WEI JI FEN
XI TI XUAN JIE

微积分习题选解

齐国政

微积分习题选解

齐国政

内蒙古人民出版社

1981年·呼和浩特

微 积 分 习 题 选 解

齐 国 政

*

内蒙古人民出版社出版
(呼和浩特市新城西街82号)
内蒙古新华书店发行　内蒙古新华印刷厂印刷
开本：850×1168 1/32 印张：19.125 字数：470千
1980年9月第一版　1981年7月第1次印刷
印数：1-16,800册
统一书号：7089·154　每册：1.85元

前　言

数学是打开科学技术大门的钥匙。由笛卡儿奠基，由牛顿、莱布尼兹完成的微积分学，是数学的一个重要分支，是十七世纪的一个最伟大的成就，它是研究现实世界中变量变化规律的一门科学。它的出现突破了只能在有限范围内孤立地讨论问题的局限性，而是在变化过程中来考察、分析、研究问题，它的特点是成功地运用了无限过程的运算——极限运算。微分过程和积分过程确立了微积分学的核心。由此起源产生了数学的一些主要的新分支，如微分方程、无穷级数、微分几何、变分法、复变函数、泛函分析和概率论等等。目前，微积分学的理论和应用已经渗透到各个科学领域，成为人类认识自然、改造自然的重要工具。

我国获得国际“戴维逊奖”的青年数学家侯振挺，少年时代曾给我国著名数学家华罗庚同志写信，请教怎样才能成为数学家？华罗庚同志热情地回信说：“你们的来信我已收到，你们长大后想当数学家，这很好，我祝愿你们能实现这个理想，不过还得从小就要努力……你们现在学习得怎样？不知你们做了几百个微积分习题呀！”近代美国数学家R.柯朗说：“微积分学，或者数学分析，是人类思维的伟大成果之一”“智力奋斗的结晶”，(见卡尔.B.波耶著《微积分概念史》，上海人民出版社1977年9月版）可见，微积分在数学研究中的重要地位和作用。革命导师马克思、恩格斯非常重视微积分学；他们曾利用空闲时间钻研微积分，演算微积分习题，马克思还写出了著名的《数学手稿》，对微积分的一些问题提出了精辟的、独到的见解。在为祖国实现现代化而奋斗的今天，我们也必须十分重视微积分的学习和研究，

肛87/03

现在，中学数学已经增加了微积分的内容，电视大学也开设了这门课程，一些工矿企业的业余大学也把微积分学作为主要课程之一。据此，编写了这本微积分题解，旨在为学习微积分的同志们参考。编写过程中，力求注意到基本概念、基本理论、基本方法的运用，兼顾普及和提高；依循序渐进的原则，由易到难，由浅入深，注意推理严密，技巧灵活，以达到提高分析问题和解决问题的能力。每章后面，有一定数量的练习题，以备读者习作，书后附有各练习题的提示或解答，便于自学。

由于编者的水平有限，不当之处，请读者批评指正。

编　者

1979年9月1日

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第四章 导数和微分

第五章 不定积分

第一章　函数和数列

内容提要

一　函数定义

函数是微积分学研究的基本对象，它反映了变量间的变化规律，揭示出变量间相互制约的关系．

函数定义　在某个变化过程中有两个互相联系着的变量x和y，如果对x的变化范围内的每一个值，y按一定法则有确定的值与之对应，则称y是x的函数，表示成

$$y=f(x)$$

其中x称**自变量**，y称**因变量**．

使函数y的值有意义的自变量x的取值范围，称为函数y的**定义域**或自变量x的**允许值**．

二　基本初等函数及其定义域

1　常数　$y=f(x)=c$（c为常数），其定义域为$(-\infty,\infty)$．

2　幂函数　$y=x^n$（n为实数），其定义域：当n为正整数时为$(-\infty,\infty)$；当n为零或负数时为$(-\infty,0)$、$(0,\infty)$；当n为分数时，令$n=\frac{q}{p}$（为既约分数），若$n>0$，p为奇数，其定义域为$(-\infty,\infty)$，p为偶数，其定义域为$[0,\infty)$，若$n<0$，p为奇数，其定义域为$(-\infty,0)$、$(0,\infty)$，p为偶数，其定义域

为$(0,\infty)$；当 n 为正无理数时，其定义域为$[0,\infty)$；当 n 为负无理数时，其定义域为$(0,\infty)$。

3 **指数函数** $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$，其定义域为$(-\infty,\infty)$.

