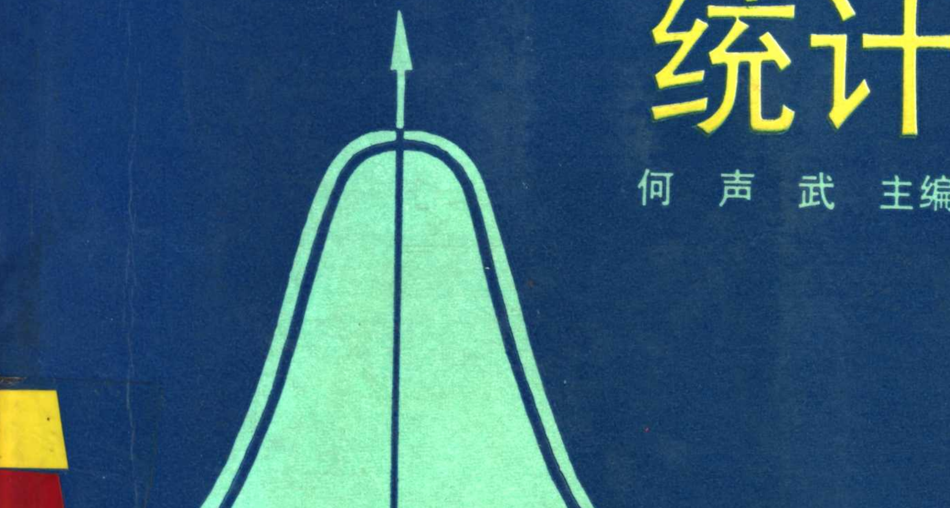
全国高等教育自学考试教材

（数 学 专 业）

概率论与数理统计

何 声 武 主编



经 济 科 学 出 版 社

全国高等教育自学考试教材

概率论与数理统计

（数学专业）

主　编　何声武

编写者　何声武　汪振鹏

王万中

经济科学出版社

(京)新登字 152 号

责任编辑：莫霓舫
封面设计：张卫红
版式设计：代小卫

概率论与数理统计
何声武　主编
*
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
上海新华印刷厂排版　一二〇一工厂印刷
*
850×1168 毫米　32 开　14.25 印张　378000 字
1992 年 12 月第一版　1992 年 12 月第一次印刷
印数：0001—7000 册
ISBN 7-5058-0483-9/F·388　定价：7.40 元

内 容 提 要

本书系根据全国高等教育自学考试指导委员会审定的高等教育自学考试数学专业《概率论与数理统计》自学考试大纲编写的自学用教科书．本书内容，概率论部分包括：事件与概率；随机变量及其分布、数字特征；大数定律与中心极限定理．数理统计部分包括母体与子样；抽样分布；参数估计和假设检验的基本原理和常用方法；回归分析与方差分析．全书配有完整的习题与复习题．本书供参加高等教育自学考试数学专业的学生使用，它充分考虑到自学的特点，也适合综合性大学、师范或工科院校数学专业或应用数学专业学生用作教科书或参考书．对非数学专业的学生也可选学最基本的内容或作学习参考书．

出 版 前 言

高等教育自学考试教材建设是高等教育自学考试工作的一项基本建设．经国家教育委员会同意，我们拟有计划、有步骤地组织编写一些高等教育自学考试教材，以满足社会自学和适应考试的需要．《概率论与数理统计》是为高等教育自学考试数学专业组编的一套教材中的一种．这本教材根据专业考试计划，从造就和选拔人才的需要出发，按照全国颁布的《概率论与数理统计自学考试大纲》的要求，结合自学考试的特点，委托华东师范大学三位同志编写的．

数学专业《概率论与数理统计》自学考试教材，是供个人自学、社会助学和国家考试使用的．现经组织专家审定同意予以出版发行．我们相信，随着高教自学考试教材的陆续出版，必将对我国高等教育事业的发展，保证自学考试的质量起到积极的促进作用．

