大学数学辅导与考研指导

刘光祖　卢恩双　主编

科学出版社

2002

内 容 简 介

本书是高等数学课内教学的补充与延伸，除具有一般辅导书所具有的功能外，又兼有考研的基础复习功能．书中例题具有典型性、技巧性和综合性强的特点，与教材配合可以形成科学的教学链，有利于培养学生数学素质和自学能力．在考研题集粹中，将近5年来的考研题按章编解，使读者从考研题的情况了解和把握该章的深度和学习要求，形成本书的特色．

本书内容包括：高等数学，线性代数，概率论与数理统计初步．各章结构为：内容概要，答疑及典型例题解析，考研试题集粹，综合练习题及答案．书末附有若干附录．

本书可供农林院校、工科院校及经济类专业学生学习高等数学和考研使用，也可供职中教师和其他人员报考硕士研究生复习使用．

图书在版编目（CIP）数据

大学数学辅导与考研指导/刘光祖，卢恩双主编．—北京：科学出版社，2002.7

ISBN 7-03-010447-1

Ⅰ.大… Ⅱ.①刘…②卢… Ⅲ.高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第037812号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年7月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2002年7月第一次印刷 印张：39 3/4
印数：1—8 000 字数：790 000

定价：40.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

前　　言

高等数学、线性代数、概率统计是高等学校非数学专业普遍开设的几门主要数学课. 近年来由于许多专业课程设置的变化和选修课门类的增加而减少了数学课学时，这给本来学时就偏紧的数学课教学带来了一些新的矛盾和问题. 数学有其独特的地方，尤其是它的许多概念的抽象性、分析问题的技巧性等使有些学生因不能很好的适应而感到学习困难，也有些学生因学习能力强而期望在数学学习方面有进一步的提高和发展. 为了解决数学教学中的这些矛盾和问题，我们编写了《大学数学辅导与考研指导》这本书，希望它能配合教材，通过学生自学和课外辅导等形式，缓解数学教学所遇到的压力，同时也给学生提供一个较为宽松的学习空间，使有志于考研深造的学生在大学一、二年级的数学课学习期间，就了解考研对数学的基本要求及相关信息，留意课程所学知识的连续和应用，打好基础，提早为考研作准备.

本书共分为三篇十七章，内容包括高等数学，线性代数，概率论与数理统计初步. 各章结构为：内容概要，答疑及典型例题解析，考研试题集粹，综合练习题及综合练习题答案. 本书与当前出版的高等数学辅导书，考研复习书及应试对策等书不同之处，在于本书将课程学习辅导与考研复习结合了起来，使教学效果因引入新鲜灵活的考研题而得以提高，使考研因教学质量的提高而更具竞争实力.

本书各章的内容概要、答疑及典型例题解析部分是配合大学主流数学教材辅导学生的课程学习的. 读者在阅读内容概要时，应注意把握各章的主要知识点及重点、难点. 对答疑及典型例题解析部分，书中通过例题来解答学生的疑问，并帮助学生更好的理解概念，拓宽解题思路，学会综合运用所学知识，提高解题能力. 各章对普遍使用的主流教材中需要学生花较多的时间才能做出或容易做错的少量习题以例题形式给出了解答，因而它不会给教学带来负面影响. 考研试题集粹选编了我国近七年来的数学考研试题，并对它们作了分析解答，阅读这些构思精巧、新颖、综合性强的例题，会较大幅度地升华所学知识，增强考研的应试能力. 另外，考研试题的按章编入，能集中反映各章在考研试题中所占的比重，主要题型以及所涉及内容的宽泛程度等.

研究生入学考试对数学内容的要求，其课程一般安排在大学一、二年级学习，这离研究生入学考试还有一两年的时间，在课程学习之余，翻看浏览这本集考研指南与教学辅导于一体的数学辅导书，定能使所学课程不致于太多的回生，

为考研保持好的数学基础. 在考研试题中，有些题目要求对概念有深刻的理解并能灵活应用，这些对不考研的学生和数学爱好者来说也能够开阔思路，提高数学文化底蕴，对日后学习专业课程，解决专业领域和工作中的问题有所帮助.