4 **对数函数** $y=\log_a x$ $(a<0, a\neq 1)$，其定义域为$(0,\infty)$。

5 **三角函数** 正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$，其定义域为$(-\infty,\infty)$。

正切函数 $y=\operatorname{tg} x$ 与正割函数 $y=\sec x$，其定义域为 $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ （k 为整数）的所有实数，即一列开区间：…

$$\left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right), \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right), \cdots$$

余切函数 $y=\operatorname{ctg} x$ 与余割函数 $y=\csc x$，其定义域为 $x\neq k\pi$ （k 为整数）的所有实数，即一列开区间：……$(-2\pi,-\pi)$，$(-\pi,0)$，$(0,\pi)$，$(\pi,2\pi)$，$(2\pi,3\pi)$，…

6 **反三角函数** 反正弦函数 $y=\arcsin x$，其定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$。

反余弦函数 $y=\arccos x$，其定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$。

反正切函数 $y=\operatorname{arc\,tg} x$，其定义域为 $-\infty<x<\infty$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$。

反余切函数 $y=\operatorname{arc\,ctg} x$，其定义域为$-\infty<x<\infty$，值域为$(0,\pi)$。

反正割函数 $y=\operatorname{arc\,sec} x$，其定义域为 $|x|\geqslant 1$，值域为$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$。

反余割函数 $y=\operatorname{arc\,csc} x$，其定义域为 $|x|\geqslant 1$，值域为

$[-\frac{\pi}{2}, 0)$，$(0, \frac{\pi}{2}]$.

基本初等函数是构成初等函数的原料，而初等函数在微积分中的地位，又好象建筑物中的砖瓦等材料，因此要求对基本初等函数及其定义域要熟悉和掌握。

三 复合函数及其定义域

复合函数定义 如果 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，u 又是 x 的函数：$u=\varphi(x)$，那么就把由这两个函数复合而成的函数

$$y=f[\varphi(x)]$$

叫做 x 的复合函数，$u=\varphi(x)$ 叫做复合函数的中间函数，其定义域为 $u=\varphi(x)$ 的定义域中使函数 $y=f(u)$ 有定义的变量 x 的集合。

四 有（无）界函数、反函数、偶（奇）函数、单调函数和周期函数的定义

1 如果对于区间(a, b)的所有 x 值，恒有

$$|f(x)|<M$$

成立，其中M是一个与 x 无关的正常数，则称 $f(x)$是在区间(a, b)上的有界函数。

反之，如果对于任意给定的正数G，在区间(a, b)内恒有这样的x值存在，使

$$|f(x)|>G$$

则称函数 $f(x)$是在区间(a, b)上的无界函数。

2 设函数 $y=f(x)$，若把其中 y 看成自变量，x 看成因变量，这样所确定的函数

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$x=\varphi(y)$$

就叫做 $y=f(x)$ 的**反函数**。

3 如果函数 $y=f(x)$满足 $f(-x)=f(x)$，则称这个函数为**偶函数**；如果满足 $f(-x)=-f(x)$,则称这个函数为**奇函数**。

偶函数的图形对 y 轴对称；奇函数的图形对原点对称。

4 如果在区间(a, b)内任取两点x_1、x_2，且$x_1<x_2$,总有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2) \quad (\text{或} f(x_1)\geqslant f(x_2))$$

则称 $y=f(x)$在区间(a, b)为**单调增加**（或**单调减少**）。

如果在区间(a, b)内任取两点 x_1、x_2，且：$x_1<x_2$，总有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (\text{或} f(x_1)>f(x_2))$$

则称$y=f(x)$在区间(a, b)为**严格增加**（或**严格减少**）。

单调增加（或严格增加）的函数与单调减少（或严格减少）的函数，统称为**单调**（或**严格单调**）函数。

5 设函数 $y=f(x)$ 定义在(a, b)内，如果存在异于零的数 l，使定义域内每一个 x，满足

$$f(x+l)=f(x)$$

则称 $f(x)$是以 l 为周期的**周期函数**。

五　初等函数及其分类

1 **定义** 初等函数是可以用一解析表达式表示的函数，而这一函数是由基本初等函数经过有限次代数运算（加、减、乘、除、整数次乘方、开方）以及有限次的函数复合步骤所形成的，其定义域为它的各项的定义域的共同部分。

2 初等函数可分为代数函数和初等超越函数两大类，下面给出它们的定义：

设二元代数方程

$$F(x, y)=P_0(x)y^n+p_1(x)y^{n-1}+\cdots+P_{n-1}(x)y+ \\ +P_n(x)=0$$

其中n为正整数，系数$P_0(x)$，$P_1(x)$，…，$P_{n-1}(x)$，$p_n(x)$都是x的多项式，且$p(x)_0\neq0$,若一个函数$y=f(x)$能满足这个方程,则这个函数叫做代数函数.非代数函数的函数叫做超越函数.