编写高等教育自学考试教材是一种新的尝试，是项巨大的工程，希望得到社会各方面的关怀和支持，使它在使用中不断提高和日臻完善．

全国高等教育自学考试指导委员会

一九九一年三月

DAA47/01

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目　录

序　言

本书是根据国家教委全国高等教育自学考试指导委员会制定的高等教育自学考试数学专业《概率论与数理统计》自学考试大纲编写的，供自学用的概率论与数理统计的入门教材，因而本书的取材严格遵循考试大纲的规定．下列章节组成概率论与数理统计初级教程的最基本的内容：第一章、第二章§1—§3、第三章§1—§3及第四章§3是概率论的基础部分，包括事件与概率、随机变量及其分布与数字特征、独立性、中心极限定理等主要概念与定理．第五章、第六章§1、第七章§1、§2、§4、第八章§1、第九章§1是数理统计的基础部分，包括母体、子样与统计量等基本概念、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析的基本思想与方法．本课程的学习应在数学分析与高等代数课程之后，本书以微积分及线性代数为主要工具．本书的编写既突出概率论与数理统计这门课程的特点（它与其他的数学课程确有较大的不同之处），也充分注意适应自学的特点．因此，尽管本书是为参加高等教育自学考试的学生自学而编写的，它也适用于各类高等院校学生作教科书或参考书．

概率论与数理统计是一门有着极为广泛的应用及曲折而多采的发展历史的数学分支，对它所研究的随机现象的认识，它的方法的实际应用与效能等等问题，至今尚有不同观点的争论．然而作为一门数学课程的入门教科书，本书首先致力于讲清概率论与数理统计的基本数学内容，与其他数学教科书一样，给出基本概念的明确无误的数学定义，以定理的形式表达全部结果．同时我们也力求阐明概念、方法与理论的实际背景，定理的结论的实际含义，并通过大量的例子说明如何应用书中讲述的方法去解决实际问题．我们特别着力于使读者明了数学讨论究竟在做什么，要解决什么问

题，为什么必须解决这些问题，以及怎样去解决．由于历史原因，有些概率统计教科书把数学概念与实际背景混为一谈，甚至掺杂进哲学上的认识，容易使读者堕入云雾之中．也有的只管作数学上的讨论或按公式作计算，却不交代这些讨论或计算有什么用，同样使读者不明不白．这些都是我们力求避免的．

以概率的概念为例，概率的数学定义只能采用公理化的定义方式．尽管几百年来人们对概率有过各种各样的认识，也不能把它们与数学定义混淆起来．但是概率的公理化定义，与几何的公理一样，有着鲜明的直观背景，只要讲解得当也是不难接受的．在本书中首先介绍等可能概型（即古典概型），这也是人们最早接触与认识的情形，在这个模型中概率的定义几乎是不言而喻的．在仔细学习过这个模型之后，引进概率的公理就比较容易接受了．然后再交待概率的频率背景就不会引起混乱的认识了．在讲述数理统计的基本概念时，母体被直接定义为要研究的随机变量，避免了"研究对象的全体"这类没有直接与统计模型联系起来的传统说法．根据子样是母体的独立复制品的思想，子样被定义为独立、与母体同分布的随机变量．尽管在实际中子样的独立性与代表性往往只能近似地被满足，通过实际例子我们仍能抽象出子样的数学定义．对基本概念的处理既要坚持科学性，又要易于理解便于自学，这是我们力求达到的目标．事实上，概率统计的丰富的背景材料大大帮助了我们实现这个目标，这也是其他数学课程很少具备的条件．

概率统计必须使用组合方法与分析方法．但是我们强调概率意义的理解，同时尽量介绍有概率特点的思考方法，不沉浸于纯粹是组合或分析的内容之中．不然的话，往往会使读者不明白问题的讨论或计算有什么意义，偏离概率统计的主题．例如，在讨论古典概型时不追求较深的组合计算（实际上就限于中学课程中的排列组合方法），而强调概率性质的运用．又如特征函数虽是概率论最重要的分析工具之一，但在本课程中只是为了证明中心极限定理及多维正态分布的性质而需要它．我们不是对特征函数的分析性质感兴趣，而且把过长的分析证明也略去了．我们把力气花在如何

用中心极限定理上，用在掌握与运用多维正态分布的性质上.

数理统计的讲授也是必须注意的大问题. 由于往往只讲一些具体的统计方法，加上冗长的数据处理，令人生厌而影响教学效果. 对于自学，这个问题更显得突出. 我们也试图作些努力. 我们的想法是，数理统计的精髓在于解决统计问题的思想方法，它们同样是引人入胜的，特别是估计与假设检验的思路. 应该说，解决概率统计问题的想法是人们的常识所见，但加以引导与分析就能产生更上一层楼的效果. 数值计算虽然有时显得繁复，但计算结果也会带来新的信息，有时甚至是出乎意料的结果. 正因为如此，即使在概率论部分，有些例子并不只是到求出公式为止，而是一直做到有数值结果，使问题的解答真正吸引大家的注意. 另一条增加数理统计的思想性与深度的途径是讲述一些理论课题，例如大纲规定了克拉美—劳不等式、奈曼—皮尔逊引理等内容，但这些内容毕竟超出了通常初等统计的范围，不属于本课程的基本要求.

