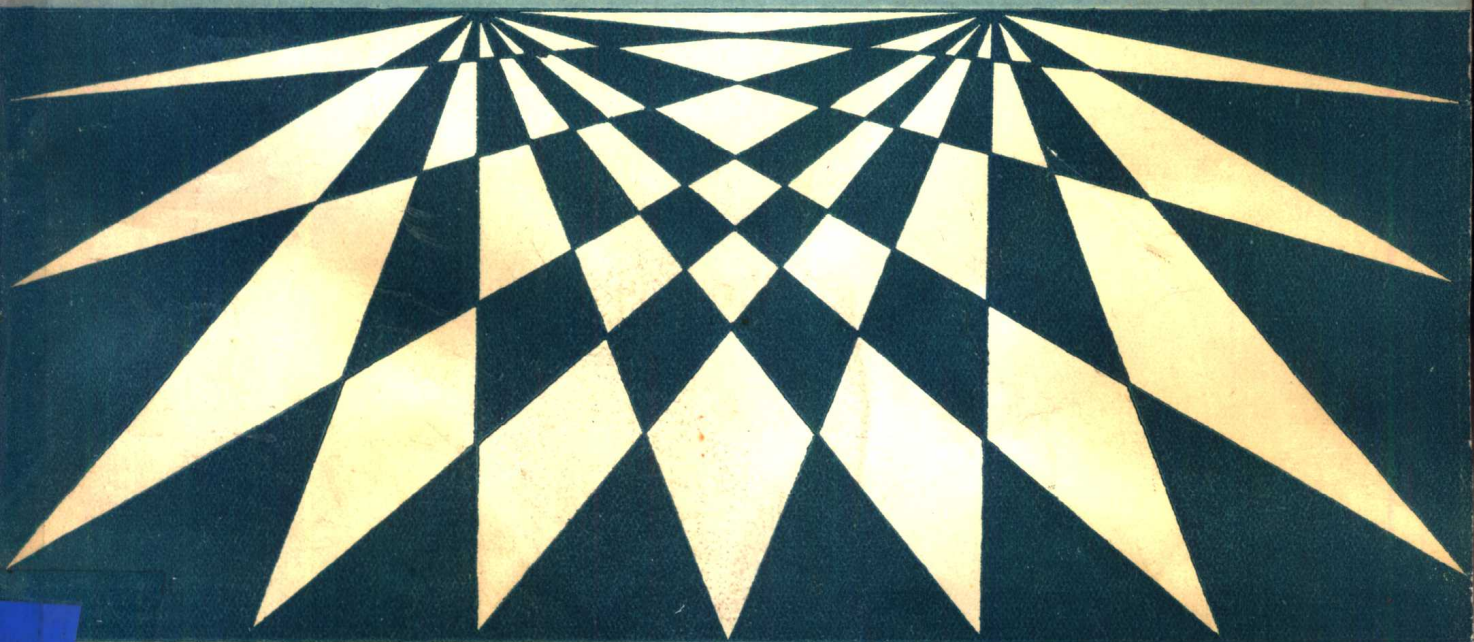


高等学校教材

# 傅里叶光学

卞松玲 刘木兴 编著  
刘良读 王家旺



兵器工业出版社

# 傅里叶光学

卞松玲 刘木兴 编著  
刘良读 王家旺

兵器工业出版社

## 内 容 简 介

本书介绍了傅里叶光学的数理基础和基本原理,以及光全息学和光学信息处理的原理与应用。在内容的深度和广度上作了比较合理的安排,思路清楚,系统性较强。全书共分九章,主要内容有:光波场的数学描述,傅里叶分析,线性系统概论,标量衍射理论基础,部分相干理论简介,透镜的变换特性,光学成像系统的频率特性,光全息学基本原理和光学信息处理。

本书可作为光学仪器专业和光学专业工科大学生教材,也可供从事现代光学研究和光学测试工作的技术人员参考。

本书经原兵器工业第一教材编审委员会工程光学编审小组于1983年6月召开的全体会议审定,同意作为教材出版。原兵器部教材编审室责任编辑:宋筱平。

### 傅里叶光学

卞松玲 刘木兴 编著  
刘良读 王家旺

\*

兵器工业出版社出版

(北京市海淀区车道沟10号)

新华书店总店北京科技发行所发行

北京市海淀区昊海印刷厂印装

\*

开本: 787×1092 1/16 印张: 18 字数: 450千字

1989年7月第1版 1989年7月第1次印装

印数: 1-2000 定价: 3.45元

ISBN 7-80038-046-7/0.4(课)

## 前 言

本书是为工科光学专业大学生编写的。《傅里叶光学》是一门专业基础理论课程，它在物理概念与数学方法、基本原理与实验技术的结合上都是比较紧密的。在编写过程中，注意到内容深度与广度的配合，加强基础，着重于基本概念和基础理论的阐述，并介绍了现代光学中的一些应用新技术，以逐步提高教学内容的起点，扩大学生的知识面。在文字叙述上，思路较为清晰，便于学生自学。

