 GPSS 对集群无线通信系统

话务问题、有线电话系统话务问题进行模拟是有效的和可靠的。

本书用GPSS离散系统模拟语言对集群无线通信系统的话务问题进行了研究，并得出相应结论。应该说明，使用其它方法，例如，利用有限话源的随机排队模型也可望得到对这一问题的分析结果。

就话务模拟而言，本书对集群无线通信系统话务问题的研究还有待进一步深入，例如：

1. 信令信道的特性及其对系统话务性能的影响；

2. 集群无线通信系统信道分配方案对整个系统话务性能的影响；

3. 集群无线通信系统用户的分组、分群方案以及负载的不平衡性对系统话务特性的影响；

4. 多区制集群无线通信系统的话务模拟。

GPSS离散系统模拟语言还可应用于各种信息传递系统服务性能指标的研究。

为了深入开展上述工作，中创广东科技设备租赁公司北京公司在财力、物力上给予了大力支持和热情帮助，并在出版本书过程中给予了支援。在此，我们表示深深的谢意。

集群无线通信系统话务问题的研究还需要向更深和更广处发展。我们把近年来在集群无线通信系统话务工程方面的工作编著成册，目的在于获得更多专家和同行的指导和帮助，进一步深入这方面的研究工作。

非常感谢景东海、杨吉详、赵晓林、赵金勇等同志，他们为集群无线通信系统话务模拟工作和本书的出版提供了大量的帮助。

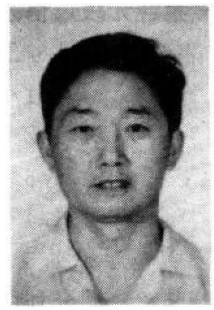
限于作者水平，本书难免有不妥和错误之处，请读者不吝指正。

作　者

1993年10月

出版者的话

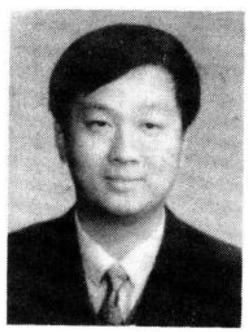
本书作者——冯锡生，北方交通大学通信与控制工程系副教授，1961 年毕业于北方交通大学。毕业后，一直从事无线通信的教学与科研工作，曾先后发表学术论文 30 余篇，学术专著 5 部，完成科研课题 20 余项，多次获得交通部、铁道部、国家教委及北京市科技进步奖。



在集群无线通信系统方面先后参加了“国务院专用移动通信系统”和“北京市政府无线集群调度通信系统”等重大工程项目，是“国务院专用移动通信系统”工程主设计者之一。在“800MHz 集群通信系统天线”的研究上获得北京市科技进步奖。在集群无线通信系统话务工程的研究方面取得了新进展，受到同行专家的肯定与好评。

本书作者——赵冬梅，1992 年毕业于北方交通大学通信与控制工程系，毕业前后一直从事集群无线通信系统话务工程计算机模拟工作。在集群无线通信有线电话互联系统话务模拟方面作了大量分析论证工作，其成果已在“国务院专用移动通信系统”工程设计中应用。

本书作者——张维钢，国务院办公厅高级工程师，1982 年初毕业于北京航空学院(现北京航空航天大学)，曾先后负责组建并完成了“国务院办公厅主计算机系统”和“国务院专用移动通信系统”两大系统工程项目，多次获国家级和部级科技进步奖。



本书作者在集群无线通信系统话务工程方面进行了卓有成效的工作，应用 GPSS 对集群无线通信系统话务问题进行大量模拟和分析，并对此方法作了科学论证。结论是：用 GPSS 模拟有线电话系统，包括全利用度线束呼损系统、全利用度线束等待系统以及部分利用度线束系统，所得结果与有线电话话务理论计算结果相比较是一致的；用 GPSS 对集群无线通信系统典型调度呼叫模拟的结果与美国 Motorola 公司给出的话务负荷曲线作了比较，结论相一致。他们在集群无线通信有线电话互联系统话务模拟方面取得的科研成果具有领先水平。

目　　录

1　集群无线通信系统话务工程

1.1　话务工程中的基本概念

电话交换系统、计算机网络、电报及数据通信网络的一个共同特点是：系统的设备为随机到来的信息流进行服务，这个随机服务过程就是话务工程研究的对象。研究随机到来的信息流、系统的服务设备及其服务质量、负荷能力之间的关系是话务工程所研究的基本内容。通过对这些关系的研究使得在实际中能够设计经济有效的服务系统，达到所要求的服务质量和话务负荷能力，是话务工程所研究的目的。