本书主编为刘光祖、卢恩双. 刘光祖编写第一、第三和第六章，与王洁合编第二章，与王万雄合编第十七章；卢恩双编写第四、第五、第十一章. 高等数学、概率论与数理统计初步由刘光祖统稿，线性代数主要由卢恩双统稿. 副主编按编写章的先后顺序署名，他们是：刘亚相、李新有、张远迎、郭满才、李惠东和王万雄. 刘亚相编写第七、第八章，李新有编写第九、第十章，张远迎编写第十二、第十三章，郭满才编写第十四、第十五章，李惠东参与了本书的策划工作，并与路新玲合编第十六章. 编者为王洁，路新玲. 王洁除参编第二章外，还为第一、三、六等章编写了部分综合练习题及其答案，郑瑶承担了本书的计算机绘图工作. 本书由西北农林科技大学袁志发教授主审.

在本书编写过程中，我们参考了许多已出版的大学数学教材和课程辅导书、习题集、试题库，还参考了考研大纲和众多版本的考研复习书，考研数学试题，由于数量较大，不便于一一列出，在此对这些书的作者表示衷心的感谢，对参与全国考研数学命题的老师能够推出如此高质量的试题表示真挚的敬意. 由于编者水平所限，误讹之处请同行专家和读者批评指正.

编者

2002 年 3 月

目　　录

第一篇　高等数学

第一章　函数·极限·连续

一、内容概要

1. 函数的概念与性质

［函数的定义］　设 x 和 y 是两个变量，X 是一个给定的数集，如果对于每个 $x\in X$，y 按照一定的法则总有惟一确定的值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，称 X 为函数 y 的定义域.

• 函数定义有两个要素：定义域 X 和对应法则 f. 当两个函数的定义域完全相同、对应法则也相同时，则这两个函数相同.

• 函数的表示具有字母的无关性，即与变量用什么字母表示无关，如 $y=f(x)$，$y=f(t)$ 表示同一个函数.

［复合函数］　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X 而值域为 U^*，且 $U^*\subset U$，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为定义在 X 上的复合函数，u 称为中间变量.

• 复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域 X 是其内层函数 $\varphi(x)$ 定义域 X_1 的子集，即 $X\subset X_1$.

• 若 $u=\varphi(x)$ 的值域不含在 $y=f(u)$ 的定义域内，则 $u=\varphi(x)$ 与 $f(u)$ 不能复合.

［初等函数］　由基本初等函数与常数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤构成，且能用一个解析式子表示的函数，称为初等函数.

• 分段函数一般为非初等函数，但也有分段函数是初等函数的情形，如函数 $y=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 是初等函数，因为它可用一个式子 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 表示.

［函数的性质］

(1)奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域 X 关于原点对称，若对于任意给定的 $x\in X$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若对于任意给定的 $x\in X$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

(2)周期性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 X，若存在 $l\neq 0$，使得对于任给的 $x\in$

X,有 $x+l\in X$,且 $f(x+l)=f(x)$,则称 $f(x)$为周期函数,l 为周期.

通常,把周期函数 $f(x)$的最小正周期称为 $f(x)$的周期.

(3)有界性 设函数 $f(x)$的定义域为 X,若存在 $M>0$,使得对于任给的 $x\in X$,有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$有界,或称 $f(x)$为有界函数;反之,称 $f(x)$为无界函数.

• 若 $f(x)$有上界 k_2,即 $f(x)\leqslant k_2$,且有下界 k_1,即 $f(x)\geqslant k_1$,则 $f(x)$为有界函数,取 $M=\max\{|k_1|,k_2\}$,即有 $|f(x)|\leqslant M$.