全书共分九章。为了使学生在学习本课程时，一开始就建立起空间频率的概念，因此，在第一章讲述了光波场的数学描述。第二、三章较详细地阐述了《傅里叶光学》的两个理论基础，即傅里叶分析和线性系统理论。为书写简单起见，以一维函数为例较系统地介绍了傅里叶变换、 $\delta$  函数、卷积和相关等数学原理，它们是线性系统分析方法的主要数学工具。线性系统理论为以后对光学系统的分析提供了简明而有效的方法。第四章则是物理基础，比较全面地阐明了标量衍射理论，并对标量衍射中的若干问题作了简要的解析。根据后续章节的需要，对部分相干理论的内容作了简单介绍。第六、七章是《傅里叶光学》的主要内容，是全书的重点；在推导透镜的傅里叶变换特性时，首先得到在一般情况下的普遍公式，然后在各种假设条件下得到许多有用的结论。第七章具体地应用了线性系统的空间域和频率域分析方法对光学成像系统进行了分析，引入了表征系统特性的脉冲响应函数和光学传递函数，并用广义光瞳函数的概念，把实际成像系统存在着的象差也考虑了进去。第八章叙述了光全息学的基本原理和各种类型全息图的制作方法，简单地介绍了它的一些应用。第九章讲述了空间滤波原理，并从数学上分析计算了实验现象的各种结果，着重介绍了光学信息处理的各种应用。

为了加强对学生能力的培养，每章都附有习题，部分章节有一些思考题，以加深对概念的理解，提高分析、解决问题的能力。有关实验内容，已由华东工学院编印出版了《信息光学基础实验》一书，以便根据课程内容选做适当的实验。

本书由卞松玲主编，并编写了第二、第三章和第七章的 §7.3~§7.6；刘木兴（西安工业学院）编写了第一章和第四章；刘良读编写了第五、六和九章；王家旺编写了第七章的 §7.1、§7.2和第八章。

本书由北京理工大学范少卿副教授主审。

在本书编写过程中，部分编者得到北京理工大学连铜淑教授的指教，在此深表感谢！由于编著者水平有限，对一些问题理解还不深，因此错误和缺点一定很多，请读者不吝指正。

编著者

1986.10. 于南京华东工学院

# 目 录

<b>第一章 光波场的数学描述</b> .....	( 1 )
§ 1.1 光波场的复振幅表示.....	( 1 )
一 平面波.....	( 2 )
二 球面波.....	( 3 )
三 柱面波.....	( 4 )
§ 1.2 光波场中任一平面上的复振幅表示.....	( 5 )
一 平面光波复振幅的空间频率描述.....	( 5 )
二 球面光波场中任一平面上的复振幅.....	( 9 )
§ 1.3 光波函数的位相因子.....	( 11 )
一 平面波的位相因子.....	( 12 )
二 球面波的位相因子.....	( 12 )
三 柱面波的位相因子.....	( 13 )
思考题.....	( 14 )
习题.....	( 14 )
<b>第二章 傅里叶分析</b> .....	( 16 )
§ 2.1 函数的正交展开和傅里叶级数.....	( 16 )
一 信号按正交函数系展开.....	( 16 )
二 傅里叶级数.....	( 19 )
三 频谱的概念.....	( 21 )
§ 2.2 傅里叶变换.....	( 25 )
一 傅里叶积分与傅里叶变换.....	( 26 )
二 傅里叶变换算子.....	( 30 )
三 频谱函数.....	( 32 )
四 傅里叶变换的性质.....	( 34 )
五 二维傅里叶变换.....	( 41 )
§ 2.3 $\delta$ 函数.....	( 43 )
一 广义函数简介.....	( 43 )
二 $\delta$ 函数的定义及其表示方法.....	( 45 )
三 $\delta$ 函数的性质.....	( 49 )
§ 2.4 卷积与相关.....	( 55 )
一 卷积的定义.....	( 55 )
二 卷积的计算方法.....	( 56 )
三 卷积的性质.....	( 60 )
四 相关的定义.....	( 61 )

五	相关的计算方法	( 63 )
六	相关的性质	( 64 )
§ 2.5	常用函数	( 66 )
一	偶脉冲对和奇脉冲对	( 66 )
二	阶跃函数(刀口函数)	( 67 )
三	符号函数	( 69 )
四	矩形函数	( 70 )
五	三角形函数	( 72 )
六	sinc 函数和sinc <sup>2</sup> 函数	( 72 )
七	高斯函数	( 73 )
八	圆域函数	( 74 )
九	抽样函数( comb 函数)	( 74 )
§ 2.6	信号离散与抽样定理	( 81 )
一	离散信号的表示	( 81 )
二	正弦波的抽样	( 81 )
三	任意连续函数的抽样	( 83 )
四	函数的抽样与恢复	( 85 )
五	思考题	( 87 )
六	习题	( 88 )
<b>第三章</b>	<b>线性系统概论</b>	( 91 )
§ 3.1	线性系统的基本概念	( 91 )
一	系统及其分类	( 91 )
二	线性系统的定义	( 92 )
三	线性系统的算子表示	( 93 )
四	线性系统和线性不变系统的特性	( 94 )
§ 3.2	线性系统的分析方法	( 95 )
一	基元函数的响应	( 95 )
二	线性系统的两种分析方法	( 98 )
§ 3.3	复合系统的传递函数	( 101 )
一	串联系统	( 101 )
二	并联系统	( 102 )
三	反馈系统	( 102 )
四	思考题	( 104 )
五	习题	( 104 )
<b>第四章</b>	<b>标量衍射理论基础</b>	( 106 )
§ 4.1	衍射概述	( 106 )
§ 4.2	基尔霍夫积分定理	( 107 )
一	亥姆霍兹(H. Helmholtz) 方程	( 107 )
二	格林定理	( 108 )