1.1.1　电话服务系统介绍

在研究电话服务系统之前，必须首先明确以下条件：

1. 呼叫到达系统的情况；
2. 服务系统对每个呼叫提供服务所花去的时间；
3. 系统提供服务的规则。

在电话服务系统(包括无线和有线)中，呼叫归根到底是由用户所发起的，这里的用户叫做话源，或负载源。广而言之，这里的呼叫也可以是数据通信网络中的一串数据，或者是计算机通信网络中的一串信息。在话务工程中，把由用户发起的呼叫所组成的序列叫做呼叫流。呼叫到达系统的情况通常可以用两个连续到达的呼叫之间的时间间隔来表示，简称呼叫到达时间间隔或到达间隔。它也可以用单位时间内平均到达的呼叫个数来表示，叫做到达率。到达率是到达间隔平均值的倒数。把呼叫到达间隔为常数或确定值的呼叫流叫做确定性呼叫流。如果呼叫到达间隔是随机的，这种呼叫流叫做随机性呼叫流。在话务工程中，所研究的主要是随机性呼叫流。广义地讲，确定性呼叫流也是随机性呼叫流的一种。

服务系统对每个呼叫提供服务所花的时间叫做这个呼叫的服务时长。一般情况下，对于每个呼叫要服务多长时间事先是无法确定的，所以呼叫服务时长是随机的，通常用服务时间长度的分布来表示。服务时间的平均值(即平均服务时间)的倒数叫做“服务率”。它是服务台被占用期间单位时间内可以完成呼叫的平均次数。

电话服务系统所提供的最基本的规则服务有两种：呼损制和等待制。呼损制，又叫明显损失制。在这种服务系统中，呼叫到达系统要求服务时，如果系统中所有的服务设备都忙，则该次呼叫就被排除在系统之外，用户只能挂机或重拨。在等待制服务系统中，呼叫到达系统要求服务时，如果系统中所有的服务设备都忙，用户不必挂机，而是排入一个等待队列等候，一旦系统中有空闲设备，立刻为等候的呼叫服务。

1.1.2　话　务　量

电话服务系统提供给呼叫的是服务时间。反过来，呼叫要求电话服务系统给予其某个服务时长，也就是呼叫流对电话服务系统造成一种负荷。这种负荷叫做话务负载。它的实质是时间。

由以上的分析可以知道，呼叫到达率越高，呼叫的平均服务时长越长，呼叫对服务系统造成的负荷就越大。因而，用呼叫平均服务时长与呼叫到达率的乘积来表示话务负载的大小，叫做话务量。

在呼损制系统中，一部分呼叫得到了系统的服务，而其他部分呼叫并没有得到服务。在等待制系统中，理论上所有的呼叫都得到服务。事实上，用户所要求系统为之服务的话务量与系统实际所能够完成服务的话务量之间是有区别的。前者叫做流入话务量，后者叫做完成话务量。

流入话务量是用来描述用户对系统的话务要求的，与衡量话务量的大小一致。流入话务量用单位时间内发起的所有呼叫所要求系统服务的累计服务时长表示。完成话务量用来描述服务系统的繁忙程度和负荷能力，它是单位时间内系统中所有的服务设备占用时间的总和。完成话务量是服务系统实际上完成服务的那部分话务量。流入话务量与完成话务量之间的差值叫做损失话务量。

话务量单位应用最普遍的是“爱尔兰”，用字母 e 表示。如果在一小时内，一个服务设备（如一条电话线或一个无线信道）被占用的时间是一小时，则它的完成话务量就是 1e；同理，如果在一小时内，一个服务设备被占用的时间是 0.5 小时，则它的完成话务量是 0.5e。也就是说，系统的一个服务设备（如一条电话线或一个无线信道）的最大完成话务量是 1e。