为便于自学，我们一方面尽量采用课堂讲授的语言与方式. 同时又力求叙述得简单明了，开门见山，避免话多反而不明. 另一方面，书中列有较多的例子，以利于自学者学习模仿、分析领会及扩大眼界与思路. 在每章的引言中引进本章要讨论的问题，在章末的小结中点明对本章内容学习的要求，有助于读者自己掌握. 每一节配以直接与该节内容有关的习题，完成其中的 1/2—2/3 是必须的. 每章有复习题，全书还有总复习题. 习题的综合性与难度依层次略有加大，但基本上不配难题. 估计会遇到困难的题目都加以提示. 书末附有全部习题答案. 这些都是为了使读者将主要精力用于掌握课程的基本内容与基本方法上，不让难题打乱自学的过程.

本书由何声武主编，汪振鹏与王万中分别参加概率论与数理统计部分的编写. 我们深感概率统计的教学、教材的编写是值得深入研究的大题目，限于编者的学识水平与教学经验的偏窄，编写本书的尝试定有许多不足与不成熟的地方，恳请使用本书的教师与学生提出批评意见，以求不断改进，王隽骧（本书的主审）、周概容、汪仁官、李贤平、庄兴元、柴根象、王静龙、夏爱华等同志对本书原

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

稿提出了许多批评意见,见解深刻,使书稿有了明显的改进与提高. 国家教委高等教育自学考试数学专业委员会与章学诚同志大力支持本书的编写与审查工作,花去了许多的时间与精力.经济科学出版社为本书的编辑出版做了大量工作,在此一并深深致谢.还要感谢乔理同志不辞辛劳完成全部誊清工作,促进了本书的出版.

何声武谨识

1990年7月于上海

第一章　事件与概率

长久以来，人们主要以决定性现象作为科学研究的对象，并利用数学研究其中的数量规律. 例如，在高处让一个铁球自由下落，由于地球的引力，铁球必然下落到地面. 铁球的自由下落运动是直线的匀加速运动，下落的距离是时间的二次函数. 再如，自然界中的放射性元素必然要发生蜕变，发出射线，自身的质量逐渐减少，其质量是时间的负指数函数. "自由下落的铁球作直线的匀加速运动"、"放射性元素发生蜕变"都是在一定条件下必然要发生的事件，通称必然事件. 必然事件的反面就是不可能事件，即不可能发生的事件. 为说话方便起见，我们将前提条件的实现统称为做"试验"，尽管有时候并不是真正有人在有意识地做试验，而是在现实世界中自然地进行的，只需要人们去作观察就可以了. 结果是确定无疑的试验就是所谓的决定性的试验. 必然事件就是试验中必然要发生的事件，不可能事件则是试验中决不会发生的事件.

然而，存在着大量的试验，这些试验的结果不是确定的，而有多种的可能. 一次试验的结果究竟是哪一个，在一定程度上要看机会，碰运气而定. 例如，一个跳伞运动员作定点跳伞，他的落地点离预定中心的距离实际是多少，在跳伞前是无法确定的. "这个距离不超过 2 米"是一个既可能发生又可能不发生的事件. 再如，上海市每年七月份的最高气温，在作观察之前也是无法确定的，尽管大体上可以知道，它在 25—40℃之间. "七月份的最高气温超过 37℃"也是一个既可能发生又可能不发生的事件. 试验的结果预先无法确定，要随机会而定的试验被称为随机试验. 在随机试验中，既可能发生也可能不发生的事件被称为随机事件.