三	基尔霍夫积分定理	( 108 )
§ 4.3	基尔霍夫衍射公式	( 110 )
一	衍射装置与积分定理的应用	( 110 )
二	基尔霍夫衍射公式的推导	( 110 )
三	巴俾涅原理	( 113 )
§ 4.4	瑞利-索末菲衍射公式	( 114 )
一	格林函数的选择	( 114 )
二	瑞利-索末菲衍射公式	( 115 )
§ 4.5	非单色光波的衍射	( 116 )
一	复色光波的衍射公式	( 116 )
二	准单色光波的衍射公式	( 118 )
§ 4.6	标量衍射中若干问题简析	( 118 )
一	三种标量衍射公式	( 118 )
二	衍射公式和叠加积分	( 120 )
三	光的传播和衍射	( 120 )
四	基尔霍夫理论的不自洽性及适用性	( 121 )
五	衍射公式对一般照明情况的适用性	( 121 )
§ 4.7	衍射问题的频率域分析	( 121 )
一	从空域到频域	( 122 )
二	频谱的传播效应	( 122 )
三	衍射过程的频谱分析	( 124 )
§ 4.8	基尔霍夫衍射公式的近似	( 125 )
一	衍射分区的实验根据	( 125 )
二	菲涅耳近似和夫琅和费近似	( 126 )
§ 4.9	菲涅耳和夫琅和费衍射的“系统”分析	( 128 )
一	菲涅耳衍射“系统”分析	( 128 )
二	夫琅和费衍射“系统”分析	( 129 )
§ 4.10	夫琅和费衍射实例	( 130 )
一	矩孔的夫琅和费衍射	( 130 )
二	带掩模矩孔的夫琅和费衍射	( 131 )
三	圆孔的夫琅和费衍射	( 132 )
四	正弦型振幅光栅的夫琅和费衍射	( 133 )
五	正弦型位相光栅的夫琅和费衍射	( 135 )
§ 4.11	菲涅耳衍射计算	( 136 )
一	菲涅耳衍射的频域计算	( 137 )
二	某些特殊情况下菲涅耳衍射的计算	( 137 )
三	平面光波的直边菲涅耳衍射	( 141 )
	思考题	( 146 )
	习题	( 146 )

<b>第五章 部分相干理论简介</b> .....	( 148 )
§ 5.1 互相干函数和相干度.....	( 148 )
§ 5.2 准单色光的干涉和互强度.....	( 150 )
一 准单色光的互强度.....	( 150 )
二 范西特-泽尼克 ( Van Cittert-Zernike ) 定理.....	( 152 )
三 霍普金斯 ( Hopkins ) 公式.....	( 155 )
四 一个例子.....	( 156 )
§ 5.3 互强度的传播和广义惠更斯原理.....	( 159 )
习题.....	( 160 )
<b>第六章 透镜的变换特性</b> .....	( 161 )
§ 6.1 薄透镜的位相变换.....	( 161 )
§ 6.2 透镜的傅里叶变换特性.....	( 162 )
一 一般变换式.....	( 163 )
二 物面位于透镜前 $d_0$ 处.....	( 165 )
三 物位于透镜后 $d_1$ 处.....	( 167 )
习题.....	( 169 )
<b>第七章 光学成像系统的频率特性</b> .....	( 172 )
§ 7.1 正薄透镜的成像.....	( 172 )
§ 7.2 一般光学成像系统的分析.....	( 175 )
一 黑箱模型.....	( 175 )
二 成像系统的线性特性.....	( 176 )
§ 7.3 相干传递函数.....	( 177 )
一 相干传递函数的概念.....	( 177 )
二 相干传递函数的计算例.....	( 178 )
三 相干传递函数的简要说明.....	( 179 )
§ 7.4 非相干光学传递函数.....	( 181 )
一 光学传递函数的概念.....	( 181 )
二 光学传递函数与相干传递函数的关系.....	( 182 )
三 光学传递函数的性质.....	( 183 )
四 OTF 与光瞳函数的关系.....	( 184 )
五 光学传递函数的计算例.....	( 184 )
六 光学传递函数的物理解释.....	( 186 )
§ 7.5 实际光学系统的传递函数.....	( 186 )
一 广义光瞳函数.....	( 188 )
二 有象差系统的相干传递函数.....	( 183 )
三 有象差系统的光学传递函数.....	( 188 )
四 离焦成像系统的 OTF.....	( 189 )
§ 7.6 相干成像和非相干成像的比较.....	( 191 )
一 象的强度频谱与衬度.....	( 191 )