由此可见代数函数中只含有代数运算.

只含有初等超越运算（无理数次乘方、对数化、三角函数运算和反三角函数运算）的超越函数叫做初等超越函数.

3　初等函数可按运算符号如下分类：

- 初等函数
  - 代数函数——式中含有代数运算.
    - 有理函数
      - 有理整函数.
      - 有理分函数.
    - 无理函数（方根号下有变量x）.
  - 初等超越函数（指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数）——式中含有初等超越运算.

Ⅰ 习 题 选 解

§1 函 数 概 念

1　在圆$x^2+y^2=R^2$上任取一点M，过点M作圆的内接矩形，其边平行于坐标轴，当点M沿圆周变动时，判别下列各量那些是常量那些是变量？(1)矩形边长；(2)对角线长；(3)矩形面积.

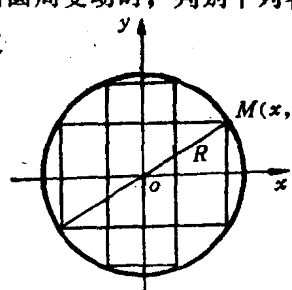


图1-1

解　设$M(x,y)$为圆$x^2+y^2=R^2$上任意一点，

则　$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$

(1)　矩形边长

$l=2x+2\sqrt{R^2-x^2}$

为变量，是 M 的横标 x 的函数，其定义域为 $-R<x<R$。

（2） 对角线长 $K=\sqrt{(2x)^2+(2\sqrt{R^2-x^2})^2}=2R$ 是常量，

（3） 矩形面积 $S=2x\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}$

$$=4x\sqrt{R^2-x^2}$$

是变量 x 的函数，其定义域为 $-R<x<R$。

2 变数 x 与 y 符合 $y=f(x)=ax+b$ 关系，已知 $x=x_1$ 时，$y=y_1$；$x=x_2(\neq x_1)$ 时，$y=y_2$，试求 x 与 y 的函数关系。

解 当 $x=x_1$ 时，$y_1=ax_1+b$，

当 $x=x_2$ 时，$y_2=ax_2+b$。

解联立方程：

$$\begin{cases}ax_1-y_1+b=0\\ax_2-y_2+b=0\end{cases}$$

$\because x_1\neq x_2$，$\therefore$ 得解：

$$a=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\qquad b=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}$$

所以其函数关系为：

$$f(x)=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}x+\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}$$

3 试求下列各函数值：

（1） 已知 $\varphi(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求 $\varphi(a)$；

（2） 已知 $f(x+2)=x^2+x+4$，求 $f(x)$ 和 $f(1)$；

（3） 已知 $f(x)=x^3-x$，$\varphi(x)=\sin 2x$，求

$f[\varphi(x)]$ 和 $\cos f\{f[f(1)]\}$；

（4）已知 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$，求 $f(a\,\mathrm{tg}x)$。

解（1） $\varphi(a)=\dfrac{|a-2|}{a+1}=\dfrac{a-2}{a+1}\ (a>2)$，

$$\varphi(a)=\frac{2-a}{a+1}\ (a<2),\varphi(a)=0\ (a=2)$$

(2) $\because f(x+2)=(x+2)^2-3(x+2)+6$

$\therefore f(x)=x^2-3x+6$，$f(1)=4$

(3) $f[\varphi(x)]=f[\sin 2x]=\sin^3 2x-\sin 2x$

$$=-\sin 2x\cos^2 2x$$

$$\cos f\{f[f(1)]\}=\cos f\{f[0]\}=\cos f\{0\}$$

$$=\cos o=1$$

(4) $f(a\operatorname{tg}x)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+a^2\operatorname{tg}^2 x}}=\dfrac{|\cos x|}{|a|}$

4 设

$$x(t)=\begin{cases}0 & 0\leqslant t<10\\ 1+t^2 & 10\leqslant t\leqslant 20\\ t-10 & 20<t\leqslant 30\end{cases}$$