科学的发展要求人们不能只局限于研究决定性的现象，也要

进入随机现象的研究领域．事实上，随机现象中也有规律性可言．随机事件虽然可能发生也可能不发生，但我们可以讨论它发生的可能性的大小．例如，比较两个跳伞运动员的技术水平的高低时，很自然会想到，“落地点离预定中心不超过2米”这一事件发生的可能性，技术高的运动员比技术低的运动员的可能性要大．再如，上海市七月份的最高气温在33—36℃之间的可能性大于最高气温超过38℃的可能性，这是历史经验或资料告诉我们的．用一个数值来表示随机事件发生的可能性的大小，就是随机事件的概率．

概率论与数理统计是研究随机现象的数量规律的一个数学分支．如上所述，要研究随机现象首先就遇到了随机试验、随机事件及其概率这些最基本的概念．前面我们也已经对它们有了初步的直观的了解，但是要使它们成为数学研究的对象，就必须建立起描述它们的数学模型，使这些概念及它们的性质能在数学上明确地表达出来，然后才有可能对它们进行数学计算，并作深入研究而获得深刻的结果．本章的任务就是要完成这一基础性质的工作．

概率论与数理统计的历史已有300多年，但是只是从本世纪30年代开始，它才真正形成一个独立的重要的数学分支．自五六十年代以来，由于生产与科学的迅猛发展，对概率论与数理统计的研究产生了巨大的推动力．无论在理论上或应用上，概率论与数理统计都已经成为数学的一门成熟的基本分支学科，并继续在急速发展之中．

有趣的是，在概率论发展的初期，最先导致研究概率论的基本概念的却是随机游戏或者赌博．这并不奇怪，因为二三百年前，现代的生产与科学尚在萌芽与发展之中，还没有把对随机现象的研究提到议事日程上来，然而游戏与赌博却有悠久的历史，一旦有足够的数学准备，自然地就会讨论起其中的数学问题来．也正因为缺乏真正的社会需要，概率论在最初二百年间发展缓慢，甚至未被公认为一门数学．可是我们必须指出，由于一些游戏与赌博规则简单明了、问题清楚、目标明确、有刺激性，非常有利于弄明白概率论的基本概念及研究内容，这个特点在我们的课程中也要充分利用到．

因此在我们的课文与习题中会大量地涉及到游戏与赌博.

在§1中给出随机事件的数学表示——用集合代表随机事件,并将事件的运算化为相应的集合的运算,所以这里的基本数学工具是集合论.§2与§3讨论如何定义随机事件发生的可能性大小,即随机事件的概率.先在§2中讨论一类最简单的模型——等可能概型,这时可直接定义概率.在讨论等可能概型时在相当程度上要用到排列组合这个数学工具.在充分讨论了等可能概型的基础上,在§3中给出概率的一般定义.我们采用了公理化定义的方法,这节的重点是概率的性质,这些性质提供了计算概率的方法.在§4中给出条件概率的定义,并证明了全概率公式及贝叶斯(Bayes)公式,这两个公式有着重要的应用.在§5中讨论事件的独立性,这是概率论的最基本的概念之一.我们以系统可靠性分析为例,充分地阐明独立性的重要作用.最后,引进一类最基本的独立随机试验——多重贝努里(Bernoulli)试验,导出了二项分布及其普哇松(Poisson)逼近.

§1. 样本空间与事件

1.1 样本空间 在这一节中,我们给出随机试验与随机事件的数学表示、随机事件的运算.在下两节中再讨论随机事件发生的可能性的大小.

对于随机试验我们感兴趣的首先是它的可能出现的结果.虽然每次试验出现哪一个结果预先不知道,但是我们应该知道全部可能出现的结果是哪些.随机试验的一个可能出现的结果一般用字母ω来表示,可能出现的结果的全体一般用Ω来表示,它是一个集合,其中每一个元素就是一个可能出现的结果.Ω称为样本空间,Ω中的元素ω(集合中的元素也称为点)称为样本点.

例 1.1 掷一枚硬币,可能出现正面(有国徽的一面)朝上,也可能出现反面朝上.每掷一次,出现正面或反面是随机的,出现正面记为ω_1,出现反面记为ω_2,这时样本空间$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$包含两个

样本点. ∎

例 1.2 掷一颗骰子(一个正方体,6 个面上分别刻有 1 个点,2 个点,…,6 个点),可能出现的是 6 个点数中的一个. 每掷一次出现哪一个点数是随机的. 直接取样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,它包含 6 个样本点. ∎