二	两点间的分辨率	( 193 )
	习题	( 194 )
<b>第八章</b>	<b>光全息学基本原理</b>	( 196 )
§ 8.1	光全息术概述	( 196 )
§ 8.2	全息照相的基本方程	( 197 )
一	波前记录	( 197 )
二	波前再现	( 198 )
三	参考光束的最小偏置角	( 199 )
四	平面全息图的成象公式	( 201 )
§ 8.3	傅里叶变换全息图的理论分析	( 203 )
一	标准的傅里叶变换全息图	( 204 )
二	准傅里叶变换全息图	( 205 )
三	无透镜傅里叶变换全息图	( 206 )
§ 8.4	象全息图	( 208 )
一	照明光源单色性影响	( 208 )
二	照明光源大小的影响	( 209 )
§ 8.5	彩虹全息	( 210 )
一	二步彩虹全息	( 210 )
二	一步彩虹全息	( 211 )
三	彩虹全息对成象透镜的特殊要求	( 213 )
§ 8.6	位相全息图	( 214 )
§ 8.7	激光散斑及其应用	( 215 )
一	激光散斑的特性	( 216 )
二	散斑图样的记录光路	( 216 )
三	散斑照相	( 216 )
§ 8.8	体积全息图简介	( 218 )
一	基元体全息图的光栅结构	( 219 )
二	布喇格定律	( 220 )
三	基元体全息图的灵敏度	( 221 )
§ 8.9	计算全息图	( 223 )
一	抽样	( 223 )
二	计算离散傅里叶谱	( 224 )
三	罗曼编码法	( 225 )
§ 8.10	全息照相应用简介	( 226 )
一	全息光学元件	( 226 )
二	干涉计量	( 227 )
	习题	( 232 )
<b>第九章</b>	<b>光学信息处理</b>	( 234 )
§ 9.1	阿贝-波特实验及泽尼克相衬法	( 234 )

一	阿贝-波特 ( Abbe-Porter ) 实验	( 234 )
二	泽尼克相衬显微镜	( 237 )
§ 9.2	基本相干光处理系统	( 239 )
一	光学频谱分析系统	( 239 )
二	光学滤波系统	( 240 )
三	光学相关系统	( 242 )
四	混合处理系统	( 243 )
§ 9.3	相干光学处理	( 244 )
一	图象相减	( 244 )
二	象边缘增强	( 247 )
三	图象识别	( 247 )
四	逆滤波消模糊——象质改善	( 249 )
五	相干光反馈系统	( 250 )
§ 9.4	非相干光处理	( 251 )
一	基于几何成象的非相干光处理	( 252 )
二	基于几何投影的非相干光处理	( 254 )
§ 9.5	白光信息处理	( 255 )
一	工作原理	( 255 )
二	应用举例	( 257 )
§ 9.6	非线性处理	( 259 )
一	$\theta$ 调制	( 259 )
二	半色调网屏技术	( 260 )
§ 9.7	实时混合处理	( 262 )
一	空间光调制器	( 263 )
二	实时混合处理系统	( 264 )
	习题	( 265 )
<b>附录 A</b>	<b>贝塞尔函数的积分表达式的推导</b>	<b>( 266 )</b>
	<b>主要参考文献</b>	<b>( 269 )</b>

# 第一章 光波场的数学描述

光波是一种电磁波，可由电矢量和磁矢量来描写，二者通过麦克斯韦 (J. Maxwell) 方程组相互联系。从其传播特征来看，电矢量和磁矢量处于同等地位；但就光与物质的作用而言，光的效应主要由电矢量决定，所以通常把电矢量称为光矢量，把电矢量随时间的变化状态称为光振动。

光波是横波，一般来说，需要时空矢量函数来表示。然而，在许多场合，光是在各向同性媒质中传播，不同振动方向的光波有相同的传播特性。因此可以采用简便的标量波对许多问题作近似处理。若所论及的光波具有唯一共同的、固定的振动面，即相应于平面偏振光波，每一个波的电矢量都可以用同一个直角分量来描述，它们都满足相同的波动方程，这些波的电矢量任何时刻都互相平行或反向平行，这无疑可作为标量波来处理；另一种是非偏振光情况，光波场中任一点电矢量的方向都在做无规则的迅速变化，在有限的探测时间内，它并不表现出任何特定方向的振动优势，这时用标量波来近似描述也甚为有效。更多的情况是接近满足上述条件，可近似作为标量波处理。

光波的最基本形式是平面波、柱面波和球面波。任何复杂的光波都能表示为这些基本光波的合成。正确了解这几种光波的性质及其描述是至关重要的。

## §1.1 光波场的复振幅表示

本节主要讨论定态光波场。定态光波场应具有如下性质：(1) 波场中各点的振动是时间频率相同的简谐振动；(2) 波场中各点振动的振幅不随时间变化，在空间形成稳定分布。

用实值标量函数

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, z) \cos[2\pi\nu t - \varphi(x, y, z)] \quad (1-1)$$