(4)单调性 设函数 $f(x)$的定义域为 X,对于任意的 $x_1,x_2\in X$,当 $x_1<x_2$ 时,若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在 X 上单调增;若 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$在 X 上严格单调增;当 $x_1<x_2$ 时,若 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$在 X 上单调减;若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$在 X 上严格单调减.

2. 极限

[数列极限定义] 设数列$\{x_n\}$与常数 a 有下列关系:

对于任意给定的正数 ε,总存在正数 N,使得当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立,则称 a 为数列$\{x_n\}$的极限,记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

[函数极限定义] 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某一去心邻域内有定义,如果对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x,对应的函数值 $f(x)$满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

• 函数 $f(x)$的极限依 x 变化趋向而分为 $x\to x_0$ 和 $x\to\infty$ 时的两种情形.对于 $x\to\infty$ 时,$f(x)$的极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,其定义为:

对于任给的正数 ε,总存在正数 X,使得当 $|x|>X$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

• 数列 x_n 的极限可以看作正整数 n 的函数,即 $x_n=f(n)$,当 $n\to\infty$ 时 $x_n=f(n)$的极限可以看作是函数 $y=f(x)$当 $x\to\infty$ 时极限的特殊情形.函数 $y=f(x)$当 $x\to\infty$ 时自变量 x 的变化过程是连续的,而数列 $x_n=f(n)$的自变量 n 是只取正整数的不连续变化.当 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在时,$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$一定存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

• 函数 $f(x)$在 $x\to x_0$ 时的极限与函数在 x_0 有无定义以及函数值是多少无关.在函数极限定义中,对 $x\to x_0$ 的方式没有限制,即 x 可以从 x_0 的左侧($x_0-\delta<x<x_0$)和右侧($x_0<x<x_0+\delta$)以任何方式趋近于 x_0.如果只限定 x 从 x_0 的一侧趋近于 x_0,这种极限称为函数 $f(x)$的单侧极限.$f(x)$在 x_0 单侧极限有左极限 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$和右极限 $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$.

对于函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，有时必须讨论 $f(x)$ 在 x_0 左、右极限方能确定它的存在性. 例如讨论分段函数 $f(x)$ 在分界点 x_0 的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，只有当 $f(x)$ 在 x_0 点的左、右极限相等时，才说 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 的极限存在，否则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

［极限的性质］　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$（存在），则

(1)（惟一性）　极限值 A 是惟一的.

(2)（有界性）　$f(x)$ 是局部有界的，即存在 $\delta>0, M>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

(3)（保号性）　若 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

若存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$），则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

［极限四则运算法则］　设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$.

(2) $\lim f(x)g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$.

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$.

• 上述极限四则运算法则中，lim是函数当 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 时的极限符号. 该四则运算法则对于数列极限运算也成立，因为 $x_n=f(n), y_n=g(n)$.

• 设 $P_n(x), Q_m(x)$ 为多项式，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m>n;\\ \infty, & m<n.\end{cases}\quad(\text{其中 } a_0\neq 0, b_0\neq 0)$$

［复合函数极限运算］　设函数 $y=f(u), u=\varphi(x)$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，且 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(u_0)=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$.

［极限存在准则］　(1) 单调有界准则：单调有界数列必有极限.

(2) 夹逼准则：若 $0<|x-x_0|<\delta$，有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

3. 无穷小与无穷大

［无穷小与无穷大概念］　把极限为零的量称为无穷小；绝对值无限增大的变

量称为无穷大.

• 由无穷小的概念,如果 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)=0$,则 $f(x)$是当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的无穷小.通常无穷小是变量,但0是惟一可作为无穷小的数.

• 无穷大是变量,它是指自变量在某种趋向下(如 $x \to x_0$ 或 $x \to \infty$)对应的函数值 $f(x)$的变化趋势,其绝对值无限增大.无穷大必是无界的,但无界函数不一定是无穷大.

[无穷小的比较]　设 α,β 均为无穷小.

(1)高阶无穷小:若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,或 α 是比 β 低阶的无穷小.