话务量具有可加性，一个系统中所有服务设备的完成话务量等于它们各自完成话务量的总和；同理，一个系统总的流入话务量也等于各部分流入话务量的总和。

完成话务量（以 e 为单位）的另一种定义是它等于系统中同时占用设备数的期望值。

损失话务量与流入话务量的比值叫做系统的呼损。它表示系统中得不到服务的那部分话务量占流入话务量的比例。造成呼叫损失的原因很多，如用户的拨号错误、交换设备的接续错误等都会引起呼叫损失。在呼损制系统中，造成呼叫损失的主要原因是由于系统服务设备忙。因此，在呼损制系统中用呼损值的大小来衡量系统的服务质量。系统的呼损值越大，表明其服务质量越差，相反，呼损值越小，其服务质量越好。

话务负载具有随机性。这是因为每次呼叫何时发起完全是随机的，而每次随机发起的呼叫所要求的服务时长也是随机的。因而话务负载是个随机过程。话务负载还具有波动性，也即一年中的不同天或一天中的不同时间段其话务负载一般不同。另外，话务负载在波动的同时还具有一定的周期性。话务负载波动的周期性与人们日常生活习惯的周期性有某种对应关系。一般来说，白天的话务负载要大于夜间。把一天中话务负载出现峰值的那个时间段（通常取一小时）叫做繁忙小时，简称忙时。电话服务系统要根据忙时话务量进行设计。

1.1.3 系统的服务质量特性

在等待制服务系统中，如果系统中所有的设备都忙，则刚到达的呼叫就排入一个等待队列。等待制服务系统可以有许多种服务规则，在电话服务系统中，最常见的是“先入先出”规则，即一旦系统中有空闲的服务设备，它首先要为等待时间最长的呼叫服务，即先到达系统的呼叫先得到服务。在等待制服务系统中，虽然理论上所有的呼叫都能得到服务，但是，不同系统服务的质量是有差别的。例如：在某些系统中，只有很少的呼叫需要排队等待，而在另一些系统中，大部分的呼叫在进行通话之前都要在队列中排队等待；某些系统的呼叫排队等待时间较长，而某些系统中呼叫排队等待的时间较短。我们可以用以下一些指标来衡量等待制呼叫服务系统

的服务质量：

(1)呼叫需要等待的概率。它是呼叫到达时系统中所有的设备都忙的概率。在话务工程中，把呼叫需要等待的概率叫做系统的条件呼损，也叫做呼叫平均延迟概率，用符号 $P(\gamma>0)$ 表示。

(2)呼叫平均等待时间。这个指标可以从两方面进行考察：一是所有呼叫(包括那些等待时间为零的呼叫)的平均等待时间；一是等待时间大于零的呼叫的平均等待时间。前者用 $\bar{\gamma}$ 表示，后者用 $\bar{\gamma}_c$ 表示。

(3)呼叫等待队列的长度(简称队列长度或队长)。它是指停留在等待队列中的呼叫个数。这个队列长度的平均值叫做平均队长。

在呼损制服务系统中，当一个新的呼叫到达时，如果系统中所有的设备都被占用，则该次呼叫损失。损失呼叫的多少反映了呼损系统的服务质量。因此，在呼损制服务系统中，用呼损作为衡量其服务质量的指标。

下面我们来解释服务系统的设备数量、系统的流入话务量、系统的服务质量之间的关系。当系统的服务质量指标一定时，系统的流入话务量越大，所需要的系统服务设备数量也越大；同理，如果系统的服务设备数量越大，它可以负荷的流入话务量也越大。当系统的流入话务量一定时，系统的服务质量指标越低，所需要的服务设备越少；反之，系统的服务质量指标越高，所需要的服务设备越多。当系统的设备数量一定时，系统的服务质量指标越高，其所能负荷的流入话务量越小；反之，如果服务质量指标越低，所能负荷的流入话务量越大。

在规定的服务质量指标下，一个系统所能负荷的最大流入话务量叫做这个系统的话务负荷能力。系统的话务负荷能力与系统的结构、服务方式、系统的服务质量指标等多种因素有关。在同一系统中，所要求的服务质量指标越差，系统的话务负荷能力越高；反之，所要求的服务质量指标越高，系统的话务负荷能力越低。系统的话务负荷能力与系统服务方式(是呼损制系统还是等待制系统)的关系将在本章以后的内容中介绍。此外，系统的话务负荷能力还与呼叫流的类型有关。

1.1.4 线束的概念

简单地说，服务系统中能够独立地为一定的负载源提供服务的一个最小单元就是一个线束。在有线电话系统中，一个线束常简化为一条中继线。在无线通信系统中，一个无线信道可看作是一个线束。