表示一系列定态光波。其中  $(x, y, z)$  是空间一点  $P$  的位置坐标， $\nu$  是光波的时间频率，函数  $u(x, y, z)$  是光波的振幅， $-\varphi(x, y, z)$  是光波在  $P$  点的初始位相。 $\nu$  为常量的光波称为单色光波。由式 (1-1) 可知，一系列理想的单色光波，在空间和时间上都是无限延伸的。但任何实际光源的发光过程总是有限的，因此，理想的单色光波实际上并不存在。研究单色光波的意义在于解决近似单色光的激光及其大量准单色光问题；并且复(多)色光可以看作是各种单色光的组合，研究单色光可以为复色光的研究奠定基础。

为了数学运算的方便，可以将光波用复指数函数来表示，利用欧拉公式，式 (1-1) 所给出的光波函数可以写为

$$\begin{aligned} & u(x, y, z, t) \\ &= \operatorname{Re} \{ u(x, y, z) e^{i[2\pi\nu t - \varphi(x, y, z)]} \} \end{aligned} \quad (1-2)$$

通常又把取其实部的符号  $\operatorname{Re}\{ \}$  略去，直接记作

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, z) e^{\pm i(2\pi\nu t - \varphi(x, y, z))} \quad (1-3)$$

式中指数上的正负号表示两种不同的描写形式，两者实质上完全等效，为了使  $\nu$ 、 $\varphi$  等量具有统一确切的物理含义，本书只选用负号。注意，在复指数函数中真正表示光波的，仍然是函数的实部（也有的选用虚部）。一个实值物理量不能等同于一个复值函数。在运算过程中，只有作线性运算例如波函数叠加、微分和积分等运算时，复函数运算结果的实部才代表所求的物理量；对于非线性运算，一般应当先取出实部再作运算。不过，实际上也常常采用与实部运算等价的复函数运算。求光强  $I$  时的平方运算就是一例。

对于单色光波，式(1-3)中时间因子  $e^{-i2\pi\nu t}$  是不随空间位置改变的，在研究光振动的空间分布时，可以将它略去不计。定义

$$U(x, y, z) = u(x, y, z) e^{i\varphi(x, y, z)} \quad (1-4)$$

为光波的复振幅。它是以振幅为模、初相为辐角的复指数函数，描述光波的振幅和位相是怎样随着空间位置的变化而变化的。

光强  $I$  的复振幅表达式为

$$I = U(x, y, z) U^*(x, y, z) \quad (1-5)$$

其中  $U^*$  是  $U$  的共轭复函数。

复振幅的引入大大方便了干涉、衍射等许多光学问题的研究。

### 一、平面波

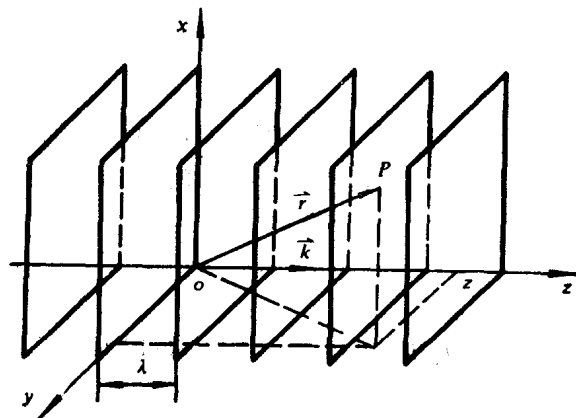


图 1-1 沿  $z$  轴传播的平面波

设观察点  $P$  的坐标为  $(x, y, z)$ ，光波在坐标原点  $o$  的初位相为  $\varphi_0$ ，考虑到光波的传播， $P$  点的初位相应为

$$\varphi(x, y, z) = \frac{2\pi}{\lambda} z + \varphi_0 \quad (1-7)$$

采用新的物理量：波数  $k$  和圆频率  $\omega$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1-8)$$

光波中最简单而理想的形式是平面波。平面光波的特点是，在各向同性的媒质中，位相间隔为  $2\pi$  的等相面是垂直于传播方向的一组等间距平面，场中各点振幅为一常量。

先讨论特殊情况。设平面波如图 1-1 所示， $z$  轴方向与平面波传播方向相同。式(1-3)平面波方程可以写为

$$u(x, y, z, t) = u_0 \exp\{-[2\pi\nu t - \varphi(x, y, z)]\} \quad (1-6)$$

$$\omega = 2\pi\nu \quad (1-9)$$

式(1-6)可改写为

$$u(x, y, z, t) = u_0 \exp[-i(\omega t - kz - \varphi_0)] \quad (1-10)$$

由于坐标原点选择的任意性, 总可使  $\varphi_0 = 0$ , 于是光波的复振幅变为

$$U(z) = u_0 \exp(ikz) \quad (1-11)$$

其中振幅  $u_0$  为常量, 位相  $\varphi(z) = kz$ , 此位相函数只随  $z$  变化, 与变量  $x, y$  无关, 可见等位相面垂直于  $z$  轴。