(2)同阶无穷小:若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=C$(常数 $C\neq0$),则称 β 与 α 是同阶无穷小.

(3)等价无穷小:若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$,则称 β 与 α 是等价无穷小,记为 $\alpha\sim\beta$.

(4)k 阶无穷小:若$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=C$(常数 $C\neq0$),则称 β 为 α 的 k 阶无穷小.

[无穷小的性质]

(1)有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小.

(2)有界函数与无穷小的乘积为无穷小.

(3)如果 $f(x)$是无穷大,则$\frac{1}{f(x)}$是无穷小;如果 $f(x)$是无穷小,且 $f(x)\neq0$,则$\frac{1}{f(x)}$是无穷大.

(4)若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$,则 $f(x)=A+\alpha$(α 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小);反之,若 $f(x)-A=\alpha$ 是无穷小,则$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$.

• 利用有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小求极限,是极限计算中常用到的一种方法,值得注意.

• 性质(1)中若把“有限个”改为“无穷多个”,则结论不一定成立.例如,$x_n=\frac{1}{n^p}+\frac{2}{n^p}+\cdots+\frac{n-1}{n^p}$,当 $n\to\infty$,$p>1$ 时 x_n 中每一项都是无穷小,且它有无穷多项,如果 $p=\frac{3}{2}$,则

$$x_n=\frac{1}{n^{3/2}}+\frac{2}{n^{3/2}}+\cdots+\frac{n-1}{n^{3/2}}=\frac{1}{n^{3/2}}\cdot\frac{n(n-1)}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^{3/2}}=+\infty.$$

可见无穷多个无穷小之和也可能为无穷大.

如果 $p=2$，x_n 中各项仍都为无穷小，这时

$$x_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n-1}{2n},$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

可见无穷多个无穷小之和可能为某个定数. 当然，无穷多个无穷小之和也有可能为 0，即为无穷小. 所以无穷小的运算性质(1)，(2)仅对有限个无穷小成立.

[等价无穷小的代换定理]　设 α,β 均为无穷小，且 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，如果 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$.

• 常见的几种等价无穷小：当 $x\to0$ 时，

$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$a^x-1\sim x\ln a$，$\sqrt[n]{1+x}\sim1+\frac{x}{n}$.

• 利用等价无穷小的代换求极限，一般仅在对无穷小作乘除运算时使用.

4. 函数的连续性

[连续性概念]　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

上述函数连续性概念的等价定义是：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

左连续：$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$. 右连续：$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$.

• 函数在一点连续的充要条件是它在该点左右连续. 对于分段函数，常常需要讨论它在分界点的左连续和右连续，以便确定它在该点是否连续.

• 函数 $f(x)$ 在 x_0 连续有三个要素，即有定义，有极限，极限值等于函数值. 如果函数在一点 x_0 的三个要素有一个不满足，则它在该点间断.

[间断点分类]　第一类间断点：$f(x)$ 在 x_0 间断，但它在 x_0 的左右极限都存在.

(1)可去间断点：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(存在)，但 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处无定义，或者 $f(x_0)\neq A$.

(2)跳跃间断点：$f(x)$ 在 x_0 处的左右极限存在但不相等.

第二类间断点：$f(x)$ 在 x_0 的左、右极限至少有一个不存在.

第二类间断点中，常见的有无穷间断点和振荡间断点. 若 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\infty$，或 $\lim\limits_{x_0\to+0}f(x)=\infty$，则 x_0 是 $f(x)$ 的无穷间断点. 如：$x=0$ 是 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 的无穷间断

点.若 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ 不存在,但并非为无穷大,则 x_0 是 $f(x)$ 的振荡间断点,如 $x=0$ 是 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 的振荡间断点等.

[连续函数的性质] (1)设 $f(x),g(x)$ 都在点 x_0 连续,则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ 也在点 x_0 连续;当 $g(x_0)\neq 0$ 时,$\frac{f(x)}{g(x)}$ 在点 x_0 也连续.