一个系统中，平均每个线束的完成话务量叫做线束平均利用率，用 η 表示。每个线束的最大完成话务量是 1e，系统中所有线束的最大完成话务量等于其线束容量。线束平均利用率的值永远不大于 1，即 $0\leqslant\eta\leqslant1$。线束平均利用率是用来描述设备的忙闲程度的。线束平均利用率越大，系统服务设备的繁忙程度越高。

线束按照其结构的不同，可分为全利用度线束和部分利用度线束。所谓利用度是指一个负载源所能利用的服务系统中线束的最大数目。如果任一个负载源都可以利用系统中的任一线束为其服务，这样的系统叫做全利用度线束。全利用度线束的利用度就是其线束容量。如果负载源并不能利用系统中的所有线束为其服务，这样的系统叫做部分利用度线束。部分利用度线束的利用度小于或等于其线束容量。全利用度线束是部分利用度线束的特例。

1.1.5 呼叫流的特性

前面已经说明，呼叫流是一个随机过程，因而描述呼叫流也要从随机过程的角度来进行。呼叫流的特性可以从三个角度描述，即呼叫流(以下简称流)的平稳性、普通性和后效性。

如果呼叫流这个随机过程是一个平稳随机过程，则这个呼叫流具有平稳性。具体地说，如果用 $P_t(a,k)$ 来表示在以 a 为起点的时间间隔 $(a,a+t)$ 内发生 k 次呼叫的概率，如果 $P_t(a,k)=P_t(a+\Delta t,k)$，即以 a 为起点的时间间隔 $(a,a+t)$ 内发生 k 次呼叫的概率与以 $a+\Delta t$ 为起点的时间间隔 $(a+\Delta t,a+\Delta t+t)$ 内发生 k 次呼叫的概率是相同的，则说明这个呼叫流具有平稳性。

令 $\pi_k(t,t+\tau)$ 表示在时间段 $(t,t+\tau)$ 内发生不少于 k 个呼叫的概率，即 $\pi_k(t,t+\tau)=\sum_{i=k}^{\infty}P_\tau(t,i)$，如果有 $\lim_{\tau\to 0}\frac{\pi_2(t,t+\tau)}{\tau}=0$，则称该呼叫流具有普通性。流的普通性的物理意义是，在任意时刻，同时发生两个或更多次的呼叫是不可能的。

以同一时刻 a 为起点的时间间隔 $(a,a+t)$ 内发生 k 次呼叫，如果这一事件在以 a 以前的呼叫发生情况为条件的条件概率等于这一事件的无条件概率，则称这样的呼叫流是无后效性流。流的无后效性说明，任一时刻以前所发生的呼叫情况对以后的呼叫情况不产生影响。

令 $\pi_1(t,t+\tau)$ 表示在时间段 $(t,t+\tau)$ 内发生不少于 1 个呼叫的概率，即 $\pi_1(t,t+\tau)=\sum_{i=1}^{\infty}P_\tau(t,i)$，定义 $\lim_{\tau\to 0}\frac{\pi_1(t,t+\tau)}{\tau}=\lambda(t)$ 叫做呼叫流在时刻 t 的参数。由流的参数的定义可知，它也是呼叫流在时刻 t 发生呼叫的概率密度。显然，对于平稳性呼叫流，由于 $\pi_1(t,t+\tau)$ 与 t 无关，所以 $\lambda(t)$ 与 t 无关，所以平稳性呼叫流的参数为一个常数。

把具有平稳性、普通性和无后效性的流称为最简单流。一般来说，同时具有这三种特性的呼叫流是没有的。但实际中，当考察大电话用户群的一个不太长时间段内的呼叫流时，通常认为呼叫流为最简单流。最简单流在时间间隔 t 内发生 k 个呼叫的概率 $P_k(t)$ 符合泊松分布：

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda t} \tag{1.1}$$

因此，最简单流也叫做泊松流。

由最简单流在时间间隔 T 内发生 k 个呼叫的概率分布可以得出任两个呼叫产生的时间间隔服从指数分布。下面是证明过程。

设 $F(t)$ 为呼叫时间间隔 T 小于给定值 t 的概率，则：

$$F(t)=P(T<t)=\pi_1(t)=1-P_0(t)=1-e^{-\lambda t} \tag{1.2}$$

将 $F(t)$ 求导，得概率分布密度：

$$f(t)=F'(t)=\lambda e^{-\lambda t} \tag{1.3}$$

$f(t)$ 就是任两个呼叫产生时间间隔的分布。

最简单流的参数 $\lim_{\tau\to 0}\frac{\pi_1(t,t+\tau)}{\tau}=\lim_{\tau\to 0}\frac{1-P_0(\tau)}{\tau}=\lim_{\tau\to 0}\frac{1-e^{-\lambda t}}{\tau}=\lambda$。最简单流呼叫产生的平均时间间隔为 $1/\lambda$，即单位时间平均到达的呼叫数为 λ。