再讨论一般情况, 即平面波传播方向不与  $z$  轴相同。采用波矢量  $\vec{k}$  来表示波传播方向上的矢量, 其大小  $k = 2\pi/\lambda$ ; 方向余弦为  $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ , 且有  $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ 。设观察点  $P$  的矢径为  $\vec{r}$ ,  $P$  点的位相可由  $\varphi(x, y, z) = \vec{k} \cdot \vec{r}$  来表示, 于是平面波的一般表达式可写为

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0 \exp[-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})] \\ &= u_0 \exp\{-i[\omega t - k(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)]\} \end{aligned} \quad (1-12)$$

其复振幅为

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \\ &= u_0 \exp[ik(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)] \end{aligned} \quad (1-13)$$

$P$  点的位相函数

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= k(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) \end{aligned}$$

是坐标变量  $(x, y, z)$  的线性函数。

## 二、球面波

球面波是另一种简单而理想化的光波形式。点光源发出的光波为球面波。其特征是, 位相间隔为  $2\pi$  的等相面是一组等间距同心球面, 各点的振幅与该点到球心的距离成反比。各种形状的光源都可以看成是许多点光源的集合体。因此, 对点光源及其球面波的讨论具有普遍意义。

为叙述简便, 选择直角坐标系的原点与球面波中心重合,  $xoz$  面内一组波面线如图1-2所示。球面波方程可写为

$$u(x, y, z, t) = \frac{a_0}{r} \exp[-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})] \quad (1-14)$$

式中  $\vec{r}$  是从坐标原点到观察点  $P$  的矢径,  $\vec{r}$  的模为  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ ,  $a_0$  是  $r=1$  处的光波振幅, 式中已经取  $\varphi_0 = 0$ 。

对于发散球面波,  $\vec{k}$  与  $\vec{r}$  同方向, 故式(1-14)可写为

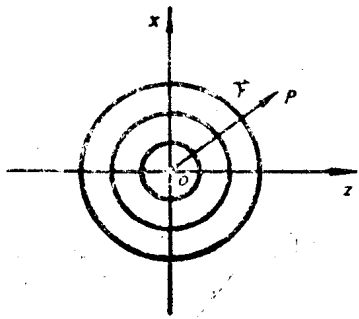


图 1-2 球面波

$$u(x, y, z, t) = \frac{a_0}{r} \exp[-i(\omega t - kr)] \quad (1-15)$$

对于会聚球面波,  $\vec{k}$  与  $\vec{r}$  反方向, 式 (1-14) 可写为

$$u(x, y, z, t) = \frac{a_0}{r} \exp[-i(\omega t + kr)] \quad (1-16)$$

可得球面波的复振幅为

$$U(x, y, z) = \frac{a_0}{r} \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}) = \begin{cases} \frac{a_0}{r} \exp(ikr) & (\text{发散}) \\ \frac{a_0}{r} \exp(-ikr) & (\text{会聚}) \end{cases} \quad (1-17)$$

### 三、柱面波

如图 1-3 所示, 沿  $y$  轴放置一均匀无限长线光源, 此光源各点同步发射, 则发出的光波是以  $y$  轴为心轴的柱面波。其特征是, 位相间隔为  $2\pi$  的等相面是一组等距同轴柱面, 各点的振幅与该点到同轴距离的平方根成反比。后者表明光波在传播过程中能量是守恒的。

柱面波方程可写为

$$u(x, y, z, t) = \frac{a_0}{\sqrt{\rho}} \exp[-i(\omega t - k \cdot \vec{r})] \quad (1-18)$$

其中  $\vec{r}$  是从坐标原点到观察点  $P$  的矢径,  $\rho$  是  $\vec{r}$  在  $k$  方向上的投影的模量 (即  $P$  点到心轴的距离)。

柱面波的复振幅为

$$U(x, y, z) = \frac{a_0}{\sqrt{\rho}} \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r})$$

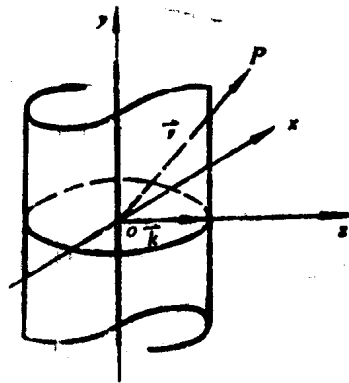


图 1-3 柱面波

$$= \begin{cases} \frac{a_0}{\sqrt{\rho}} \exp(ik\rho) & (\text{发散}) \\ \frac{a_0}{\sqrt{\rho}} \exp(-ik\rho) & (\text{会聚}) \end{cases} \quad (1-19)$$

## §1.2 光波场中任一平面上的复振幅表示

上节给出的光波复振幅如式(1-13)、式(1-17)和式(1-19),都是三维空间分布形式。但在光学问题中,习惯于选取坐标系的 $z$ 轴与光学系统的光轴重合,并且通常是在 $z$ 等于常量的二维平面内描写我们所关心的波场分布,从而把复振幅 $U(x, y, z)$ 看作是一个由 $(x, y)$ 确定的二元函数,并以参变量的形式依赖于变量 $z$ 。这些二维平面常常是物平面、象平面和焦平面等等。