(2)若 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处连续,$u_0=\varphi(x_0)$,$f(u)$ 在 u_0 处连续,则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在 x_0 连续.

(3)初等函数在其定义区间上是连续的.

[闭区间上连续函数的性质] 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续.

(1)(介值定理)若 $f(a)\neq f(b)$,则对任意介于 $f(a),f(b)$ 之间的数 μ,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=\mu$.

(2)(零值定理)若 $f(a)\cdot f(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

(3)(最大值最小值定理) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少取得最大值和最小值各一次.

(4) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界的.

二、答疑及典型例题解析

函数概念

例 1 下列各题中函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x)=|x|$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;(2) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$.

答 (1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同.因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同,对应法则 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ 也相同.

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.因为它们的定义域不同:$f(x)$ 的定义域为 $x\neq 0$,而 $g(x)$ 的定义域为 $x>0$.

例 2 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,求下列函数的定义域:

(1) $f(x^2)$;(2) $f(x+a)+f(x-a)\,(a>0)$;(3) $f(\ln x)$;(4) $f(\arctan x)$.

解 因为 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,所以

(1)由 $0\leqslant x^2\leqslant 1$ 解得 $-1\leqslant x\leqslant 1$,故 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1,1]$.

(2)由于 $f(x+a)$ 与 $f(x-a)$ 定义的公共部分是 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域,故

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\quad 即\quad\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$$

因为 $a>0$,所以当 $a>\frac{1}{2}$ 时上述不等式组无解;当 $1-a\geqslant a$,即 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时不等式组有解,其解为 $a\leqslant x\leqslant 1-a$.故 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $[a,1-a]$.

(3)由 $0\leqslant \ln x\leqslant 1$,解得 $1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$,故 $f(\ln x)$ 的定义域为 $[1,\mathrm{e}]$.

(4)由 $0\leqslant \arctan x\leqslant 1$,解得 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$,故 $f(\arctan x)$ 的定义域为 $[0,\frac{\pi}{4}]$.

例 3　已知 $f(x)=\frac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$,求 $f(x)$ 的定义域及 $f[f(-7)]$.

解　要使 $f(x)$ 有意义,则应有 $\begin{cases}3-x>0,\\ 3-x\neq 1,\\ 49-x^2\geqslant 0.\end{cases}$ 解之,得 $-7\leqslant x<2,2<x<3$. 即 $f(x)$ 的定义域为 $[-7,2)\cup(2,3)$.

因为 $f(-7)=\frac{1}{\lg 10}=1$,所以 $f[f(-7)]=f(1)=\frac{1}{\lg 2}+4\sqrt{3}$.

例 4　设 $f(x+\frac{1}{x})=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}+\sin(x^2+\frac{1}{x^2})+2$,求 $f(x)$.

解　$f(x+\frac{1}{x})=\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-1}+\sin[(x+\frac{1}{x})^2-2]+2$.

令 $x+\frac{1}{x}=t$,则 $f(t)=\sqrt{t^2-1}+\sin(t^2-2)+2$,故

$$f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sin(x^2-2)+2.$$

例 5　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1;\\ 0, & |x|=1;\\ -1, & |x|>1.\end{cases}$　$g(x)=\mathrm{e}^x$,求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

解　$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |\mathrm{e}^x|<1;\\ 0, & |\mathrm{e}^x|=1;\\ -1, & |\mathrm{e}^x|>1.\end{cases}$

从中确定 x 的取值范围.由 $|\mathrm{e}^x|<1$,则 $x<0$;由 $|\mathrm{e}^x|=1$,得 $x=0$;由 $|\mathrm{e}^x|>1$,得 $x>0$.于是得 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0;\\ 0, & x=1;\\ -1, & x>0.\end{cases}$

$$g[f(x)]=\mathrm{e}^{f(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1;\\ 1, & |x|=1;\\ \frac{1}{\mathrm{e}}, & |x|>1.\end{cases}$$

例 6　设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x>1,\\ 2x, & x\leqslant 1;\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0;\\ x^2, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

解 $f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)>1; \\ 2\varphi(x), & \varphi(x)\leqslant 1. \end{cases}$ 当 $x<-1$ 时,$\varphi(x)>1$;当 $-1\leqslant x<0$ 时,$\varphi(x)\leqslant 1$;当 $x>0$ 时 $\varphi(x)\leqslant 1$.故

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{x^2}, & x<-1; \\ 2x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0; \\ 2\sin x, & x>0. \end{cases}$$

例 7 (1)判断函数 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 在区间$(-1<x<1)$内的奇偶性.