1.2 全利用度线束呼损系统的理论分析

假设呼叫流为最简单流，呼叫服务时长服从指数分布，以下分析全利用度线束呼损系统。

1.2.1 系统的状态方程

假设呼叫服务时长的分布为：

$$f(t) = \beta e^{-\beta t} \tag{1.4}$$

则 $E(t)=1/\beta$，所以 $1/\beta$ 就是呼叫平均服务时长。

设在时刻 t 有 k 个呼叫正在被服务，下面计算在 τ 时间内有 i 个呼叫结束的概率。这个事件符合贝努力分布，所以 τ 时间内的 k 个被服务的呼叫中有 i 个结束服务的概率为：

$$P_k(i) = C_k^i p^i (1-p)^{k-i} \tag{1.5}$$

式中，p 为 τ 时间内一个呼叫结束服务的概率：

$$p = P(T < \tau) = \int_0^\tau f(t)dt = 1 - e^{-\beta\tau} \tag{1.6}$$

将式(1.6)代入式(1.5)中得：

$$P_k(i) = C_k^i (1 - e^{-\beta\tau})^i e^{-(k-i)\beta\tau} \tag{1.7}$$

由此得 τ 时间内 k 个呼叫没有呼叫结束服务的概率：

$$P_k(0) = e^{-k\beta\tau} \tag{1.8}$$

所以在 τ 时间内，至少有一个呼叫结束服务的概率为：

$$\pi_1(\tau) = 1 - P_k(0) = 1 - e^{-k\beta\tau} \tag{1.9}$$

由式(1.7)得：

$$P_k(1) = k(1 - e^{-\beta\tau})e^{-(k-1)\beta\tau} \tag{1.10}$$

所以在 τ 时间内有两个或两个以上的呼叫结束服务的概率：

$$\pi_2(\tau) = \pi_1(\tau) - P_k(1) = 1 - e^{-k\beta\tau} - k(1 - e^{-\beta\tau})e^{-(k-1)\beta\tau} \tag{1.11}$$

由洛毕答法则求下列极限：

$$\begin{aligned}\lim_{\tau\to 0}\frac{\pi_2(\tau)}{\tau} &= \lim_{\tau\to 0}\frac{1 - e^{-k\beta\tau} - k(1 - e^{-\beta\tau})e^{-(k-1)\beta\tau}}{\tau} \\ &= \lim_{\tau\to 0}\left[-k(k-1)e^{-k\beta\tau} + k(k-1)e^{-(k-1)\beta\tau}\right] \\ &= 0\end{aligned} \tag{1.12}$$

由前述流的普通性的定义知，呼叫服务结束的序列也具有普通性，即在任一时刻有两个或两个以上的呼叫同时结束的概率是零。所以：

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\pi_1(\tau)}{\tau} = \lim_{\tau\to 0}\frac{1 - e^{-k\beta\tau}}{\tau} = \lim_{\tau\to 0} k\beta e^{-k\beta\tau} = k\beta \tag{1.13}$$

为在任一时刻只有一个呼叫结束服务的概率。设：

$$\mu_k = k\beta \tag{1.14}$$

设系统中有 i 个呼叫服务时，呼叫的到达概率为 λ_i，呼叫服务结束的概率为 μ_i，则可以得到

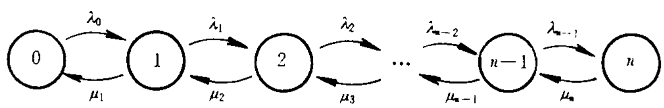


图 1.1 系统状态转移图

服务系统的状态转移图如图 1.1 所示。

图 1.1 中,圆圈中的数字为 i 代表当前系统中正在接受服务的有 i 个呼叫,在此时,新到达系统一个呼叫的概率为 λ_i,系统的状态就由 i 变为 $i+1$;同时也有 μ_i 的概率某一呼叫结束服务,系统的状态由 i 变为 $i-1$;而系统状态维持不变的概率是$(1-\lambda_i-\mu_i)$。