### 一、平面光波复振幅的空间频率描述

#### 1. 任一平面上的平面光波复振幅

由式(1-13),平面光波的复振幅为

$$\begin{aligned} U(x, y, z) \\ = u_0 \exp\{ik(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\} \end{aligned}$$

设观察平面为 $(x, y, z_1)$ 平面,则平面光波在该面上的复振幅为

$$\begin{aligned} U(x, y, z_1) \\ = u_0 \exp\{ik(x\cos\alpha + y\cos\beta + z_1\cos\gamma)\} \end{aligned}$$

作代换  $\cos\gamma = (1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta)^{1/2}$ , 上式变为

$$\begin{aligned} U(x, y, z_1) \\ = u_0 \exp\{ikz_1(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta)^{1/2}\} \\ \cdot \exp\{ik(x\cos\alpha + y\cos\beta)\} \end{aligned}$$

对于给定的观察平面 $(x, y, z_1)$ ,  $z = z_1$ 为一常量,令

$$U_0 = u_0 \exp\{ikz_1(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta)^{1/2}\} \quad (1-20)$$

则 $U_0$ 也为与 $x, y$ 无关的常量。 $U_0$ 不影响该观察面上复振幅的相对分布。于是复振幅可写为

$$\begin{aligned} U(x, y) \\ = U_0 \exp\{ik(x\cos\alpha + y\cos\beta)\} \end{aligned} \quad (1-21)$$

考虑到参变量 $z_1$ 可以有不同取值, $z_1$ 取值不同就确定了不同的观察平面,因此,式(1-21)也就表征了与 $z$ 轴垂直的任一平面上平面光波复振幅分布的一般形式。

#### 2. 空间频率及其物理意义

由于历史的原因,说到频率,一般是指时间频率,它表示特定波形在单位时间内重复的次数。与此相仿,可以定义空间频率,用来表示特定波形在单位距离内重复的次数。例如,对于一系列平面谐波,空间频率表示单位距离内波峰的个数。值得注意的是,当我们引入空间频率概念时,为了同时表征光波传播方向,可以把光波空间频率定义为矢量形式,它在不同

坐标轴上有相应的空频分量，其分量值既可为正，也可为负。而相应的周期值也可正、可负。

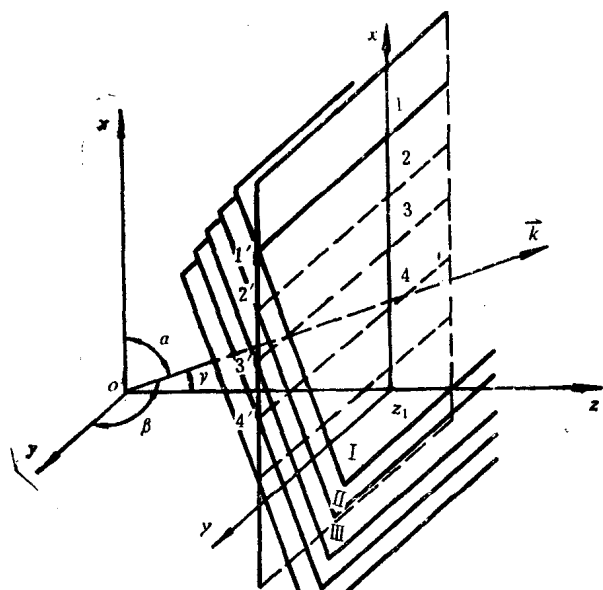


图 1-4 平面波的空间频率

空间频率在傅里叶光学中是一个基本的物理量，透彻地理解这个概念及其物理意义是很重要的。为使概念明晰，先从特殊情况入手，讨论传播方向  $(\vec{k})$  平行于  $xoz$  平面的平面光波。此时式 (1-21) 中  $\cos\beta = 0$ ，观察平面  $(x, y, z)$  上的复振幅分布变为

$$U(x, y) = U_0 \exp(ikx \cos\alpha) \quad (1-22)$$

此式所表示的平面波在三维空间中如图 1-4 所示。图中画出了位相间隔为  $2\pi$  的一组波阵面，记为 I, II, III, ……。它们与观察平面  $(x, y, z)$  的交线分别为  $11', 22', 33', \dots$ ，示于图 1-5 (b) 中。与其相对应的一种波形图由图 1-5 (c) 表示。