(2)设 $f(x)=\begin{cases} \varphi(x), & x<0; \\ 0, & x=0; \\ x-\dfrac{1}{x}, & x>0. \end{cases}$ 求使 $f(x)$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内为偶函数的 $\varphi(x)$.

解 (1)因为

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1-e^x}{1+e^x}\left[-\ln\frac{1-x}{1+x}\right]$$
$$=\frac{e^x-1}{e^x+1}\ln\frac{1-x}{1+x}=f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2)要使 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内为偶函数,当 $x<0$ 时,$-x>0$,$\varphi(x)$的值应与 $x-\dfrac{1}{x}(x>0)$在对称点的值相等.故

$$\varphi(x)=-x-\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}-x.$$

例 8 证明:定义在区间$(-l,l)$上的任意函数 $f(x)$ 可以表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证 令 $g(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$,$h(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$.因为

$$g(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=g(x),$$

$$h(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-h(x),$$

所以 $g(x)$ 是偶函数,$h(x)$ 为奇函数.又因为

$$g(x)+h(x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=f(x),$$

所以 $f(x)$ 可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

例 9 设$(b+c)\sin(b+c)=(a+c)\sin(a+c)$,$a,b,c$ 均为常数,求 c.

解 令 $f(x)=x\sin x$,则由题设有 $f(b+c)=f(a+c)(a\neq b)$.因为 $f(x)$ 是

偶函数,所以 $b+c=-(a+c)$,即 $c=-\frac{1}{2}(a+b)$.

例 10　设对一切 x,有 $f(x+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$,证明 $f(x)$是以 1 为周期的周期函数.

证　$f(x+1)=f[\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}+x)]=\frac{1}{2}+\sqrt{f(\frac{1}{2}+x)-f^2(\frac{1}{2}+x)}$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}=\frac{1}{2}+\sqrt{[\frac{1}{2}-f(x)]^2},$$

由题意知 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}$,所以

$f(x+1)=\frac{1}{2}+f(x)-\frac{1}{2}=f(x)$,即 $f(x)$是以 1 为周期的周期函数.

例 11　设 $f(x)$为奇函数,$f(1)=a$,且 $f(x+2)-f(x)=f(2)$.(1)试将 $f(3)$,$f(5)$用 a 表示;(2)当 a 取何值时 $f(x)$以 2 为周期.

解　(1)取 $x=-1$,得 $f(1)-f(-1)=f(2)$,这是因为 $f(x)$为奇函数,所以 $f(-1)=-f(1)$.故

$$f(2)=f(1)-[-f(1)]=2f(1)=2a.$$

取 $x=1$,得 $f(3)-f(1)=f(2)$,从而 $f(3)=f(1)+f(2)=3a$.

取 $x=3$,得 $f(5)-f(3)=f(2)$,故

$$f(5)=f(2)+f(3)=2a+3a=5a.$$

(2)要使 $f(x)$以 2 为周期,对一切 x 必须有 $f(x+2)=f(x)$,显然对于 $x=0$,有 $f(2)=f(0)$.又当 $x=0$ 时,由 $f(x+2)-f(x)=f(2)$知,$f(0)=0$,从而 $f(2)=2a=0$,故 $a=0$.

例 12　设 $f(x)$为定义在$(-l,l)$内的奇函数,若 $f(x)$在$(0,l)$内单调增加,证明 $f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加.