由以上的分析,可得出这个系统的状态方程:

$$\begin{cases} P_i(t+\tau)=(1-\lambda_i\tau-\mu_i\tau)P_i(t)+\lambda_{i-1}\tau P_{i-1}(t)+\mu_{i+1}\tau P_{i+1}(t)+o(\tau), & i=1,2,\cdots,v-1 \\ P_0(t+\tau)=(1-\lambda_0\tau)P_0(t)+\mu_1\tau P_1(t)+o(\tau), & i=0 \\ P_v(t+\tau)=(1-\mu_v\tau)P_v(t)+\lambda_{v-1}P_{v-1}(t)+o(\tau), & i=v \end{cases} \tag{1.15}$$

由此得系统的状态方程的微分形式:

$$\begin{cases} P_i'(t)=-(\mu_i+\lambda_i)P_i(t)+\lambda_{i-1}P_{i-1}(t)+\mu_{i+1}P_{i+1}(t), & i=1,2,\cdots,v-1 \\ P_o'(t)=-\lambda_0P_0(t)+\mu_1P_1(t), & i=0 \\ P_v'(t)=-\mu_vP_v(t)+\lambda_{v-1}P_{v-1}(t), & i=v \end{cases} \tag{1.16}$$

由以上方程组,再加一个关系式 $\sum_{i=1}^{v}P_i=1$,即可解出:

$$P_i=\frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_i}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}\cdot P_o \tag{1.17}$$

假设全利用度线束的容量为 v,对于最简单流有:

$$\lambda_i=\lambda \tag{1.18}$$

$$\mu_i=i\beta \tag{1.19}$$

将式(1.18)、(1.19)代入式(1.17)中,得:

$$P_i=\frac{(\frac{\lambda}{\beta})^i/i!}{\sum_{k=0}^{v}(\frac{\lambda}{\beta})^k/k!} \tag{1.20}$$

P_i 的这种分布称为爱尔兰分布。

由前面的分析知,λ 是单位时间内平均到达的呼叫数,而 $1/\beta$ 是呼叫的平均服务时长,所以 λ/β 就是这个系统的流入话务量,即:

$$A=\frac{\lambda}{\beta} \tag{1.21}$$

所以:

$$P_i=\frac{A^i/i!}{\sum_{k=0}^{v}A^k/k!} \tag{1.22}$$

到此为止,已经求出服务系统状态的概率:系统中当前有 i 个呼叫正在接受服务的概率 P_i,也就是 v 个线束中有 i 个被占用的概率。显然,$i\leqslant v$。

1.2.2 系统的呼损

当系统中的 v 个线束都被占用时,亦即当前系统中有 v 个正在接受服务的呼叫,那么第 $v+1$ 个呼叫到来时就要被拒绝服务,亦即这个呼叫就要被损失掉。所以,呼叫损失的概率就是系统中的 v 个线束全部被占用的概率。用 E 表示系统的呼损,得:

$$E = P_v = \frac{A^v/v!}{\sum_{k=0}^{v} A^k/k!} \tag{1.23}$$

这个呼损也常用 $E_{1,v}(A)$表示：

$$E_{1,v}(A) = E = P_v = \frac{A^v/v!}{\sum_{k=0}^{v} A^k/k!} \tag{1.24}$$

称为 Erlang-B 公式。

以下通过图 1.2 来说明 Erlang-B 公式中 A、v、E 之间的关系，也就是全利用度线束呼损系统的话务负荷能力、线束容量及其呼损三者之间的关系。

由图 1.2 可以看出，当线束容量 v 一定时，系统的流入话务量 A 越大，其呼损越大。也可以说，线束容量 v 一定时，呼损越大（服务质量越差），所能负荷的话务量 A 也越大。当服务质量（即呼损）确定后，系统的流入话务量越大，要求的线束容量 v 也越大。也可以说，当服务质量（即呼损）确定后，系统的线束容量越大，其话务负荷能力也越大。

