中国名校名师精讲系列丛书

新世纪版

同步精讲精练

主编 陈海燕 郭庆祥

本册主编 蒋金生 陈维嘉

北京最著名六所中学强强联合编写组 编写

初二数学·上

▲北京汇文中学 ▲北京市第二中学

▲北京师范大学附属中学 ▲北京师范大学附属实验中学

▲北京市第四中学 ▲中国人民大学附属中学

中国少年儿童出版社

中国名校名师精讲系列丛书

同步精讲精练

初二数学（上）

主　编

陈海燕　郭庆祥

本册主编

蒋金生　陈维嘉

中国少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

同步精讲精练.初二数学/蒋金生等编著.-北京:中国少年儿童出版社,2000.6
(中国名校名师精讲系列丛书)
ISBN 7-5007-5286-5

Ⅰ.同… Ⅱ.蒋… Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 09036 号

主持编辑:陈效师
封面设计:周建明
责任编辑:赵惠宗
吴几滨

*

中国少年儿童出版社 出版发行

廊坊人民印刷厂印刷 新华书店经销

*

850×1168 1/32 5.5 印张 286 千字
2002 年 8 月北京第 3 版 2002 年 8 月廊坊第 3 次印刷
本次印数 20001—45000 册 定价:6.00 元
凡有印装问题,可向承印厂调换

中国名校名师精讲系列

丛书编委会

本册主编

蒋金生　北京汇文中学数学教研组组长
　　　　高级教师
　　　　北京市崇文区学科带头人
陈维嘉　北京汇文中学副校长
　　　　高级教师

作　　者

田云成　北京汇文中学高级教师
段丽萍　北京汇文中学

目 录

代 数 第二册(上)

几　何 第二册(上)

·代 数·

第八章　因式分解

一、教学目标

课　题	内　　容	要求				
		感知	记忆	理解	掌握	应用
因式分解	因式分解的概念			√		
	提取公因式法					√
	运用公式法					√
	分组分解法					√
	其它方法		√			

二、知识结构

本章教材提出因式分解的意义，明确概念后，给出了因式分解的三种基本方法：提取公因式法，应用公式法，分组分解法．此处对一些技巧性较强的其它方法也应有所了解．如：换元法、待定系数法、拆项或补项法，双十字相乘法等．

三、各节要点及例题分析

把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做把这个多项式因式分解.

8-1 提公因式法

【本节要点】

根据乘法分配律，利用提取公因式进行因式分解.

$ma+mb+ml=m(a+b+c)$.

【例题与分析】

例 1 把下列各式分解因式：

(1)$3a^2b^7-12a^3b^4$

(2)$-x^3y^4+x^2y^3-x^2y^2$

(3)a^m+a^{m+1}(m 为自然数)

(4)$(b+c)m+(c+a)m+(a+b)m$

解：(1)$3a^2b^7-12a^3b^4=3a^2b^4(b^3-4a)$

(2)$-x^3y^4+x^2y^3-x^2y^2=-x^2y^2(xy^2+y+1)$

(3)$a^m+a^{m+1}=a^m(1+a)$

(4)$(b+c)m+(c+a)m+(a+b)m$

$=m(b+c+c+a+a+b)=m(2a+2b+2c)$

$=2m(a+b+c)$

注意：(1)提取公因式时，系数要提取它们各项系数的最大公约数，字母提取各项相同字母的最低次幂；(2)在提出的公因式中的系数是负的时，注意括号内各项都要变号；(3)若其中的某项就

为公因式时，提出公因式后，这项的位置是 1；(4)提取公因式一定要进行到不能分解而止. 如(4)中 $m(2a+2b+c)$要分解为 $2m(a+b+c)$.