证　在$(-l,0)$内任取 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,现证明 $f(x_1)<f(x_2)$.

因为 $x_1<x_2$,所以 $-x_1>-x_2>0$,已知 $f(x)$在$(0,l)$内单调增加,从而有 $f(-x_2)<f(-x_1)$.又因为 $f(x)$是奇函数,所以 $f(-x_2)=-f(x_2)$,$f(-x_1)=-f(x_1)$,故有 $-f(x_2)<-f(x_1)$,即 $f(x_2)>f(x_1)$,这说明了 $f(x)$在$(-l,0)$内单调增加.

极限

例 13　"对于任给 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<k\delta$ 时,有$|f(x)-A|<r\varepsilon$(其中 k,r 为确定的正数)",这种表述是否可作为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义?

答　可以. 因为 ε 是任意给定的正数,所以令 $\varepsilon_1 = r\varepsilon$ 也是任意正数;又令 $\delta_1 = k\delta$,存在 δ 时,也就是存在 δ_1,因此上面的表述就是:对任给的 $\varepsilon_1>0$,存在 $\delta_1>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon_1$. 这与 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的定义一样,所以上面表述可以看作是与 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 等价的定义.

例 14　若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = |a|$. 并举例说明其逆命题未必成立.

证　因为 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$,所以任给 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n>N$ 时 $|u_n-a|<\varepsilon$. 而

$$||u_n|-|a||\leqslant|u_n-a|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.

逆命题未必成立,例如数列 $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$,其各项加绝对值后的数列为 $1,1,1,1,\cdots,1,\cdots$ 收敛,而数列 $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$ 是发散的.

例 15　对于数列 $\{x_n\}$,若 $x_{2k-1}\to a$(当 $k\to\infty$),$x_{2k}\to a$(当 $k\to\infty$),证明:$x_n\to a$(当 $n\to\infty$).

证　任给 $\varepsilon>0$,因为 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$,所以存在 k_1,当 $2k-1>2k_1-1$ 时,$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$. 又因为 $x_{2k}\to a(k\to\infty)$,所以存在 k_2,当 $2k>2k_2$ 时,$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立,故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

例 16　证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

证　$\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2|x|^3}$. 任给 $\varepsilon>0$,要使 $\dfrac{1}{2|x|^3}<\varepsilon$,只要 $|x|>\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$. 取 $X=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$,则当 $|x|>X$ 时,就有 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

利用极限定义证明数列极限和函数极限时,由解不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 求 n 找 N 若有困难,或从 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 中找 δ 或 X 有困难时,可以通过对不等式"放大与缩小","添加限制条件"等方式来做简化处理. 因为定义中只要求说明存在 N,或 X 或 δ,而没有要求找到最小的 N,或最大的 X,或最大的 δ. 所以上述处理不等式的方法是不违背极限定义的.

例 17　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

分析　要直接从 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$ 中解出 n 是困难的,这里通过放大不等式的方法来简化求 n 的计算.

令 $\sqrt[n]{n}-1=a$,则 $\sqrt[n]{n}=1+a$,当 $n>2$ 时,

$$n=(1+a)^n=1+na+\frac{n(n-1)}{2!}a^2+\cdots+a^n$$

$$> \frac{n(n-1)}{2!}a^2 > \frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}a^2 = \frac{n^2a^2}{4},$$

即 $n > \frac{n^2}{4}a^2$,从而 $a < \frac{2}{\sqrt{n}}$.故有$\sqrt[n]{n} - 1 = a < \frac{2}{\sqrt{n}}$.

证　任给 $\varepsilon > 0$,由分析知,只要从

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

的后一不等式求得 n 即得证明.由不等式解得 $n > \frac{4}{\varepsilon^2}$,取 $N = \max\{2, \frac{4}{\varepsilon^2}\}$,则当 $n > N$ 时,便有 $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$.故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

例 18　当 $x\to 2$ 时,$y = x^2 \to 4$,问 δ 等于多少,就有 $|x-2| < \delta$ 时,$|y-4| < 0.001$?