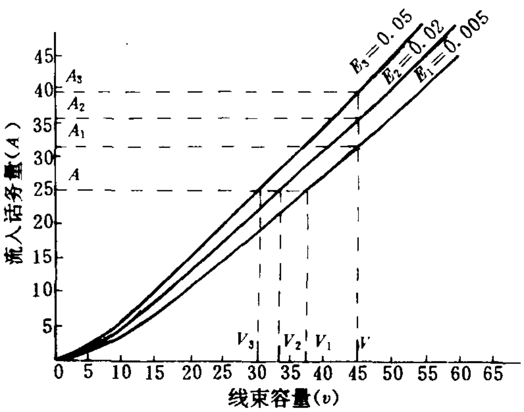


图 1.2　全利用度线束呼损系统的 A、v、E 之间的关系

1.2.3　线束平均利用率

已知系统的呼损后，就可以求出线束平均利用率。线束平均利用率是平均每个线束的完成话务量。完成话务量：

$$A_0 = A(1 - E) \tag{1.25}$$

线束平均利用率：

$$\eta = \frac{A_0}{v} = \frac{A(1 - E)}{v} \tag{1.26}$$

因为完成话务量（以 e 为单位）等于一小时内线束被占用的时间，所以线束平均利用率就等于一小时内平均每条线束被占用的时间，它表示系统服务设备的忙闲程度。线束平均利用率的最大值为 1。

1.3　全利用度线束等待系统的理论分析

本节所研究的是线束容量为 v 的全利用线束等待系统。假设呼叫流为最简单流，呼叫的服务时长服从指数分布。

1.3.1 系统的条件呼损

在计算条件呼损之前，首先来求系统的状态 P_i。系统的状态 P_i 是指当前有 i 个呼叫停留在系统中。与呼损制服务的系统不同，这里的 i 值是没有限制的。当 $i \leqslant v$ 时，这 i 个呼叫都可接受系统的服务，即系统的 v 个线束中有 i 个被占用；当 $i>v$ 时，由于系统的 v 条线束最多同时只能为 v 个呼叫服务，所以将有 $i-v$ 个呼叫停留在这个服务系统的队列中，$i-v$ 称为该时刻的队列长度，用 q 表示。当系统中有空闲设备时，这些等候在队列中的呼叫依照"先到来先接受服务"的原则得到服务。

假设系统的状态为 i 时，呼叫的到达的概率为 λ_i，呼叫完成服务结束的概率为 μ_i，则可以得到与图 1.1 相同的状态转移图，以及相同的状态方程式(1.16)。但是，由于 i 可以取任意值，而 $i>v$ 时，系统中接受服务的呼叫数为 v，所以有：

$$\begin{cases} \mu_i = \beta v, & i > v \\ \mu_i = \beta i, & 0 \leqslant i \leqslant v \\ \lambda_i = \lambda \end{cases} \tag{1.27}$$

代入式(1.17)中，得：

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\beta)^i}{i!} \cdot P_0, & 0 \leqslant i < v \\ \dfrac{(\lambda/\beta)^v}{v!} \cdot \left(\dfrac{\lambda/\beta}{v}\right)^{i-v} \cdot P_0, & i > v \end{cases} \tag{1.28}$$

由关系式 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} P_i = 1$，并将 P_i 的表达式代入得：

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{v} \dfrac{(\lambda/\beta)^i}{i!} + \dfrac{(\lambda/\beta)^v}{v!} \dfrac{\lambda/\beta}{v - \lambda/\beta}} \tag{1.29}$$

又由上节 λ/β 就是系统的流入话务量 A，即：

$$A = \frac{\lambda}{\beta}$$

将 A 代入式(1.29)中，得：

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{v} \dfrac{A^i}{i!} + \dfrac{A^v}{v!} \cdot \dfrac{A}{v - A}} \tag{1.30}$$

代入式(1.28)中，得系统的状态 P_i 为：

$$P_i = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{A^i}{i!}}{\sum\limits_{i=0}^{v} \dfrac{A^i}{i!} + \dfrac{A^v}{v!} \cdot \dfrac{A}{v - A}}, & 0 \leqslant i \leqslant v \\ \dfrac{\dfrac{A^v}{v!} \cdot \left(\dfrac{A}{v}\right)^{i-v}}{\sum\limits_{i=0}^{v} \dfrac{A^i}{i!} + \dfrac{A^v}{v!} \cdot \dfrac{A}{v - A}}, & i > v \end{cases} \tag{1.31}$$

上面的分析中，$A<v$ 的条件必须成立。否则等待系统的排队长度会无限长，这个系统将是没有意义的。