图 1-5 (a) 则画出了各波阵面与  $xoz$  平面的交线。

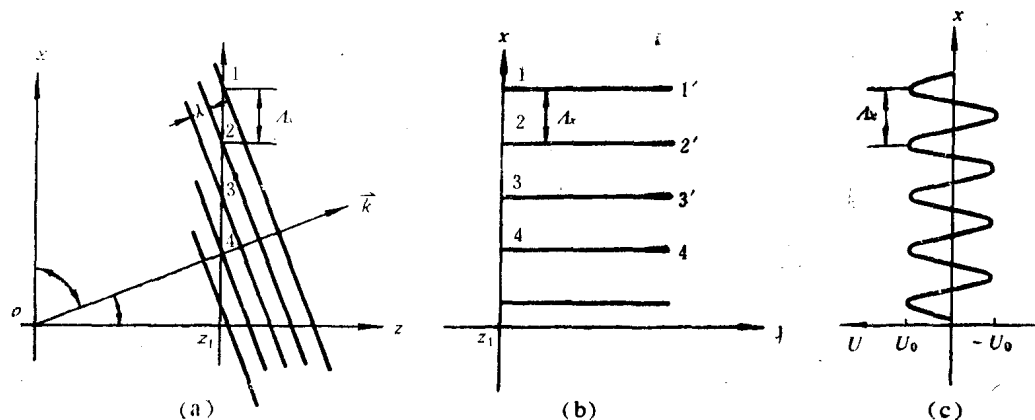


图 1-5 平面波空间频率的分析

与式 (1-22) 相对应的等位相面方程为

$$\varphi = kx \cos\alpha = \text{常量} \quad (1-23)$$

图 1-5 (b) 上的直线  $11', 22', 33', \dots$ ，便是由式 (1-23) 所确定的一组等位相线。相邻线之间的位相差为  $2\pi$ ，即

$$\Delta\varphi = k\Delta x \cos\alpha = 2\pi \quad (1-24)$$

那么等位相线族方程为



$$\varphi = kx \cos \alpha = 2n\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1-25)$$

它们为垂直于  $x$  轴的等间距平行线。等位相线上的光振动是完全相同的。这便直观地表明了平面光波复振幅  $\mathbf{U}(x, y)$  在观察面上的周期性分布。

为了描述  $\mathbf{U}(x, y)$  的周期性分布，这里引入新的物理量：空间周期  $A$  和空间频率  $f$ ，在直角坐标系中它们的对应量分别为  $(A_x, A_y, A_z)$  和  $(\xi, \eta, \zeta)$ 。由式 (1-24)，定义

$$A_x = \Delta x = \frac{2\pi}{k \cos \alpha} = \frac{\lambda}{\cos \alpha} \quad (1-26)$$

和

$$\xi = \frac{1}{A_x} = \frac{\cos \alpha}{\lambda} \quad (1-27)$$

显然，式 (1-22) 所表示的特殊平面光波则有

$$A_y = \infty \quad \eta = 0$$

由式 (1-27) 可知， $\xi$  对于单色平面光波的取值是随着  $\alpha$  的变化而变化的，亦即随着光波矢量  $\vec{k}$  的方向变化而改变。空频  $\xi$  的模量  $|\xi|$  表示平面光波复振幅在  $x$  轴方向单位长度上变化的周期数。空间频率常用单位是线每毫米。空间周期的模量  $|A_x|$ ，表示在  $x$  轴方向上位相差为  $2\pi$  的两条等相线之间的距离。而  $\xi$  取值的正或负，则分别表示光波矢量  $\vec{k}$  的分量  $k_x$  与  $x$  轴方向相同或相反的不同物理状态。图 1-6 表示  $\xi < 0$  的情况。此时对应于  $\vec{k}$  的方向角  $\alpha > 90^\circ$ 。

利用式 (1-27)，可将式 (1-22) 改写为空间频率表达式

$$\mathbf{U}(x, y) = U_0 \exp(i2\pi\xi x) \quad (1-28)$$

推广到一般情况。波矢量  $\vec{k}$  对  $x$  和  $y$  轴的方向余弦为  $\cos \alpha$  和  $\cos \beta$ 。在观察面  $(x, y, z_1)$  上光场的复振幅分布由式 (1-21) 表示。等位相线方程为

$$\varphi = k(x \cos \alpha + y \cos \beta) = \text{常量} \quad (1-29)$$

仍设坐标原点处初位相为零，则一组等位相线方程可写为

$$k(x \cos \alpha + y \cos \beta) = 2n\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1-30)$$

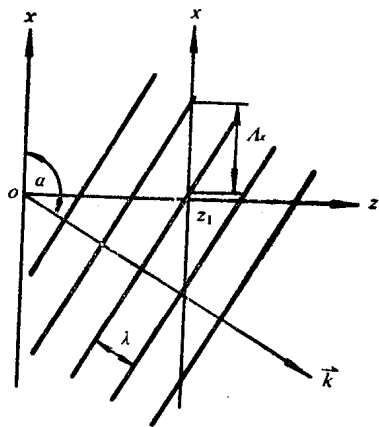


图 1-6  $\xi < 0$  的平面波

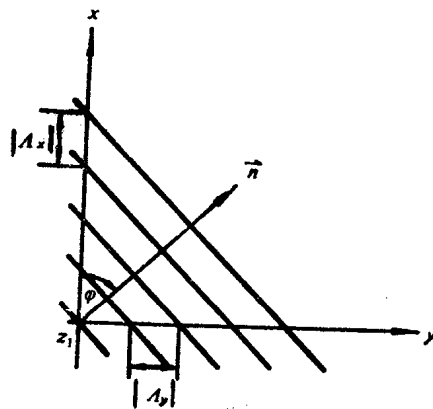


图 1-7  $\vec{k}$  为任意方向的平面波空频