分析　先从 $\lim\limits_{x\to 2}x^2 = 4$ 的一般证明中得出应取怎样的 δ,然后由 $|y-4| < 0.001 = \varepsilon$ 再得到使之成立的 δ 值.

解　$|x^2-4| = |x+2||x-2|$,当 $x\to 2$ 时,对 x 添加限制条件 $1 < x < 3$(即 $|x-2| < 1$).则 $|x+2| < 5$,从而 $|x+2||x-2| < 5|x-2|$.任给 $\varepsilon > 0$,要使 $5|x-2| < \varepsilon$,只要 $|x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$.取 $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$,则当 $0 < |x-2| < \delta$ 时,便有 $|x^2-4| < \delta$.

当 $\varepsilon = 0.001$ 时,只要 $\delta = \min\{1, \frac{0.001}{5}\} = 0.0002$,即当 $|x-2| < 0.0002$ 时,就可使 $|y-4| < 0.001$.

例 19　证明:如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在,则函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有界.

证　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$,由函数极限的定义,取 $\varepsilon = 1$,则存在 $\delta > 0$,当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时,有 $|f(x) - A| < 1$,从而当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时,就有

$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leqslant |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|$,取 $M = 1 + |A|$,则在 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有 $|f(x)| < M$.这就证明了 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有界.

例 20　$y = x\cos x$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内是否有界?又当 $x\to +\infty$ 时,这个函数是否为无穷大?为什么?

分析　无穷大必然是无界的,而函数无界未必是无穷大,这是因为:无穷大要求 $0 < |x-x_0| < \delta$ 或 $|x| > X$ 时,对任意的 $M > 0$,都有 $|f(x)| > M$;而函数无界是以否定它有界来定义的,只要存在一个 x 使 $|f(x)| > M$,则 $f(x)$ 无界.

解　对于任意大的正数 M,在 $(-\infty, +\infty)$ 内总有使 $|y(x)| > M$ 的点 x,如

取 $x=2k\pi$（k 为整数），且 $|k|>\frac{M}{2\pi}$，则有

$$|y(2k\pi)|=|2k\pi|=2\pi|k|>2\pi\cdot\frac{M}{2\pi}=M>0,$$

所以 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

函数 $y=x\cos x$ 当 $x\to+\infty$ 时不是无穷大，这是因为对任意正数 $M_1>0$，存在 $X>0$，但对 $x>X$ 的一切 x，不能保证 $|y(x)|>M_1$.

例如，$\left|y\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|=\left|\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|\left|\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|=0<M_1$（$k$ 为正整数）.所以 $y=x\cos x$ 当 $x\to+\infty$ 时不是无穷大.

例 21 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$，$\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 1$，所以由有界函数与无穷小之积为无穷小这一性质，得

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0.$$

例 22 求函数 $f(x)=\frac{1-a^{1/x}}{1+a^{1/x}}$（$a>0$）当 $x\to0$ 时的左、右极限，并说明当 $x\to0$ 时函数 $f(x)$ 的极限是否存在.

解 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}\frac{1-a^{1/x}}{1+a^{1/x}}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{a^{-1/x}-1}{a^{-1/x}+1}=-1,$

$$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{1-a^{1/x}}{1+a^{1/x}}=1.$$

由于 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-0}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

例 23 证明数列 $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$ 的极限存在.

证 证明数列的极限存在，主要利用单调有界数列必有极限这一准则.

显然，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}>x_n$（$n=1,2,\cdots$），所以 $\{x_n\}$ 为单调增数列.

下面证 $\{x_n\}$ 有上界.

因为 $x_1=\sqrt{2}<2$，设 $x_k<2$，则 $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}<2$.所以由归纳法知 $x_n<2$（$n=1,2,\cdots$），即 $\{x_n\}$ 有上界.由极限存在准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

例 24 设 $a>0$，$x_0>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$，$n=0,1,\cdots$，证明数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时极限存在，并求这个极限.