例 2 把下列各式分解因式：

(1)$m(x+y)+2n(x+y)$

(2)$m(a-b)+n(b-a)$

(3)$a^2(x-2b)^2+a(2b-x)^2$

(4)$(a-b)^2(a+b)^3-(b-a)^3(a+b)^2$

(5)$(m-2)^2-m+2$

解：(1)$m(x+y)+2n(x+y)=(x+y)(m+2n)$

(2)$m(a-b)+n(b-a)=m(a-b)-n(a-b)$

$=(a-b)(m-n)$

(3)$a^2(x-2b)^2+a(2b-x)^2=a^2(x-2b)^2+a(x-2b)^2$

$=a(a+1)(x-2b)^2$

(4)$(a-b)^2(a+b)^3-(b-a)^3(a+b)^2$

$=(a-b)^2(a+b)^3+(a-b)^3(a+b)^2$

$=(a-b)^2(a+b)^2(a+b+a-b)=2a(a-b)^2(a+b)^2$

(5)$(m-2)^2-m+2=(m-2)^2-(m-2)$

$=(m-2)(m-2-1)=(m-2)(m-3)$

注意：在提取公因式时，特别要注意下列变形：

$b-a=-(a-b)$；$(b-a)^2=(a-b)^2$；$(b-a)^3=-(a-b)^3$；

练 习 8-1

把下列各式分解因式：

1. (1)$15x^3-20x^2$

(2)$3a^2b-27a^3b^2$

(3) $-x^3y^3-x^2y^2+xy$

(4) $a^{m+1}b^n-a^{m+2}b^{n+1}$（其中 m、n 为自然数）

2. (1) $(a+b)^3-2ab(a+b)$

(2) $x(a+b-3c)-(a+b-3c)$

(3) $5(x-y)^2-3(y-x)^2$

(4) $x^3y^2(x-y)^3-x^2y^3(y-x)^2$

(5) $(a-b)(a-c)+(b-a)(b-c)$

(6) $(x+y-z)(x-y+z)+(y-x+z)(y-x-z)$

(7) $x^2(x+y)(y-x)-xy(x+y)(x-y)$

(8) $(x+1)^2(2x-3)+(x+1)(2x-3)^2-(x+1)(3-2x)$

3. (1) $x(b+c-d)-y(d-b-c)-b-c+d$

(2) $(x+y)^2-x-y$

(3) y^3+y^2+4y+4

(4) $a^2-2ab-a+2b$

4. (1) $-12a^{2m+1}b^{m+2}+20a^{m+1}b^{2m+4}$;（$m$ 为自然数）

(2) $(a-2)^{n+2}-4(a-2)^n$;（n 为自然数）

(3) $c(b^2-a^2)+c^2(a+b)-ab(a+b)$;

5. **判断下列各题的变形是否为因式分解？**

(1) $x^3+x^2+x-1=x(x^2+x+1)-1$

(2) $(x+y)^2-m(x+y)=(x+y)(x+y-m)$

(3) $a(x+y-1)=ax+ay-a$

8-2　运用公式法

【本节要点】

逆用乘法公式，就可以把某些多项式分解因式．这种分解因式

方法叫做运用公式法.常用的公式有：

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b);$$
$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2;$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

【例题与分析】

例 1　把下列各式分解因式：

(1)a^2b^2-4

(2)$(x+y)^2+6(x+y)+9$

(3)$36x^4-12x^2y+y^2$

解：(1)$a^2b^2-4=(ab)^2-2^2=(ab+2)(ab-2)$

(2)$(x+y)^2+6(x+y)+9=(x+y)^2+2\cdot(x+y)\times3+3^2$

$=(x+y+3)^2$

(3)$36x^4-12x^2y+y^2=(6x^2)^2-2\cdot6x^2\cdot y+y^2=(6x^2-y)^2$

例 2　把下列各式分解因式：

(1)a^5b-ab^5

(2)$(x^2+y^2)^2+4xy(x^2+y^2)+4x^2y^2$

解：(1)$a^5b-ab^5=ab(a^4-b^4)=ab(a^2+b^2)(a^2-b^2)$

$=ab(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

$=ab(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

(2)$(x^2+y^2)^2+4xy(x^2+y^2)+4x^2y^2$

$=(x^2+y^2)^2+2\cdot(x^2+y^2)\cdot2xy+(2xy)^2$

$=(x^2+y^2+2xy)^2=[(x+y)^2]^2=(x+y)^4$

注意：(1)如果多项式的各项含有公因式，则先提取公因式，再进一步分解因式.