例 1.3 从一副扑克牌(52 张)中任取一张牌. 每一次取到哪一张牌是随机的. 这时有 52 个可能出现的结果. 按 $A,2,3,\cdots,10,J,Q,K$ 的顺序,以 $\omega_1,\cdots,\omega_{13}$ 记黑桃的 13 张牌,$\omega_{14},\cdots,\omega_{26}$ 记红桃的,$\omega_{27},\cdots,\omega_{39}$ 记方块的,$\omega_{40},\cdots,\omega_{52}$ 记草花的. 这时样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{52}\}$ 有 52 个样本点. ∎

例 1.4 记录某个电话交换台从 8 点到 9 点接到的呼唤次数. 每天这段时间接到多少次呼唤是随机的. 虽然在现实中接到的呼唤次数总是有一定限制的,但是如果次数可能是很大的话,在数学上更方便的是认为呼唤次数不受限制. 这样,样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\ldots,\ldots\}$ 就是一个无穷的集合,这是一个可以将所有元素编号的无穷集合,这样的集合称为**可列的**(或**可数的**)无穷集合. 有限的或可列无穷的集合统称为**离散集合**. ∎

例 1.5 观察上海市 7 月份的最高气温,每年观察到的这一最高气温是多少预先是无法确定的. 经验告诉我们,这一最高气温必定介于 25—40℃ 之间. 因此,样本空间 $\Omega=[25,40]$ 是实数轴上的一个区间,这是一个不可列的无穷集合. (读者不必花精力去论证,实数轴上的任一个区间都是不可列集. 这在实变函数论的教科书中一般都有,我们不需要这个证明.) ∎

1.2 随机事件 对于随机事件,我们首先感兴趣的是它发生还是不发生,这取决于随机试验中出现哪一个结果或样本点. 如果出现样本点 ω,随机事件 A 就发生,称 ω 为 A 的**有利样本点**. 随机事件 A 发生也就意味着 A 的某个有利样本点出现. 所以,很自然地我们可以用随机事件 A 的有利样本点全体来表示随机事件 A

$$A=\{\omega:\ \omega\text{为}A\text{的有利样本点}\}.$$

这样,我们就用样本空间 Ω 的一个子集表示一个随机事件.

一个样本点组成的单点集也表示一个随机事件，称为**基本事件**. 今后我们对基本事件与样本点也不加区别，这并不会引起混淆.

样本空间Ω本身也表示一个事件，由于所有的样本点都是有利的，也就是不论出现哪一个结果，这个事件总是要发生的，所以Ω表示了必然事件. 另一方面，空集$\varnothing$也是Ω的一个子集，也表示一个事件. 然而它没有有利样本点，也就是不论出现哪一个结果，这个事件总是不发生的. 所以，空集$\varnothing$表示了不可能事件. 必然事件与不可能事件是两个特殊的随机事件.

由于我们总是讨论随机试验与随机事件，为简便起见，将省略随机两字. 事件一般用英文大写字母表示：$A,B,\cdots$.

例 1.2(续) 甲、乙两人以掷一颗骰子赌输赢. 规定出偶数点为甲赢，出奇数点为乙赢. 分别以A,B表示甲赢，乙赢这两个事件，则在样本空间$\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$中

$$A=\{2,4,6\},\quad B=\{1,3,5\}. \quad ▌$$

例 1.3(续) 从一副扑克牌中任取一张牌，以A记取到红桃，B记取到 2 点，C记取到J或Q或K，D记取到黑色的 10 点，则在样本空间$\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_{52}\}$中

$$\begin{aligned}
A&=\{\omega_{14},\omega_{15},\cdots,\omega_{26}\},\\
B&=\{\omega_2,\omega_{15},\omega_{28},\omega_{41}\},\\
C&=\{\omega_{11},\omega_{12},\omega_{13},\omega_{24},\omega_{25},\\
&\quad\ \omega_{26},\omega_{37},\omega_{38},\omega_{39},\omega_{50},\omega_{51},\omega_{52}\},\\
D&=\{\omega_{10},\omega_{49}\}. \quad ▌
\end{aligned}$$

例 1.5(续) 观察上海市 7 月份的最高气温，以A记事件：最高气温超过 37℃，则在样本空间$\Omega=[25,40]$中

$$A=(37,40]. \quad ▌$$

例 1.6 从“1,2,3,4”4 个数字中任取 2 个数字(不重复)，A为事件：所取 2 个数字之和等于 5.

在上面的叙述中，没有指明两个数字是依次取的，故可以认为是同时取出的，也就是取出的两个数字是没有顺序的. 所以，样本

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com