试求 $x(0)$，$x(5)$，$x(10)$，$x(15)$，$x(20)$，$x(25)$，$x(30)$。

解 $x(0)=0$，$x(5)=0$，$x(10)=1+10^2=101$，

$x(15)=1+15^2=226$，$x(20)=1+20^2=401$，

$x(25)=25-10=15$，$x(30)=30-10=20$。

5 试画出函数 $y=|\sin x|$ 的图象。

解 先画出 $y=\sin x$ 的图形，然后把在 x 处 y 取负值的点 (x,y)，对称翻到 x 轴上面，即得函数图象，如下图实线部分。

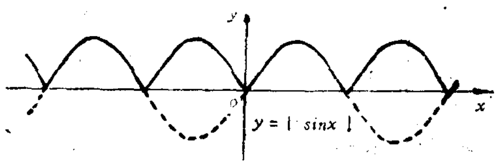


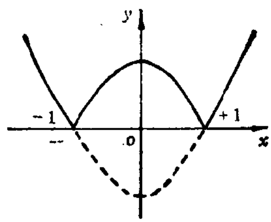
图1-2

6 设函数 $y=f(x)=x^2-3$，试画出

(1) $y=|f(x)|$

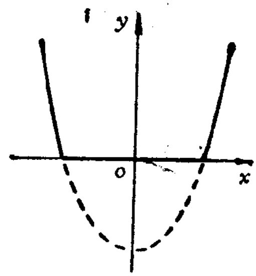
(2) $y=\frac{1}{2}[|f(x)|+f(x)]$

解



$y=|f(x)|$的图形

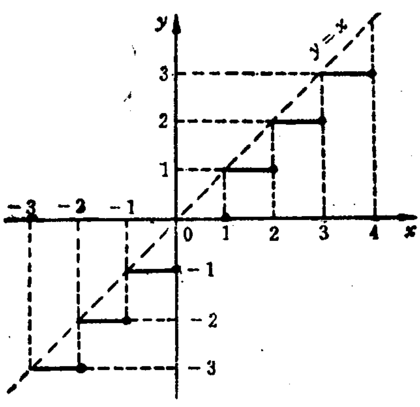
图1-3a



$y=\frac{1}{2}\left[|f(x)|+f(x)\right]$的图形

图1-3b

7　试画出函数 $y=[x]$ 的图形，并求$[2.3]$，$[\sqrt{5}]$，$[\pi]$，$[4]$和$[-1.5]$的值。



$y=[x]$的图形

图1-4

解　$[x]$①表示 x 的整数部分，即不超过 x 的最大整数。$[2.3]=2$，$[\sqrt{5}]=2$，$[\pi]=3$，$[4]=4$，$[-1.5]=-2$

函数图形如图1—4所示的各线段构成，每线段平行于 x 轴，且线段的右端点不在图形内。

① $[x]$称为高斯（*Gauss*）记号，表示 x 的整数部分，即不超过x的最大整数。注意不要与中括号〔〕混淆。

8　设 $f(x)=\{x\}$②$=x-[x]$，求$\{1\}$，$\{0.55\}$，$\{8\}$，$\{-\frac{1}{2}\}$，$\{-1\}$，$\{\sqrt{5}\}$，$\{\frac{1}{2}\}$，$\{\pi\}$，$\{-\frac{7}{3}\}$，$\{\frac{7}{3}\}$，并画出图象。

解　函数 $f(x)=\{x\}$ 表示 x 的小数部分（图1—5）.

$\{1\}=0-[0]=0-0=0$

$\{0.55\}=0.55-[0.55]=0.55$

$\{8\}=8-[8]=8-8=0$

$\{-\frac{1}{2}\}=-\frac{1}{2}-[-\frac{1}{2}]=-\frac{1}{2}-(-1)=\frac{1}{2}$

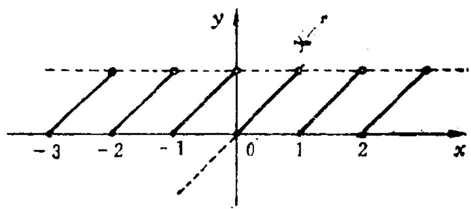
$\{-1\}=-1-[-1]=-1-(-1)=0$

$\{\sqrt{5}\}=\sqrt{5}-[\sqrt{5}]=\sqrt{5}-2$

$\{\pi\}=\pi-[\pi]=\pi-3=0.1415\cdots$

$\left\{-\frac{7}{3}\right\}=-\frac{7}{3}-\left[-\frac{7}{3}\right]=-\frac{7}{3}-(-3)=\frac{2}{3}$

$\left\{\frac{7}{3}\right\}=\frac{7}{3}-\left[\frac{7}{3}\right]=\frac{7}{3}-2=\frac{1}{3}$



$y=\{x\}$的图形

图1-5

9　设 $y=f(x)=\operatorname{sgn} x$为符号函数：

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & (\text{当 } x>0)\\ 0 & (\text{当 } x=0)\\ -1 & (\text{当 } x<0)\end{cases}$$

而且已知 $\varphi(t)=\sin\frac{\pi}{t}(0<t\leqslant 1)$，试求 $y=f[\varphi(t)]$

② 〈x〉表示 x 的小数部分。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com