(2)分解因式，必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为

止.

(3)运用公式法分解因式时,关键在于掌握公式的形式和特点,要广义理解公式里字母的意义,公式里的各个字母可以代表一个数式一个单项式,也可以代表一个多项式.

(4)在应用公式时,首先要根据多项式的项数、符号、系数、指数诸方面的特征,确定所要使用的公式,然后将多项式变形为符合公式的形式,最后运用公式完成因式分解.

例 3 证明 $4x(x-1)^2-x(2x+5)^2=-7x\cdot(4x+3)$是恒等式.

证明:左式$=x[4(x-1)^2-(2x+5)^2]$

$=x[2(x-1)+(2x+5)][2(x-1)-(2x+5)]$

$=x(2x-2+2x+5)(2x-2-2x-5)$

$=-7x(4x+3)$

右式$=-7x(4x+3)$

$\therefore 4x(x-1)^2-x(2x+5)^2=-7x(4x+3)$是恒等式.

例 5 求证:两个连续偶数的平方差能够被 4 整除.

证明:设两个连续偶数分别为 $2n$ 和 $2n+2$(n 为自然数).

那么:$(2n+2)^2-(2n)^2$

$=(2n+2+2n)(2n+2-2n)$

$=2(4n+2)=4(2n+1)$

因为 $4(2n+1)$能被 4 整除,所以两个连续偶数的平方差能被 4 整除.

练　习 8-2

把下列各式分解因式:

1. (1)x^4-y^4　　(2)x^6-y^6

(3)x^6+y^6　　(4)x^9+y^9

(5)$a^6-81a^2b^4$　　(6)$625a^4-256$

(7)$a^2(a-b)+b^2(b-a)$

(8)$a^4(a^4-1)-a^4+1$

(9)$(5x^2-13y^2)^2-16(x^2-3y^2)^2$

(10)$(x-2)^2-(2-x)^4$

2. (1)$1-4(a+b)+4(a+b)^2$

(2)$(x-y)^3-4(x-y)^2+4(x-y)$

(3)$289a^2(x+y)^2+68a(x+y)+4$

(4)$4a^2+36b^4-24ab^2$

(5)$\dfrac{(a-b)^2}{4}+a-b+1$

(6)$2x^2y^2-x^4-y^4$

(7)$x^{2n+4}-2x^{n+3}+x^2$(n 为自然数)

(8)$\dfrac{(x-y)^2}{4}+3(x^2-y^2)+9(x+y)^2$

3. 已知:$x+y=0$,求证:$(x^2+y^2)^2-4x^2y^2=0$.

4. 利用因式分解证明下列恒等式:

$(5x-11)^2-2(5x-11)(5x-9)+(5x-9)^2=4$

5. (1)求证两个连续奇数解平方差能被 8 整除;

(2)求证奇数的平方减 1 能被 8 整除;

(3)求证三个连续自然数的平方和是 9 的倍数.

8-3　分组分解法

【本节要点】

把一个多项式利用分组来分解因式的方法叫做分组分解法.

分组分解法的两个原则是分组后可以直接提公因式，或者分组后可直接运用公式．掌握分组分解法的分组原则是本节的重点；合理选择分组方法是本节的关键．

【例题与分析】

例 1 把下列各式分解因式：

(1)$a^2-ab-ac+bc$

(2)$5x(a-b)-a+b$

解：(1)$a^2-ab-ac+bc=(a^2-ab)-(ac-bc)$

$=a(a-b)-c(a-b)=(a-b)(a-c)$；

(2)$5x(a-b)-a+b=5x(a-b)-(a-b)=(a-b)(5x-1)$

说明：(1)使用分组分解法，必须合理选择适当的分组方法，以便分组后能继续进行分解；

(2)在适当分组时，经常要用到加法的交换律和结合律，以及去、添括号法则．

例 2 把下列各式分解因式：

(1)$a^2+3a-ab-3b$

(2)$mn-4xy+4my-nx$

(3)$4ab-3ac+8b-6c$

解：(1)$a^2+3a-ab-3b=(a^2+3a)-(ab+3b)$

$=a(a+3)-b(a+3)=(a+3)(a-b)$

(2)$mn-4xy+4my-nx=(mn-nx)+(4my-4xy)$

$=n(m-x)+4y(m-x)=(m-x)(n+4y)$

(3)$4ab-3ac+8b-6c=(4ab-3ac)+(8b-6c)$

$=a(4b-3c)+2(4b-3c)=(4b-3c)(a+2)$

说明：(1)选择系数成比例的各项分组，是适当分给的原则之

一.

(2)很多情况下分组的方法不唯一,但因式分解的最后结果是一致的.

例 3 把下列各式分解因式:

(1)$a^2-b^2-3a-3b$ (2)$1-a^2-b^2+2ab$

(3)$m^2+2mn+n^2-am-an$ (4)$x^3+y^3-x^2y-xy^2$

解:(1)$a^2-b^2-3a-3b=(a^2-b^2)-(3a+3b)$

$=(a+b)(a-b)-3(a+b)=(a+b)(a-b-3)$

(2)$1-a^2-b^2+2ab=1-(a^2-2ab+b^2)$

$=1-(a-b)^2=[1+(a-b)][1-(a-b)]$

$=(a-b+1)(1-a+b)$

(3)$m^2+2mn+n^2-am-an$

$=(m^2+2mn+n^2)-(am+an)=(m+n)^2-a(m+n)$

$=(m+n)(m+n-a)$

(4)$x^3+y^3-x^2y-xy^2=x^3-x^2y-(xy^2-y^3)$

$=x^2(x-y)-y^2(x-y)$

$=(x-y)(x^2-y^2)$

$=(x-y)(x-y)(x+y)$

$=(x-y)^2(x+y)$

说明:分组时要根据题目的不同情况可二·二分组,也可一·三分组或其它分组方法,但选择符合使用公式条件分组,是我们适当分组的原则之二.

例 4 把下列各式分解因式:

(1)$ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$

(2)$a(a-1)(a-2)-6$

(3)$a^2b^2+4a-4-(a^2+4ab^2-4b^2)$

分析:有些多项式不能直接按一般步骤因式分解,应对它们先进行适当变形,然后根据具体情况,使用适当的方法分解因式.

解:(1)$ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$

$=abx^2+aby^2+xya^2+xyb^2=(abx^2+xyb^2)+(aby^2+xya^2)$

$=bx(ax+by)+ay(ax+by)=(ax+by)(bx+ay)$

(2)$a(a-1)(a-2)-6=a^3-3a^2+2a-6$

$=(a^3-3a^2)+(2a-6)=a^2(a-3)+2(a-3)$

$=(a-3)(a^2+2)$

(3)$a^2b^2+4a-4-(a^2+4ab^2-4b^2)$

$=a^2b^2+4a-4-a^2-4ab^2+4b^2$

$=(a^2b^2-4ab^2+4b^2)-(a^2-4a+4)$

$=b^2(a^2-4a+4)-(a^2-4a+4)$

$=(a^2-4a+4)(b^2-1)=(a-2)^2(b+1)(b-1)$

例 5 把下列各式分解因式:

(1)x^3-3x+2

(2)x^4-23x^2+1

(3)x^4+4

解:(1)$x^3-3x+2=x^3-x-2x+2$

$=x(x^2-1)-2(x-1)=x(x+1)(x-1)-2(x-1)$

$=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)^2(x+2)$

(2)$x^4-23x^2+1=x^4+2x^2+1-25x^2$

$=(x^2+1)^2-(5x)^2=(x^2+5x+1)(x^2-5x+1)$

(3)$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2$

$=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$

例 6 把下列各式分解因式:

(1)$x^2+12x+11$