互动课堂丛书

高二数学

互动课堂

HUDONGKETANG

中国教辅图书策划专家▶希扬 主编

开放课堂
师生互动
突出主体
教学相长

主体参与

希扬
主编

中国少年儿童出版社
中国纺织出版社

互动课堂

高二数学

丛 书 主 编　希　扬

丛书副主编　屠新民

本 册 主 编　屠新民　李丽琴

本 册 编 委　屠新民　陈　星　李士彬

梁秀红　李丽琴　兰社云

杜　瑜　屠凯临　王慧兴

韩春梅

中国少年儿童出版社

中国纺织出版社

图书在版编目(CIP)数据

互动课堂. 高二数学/希扬主编. —北京:中国纺织出版社,2002. 6
ISBN 7-5064-2275-1/G·0119

Ⅰ. 互… Ⅱ希… Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 015513 号

策划编辑:博创文化 责任编辑:王力凡 加工编辑:沈宝松

中国纺织出版社出版发行
地址:北京东直门南大街 6 号 邮政编码:100027
电话:010—64158225—3916
http://www.c-textilep.com
E-mail:bo-chuang@c-textilep.com
潮河印刷厂印刷 各地新华书店经销
2002 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
开本:880×1230 1/32 印张:15.875
字数:400 千字 定价:16.80 元

《互动课堂》丛书

序 言

创新，是我们的灵魂。

这套《互动课堂》是我们继《走向清华北大》、《课堂新思维点悟》之后，奉献给广大中学生朋友的一套崭新的素质教育同步系列丛书。

素质教育是当前课堂教学改革的主旋律。如何利用课堂这个主渠道，培养具有自学能力、自主能力和创新能力的优秀人才，已成为广大教育工作者和出版者共同面对的世纪课题。而未来社会所需要的是有慧心、有灵气、会学习、会沟通、富有团队精神的人才，为社会提供这样的人才是教育工作者的神圣使命，也是教育的目标所在。

何谓《互动课堂》？通过教师的趣引妙答，引发和激励所有学生主动参与到教学中来，师生相互交流，相互沟通，亲密合作，共同探究的"互动形式"的课堂，称之为《互动课堂》。由传统的被动接受式学习转向主动探索性学习，让学生最大程度发挥主观能动性，提升主体能力，培养科学精神，提高创新素质。同时，也促使教师较快地提高专业能力和水平。通过这种形式教师可以由教会变为会教，学生可以由学会变为会学。《互动课堂》是一种提高教与学双方积极性，从而有效提高学习成绩，在学习知识的过程中掌握学习方法的先进模式。这是目前素质教育在课堂教学改革中的最前沿成果，也是这套《互动课堂》丛书贯穿始终的"教与学"新理念。

本书除按照教学大纲的要求列出知识结构，设计了"知识要点"、"重点难点"和"自测自评"外，还精心设置了"例题精析"中的"解题点悟"和"师生交流"栏目，形成题前"名师分析题意，点拨解题思路，启迪悟性"和题后"学生提问"，"教师趣引妙答"的师生平等交流、教学互动的课堂新模式，是我国教辅书籍中第一套突出名师和学生"零距离"交流的丛书，这也正是本书最大的"亮点"。

同时，本书更加突出学生的主体地位。丛书的题型设计从学生的角度出发，依据学习心理学规律，精心编排了：(1)双基练习题——自测自评题；(2)能力训练题——培养能力强化题；(3)考上重点大学的创新研究题—分层提高能力题。三组题由易趋难，使学生不断克服各种障碍，取得一次次的进步，使其始终处在积极、活跃的学习状态，最终获得成功。

让你的课堂因此而精彩！这是我们大家共同的心愿。

参加本套丛书编写的人员还有：向荣、老皮、杨谋、杨率、力云、王力、宋力、辉民、自立、步周、小祥、师艳茹、金宏艳、陈新春、李春才、陈晓花、肖哨卡、梁丰、张三中、张宇。

常杨

目 录

第六章 不 等 式

知识结构

- 不等式
  - 不等式的性质
  - 不等式的证明
    - 均值不等式
    - 比较法、综合法、分析法、放缩法
  - 不等式的解法
    - 一元二次不等式的解法
    - 高次不等式的解法
    - 分式不等式的解法
    - 无理不等式的解法
    - 指数不等式的解法
    - 对数不等式的解法
  - 含有绝对值的不等式
    - 绝对值不等式定理
    - 绝对值不等式的解法

高考目标

1. 目标要求(1995～2001 年)

项目 要求 高考知识点	高考要求		考题出现年份	分值
	能力层次	具体要求		
不等式	了解	理解不等式概念,掌握判断符号法则		
不等式性质	掌握	记准性质,熟练运用	2000	5

续表

高考知识点 \ 项目要求	高考要求		考题出现年份	分值
	能力层次	具体要求		
不等式证明	掌握	运用均值不等式,熟练求最值,掌握比较法、综合法、分析法、放缩法	1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2001	12,12,12,12,12
不等式的解法	掌握	掌握解二次不等式、无理不等式、分式不等式、高次及指数、对数不等式,会解含参数的不等式	1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001	11,5,5,5,10,12,6
含绝对值的不等式	掌握	掌握绝对值不等式解法,掌握绝对值不等式定理	1996	12

2. 能力要求

(1)高考中常出现指数函数或对数函数与二次不等式结合起来的不等式题目,属中档题,应注意掌握将之化为一般不等式来解的方法.

(2)对含字母参数的不等式,应注意掌握对字母参数进行分类讨论的方法.

(3)应注意运用不等式的性质及不等式的比较法、分析法、综合法、放缩法等方法,结合函数性质来推理、灵活证明不等式.

(4)能运用绝对值性质,去掉绝对值符号,将含绝对值的不等式化为等价的不等式来解之.

6.1 不等式的性质

知识要点

1. 实数的顺序性与运算性质之间的关系:

(1)设 a、$b\in \mathrm{R}$,则

①$a-b>0\Leftrightarrow a>b$;

②$a-b=0\Leftrightarrow a=b$;

③$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

(2)设 a、$b\in \mathrm{R}_+$,则

①$\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$；

②$\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$；

③$\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b$.

2. 不等式的基本性质：

(1)$a>b\Leftrightarrow b<a$；

(2)$a>b,b>c\Rightarrow a>c$；

(3)$a>b\Rightarrow a+c>b+c$；

(4)$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$；

(5)$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$；

$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$；

(6)$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$；

(7)$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n>0(n\in Z$,且 $n>1)$；

(8)$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}>0(n\in Z$,且 $n>1)$.

重点难点

重点：掌握不等式的性质及其证明.

难点：不等式性质成立的条件及其应用.

例题精析

例题1

若 $a<b<0$,则下列不等式中,不能成立的是(　　).

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　　　B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

C. $|a|>|b|$　　　　D. $a^2>b^2$

※解题点悟　本题可采用不等式的性质或采用淘汰法或特殊值法求解.

※标准解法　解法1(直接法)：

$\because\ a<b<0$

$\therefore\ a-b<0,a<0$

$\therefore$ 将$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$两边同乘以$a(a-b)>0$,可得 $a>a-b$

$\therefore\ b>0$,这与已知矛盾,故选 B.

解法 2(淘汰法)：

$\because\ a<b<0\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故 A 成立；

$a<b<0\Rightarrow -a>-b>0\Rightarrow a^2>b^2$；故 D 成立；

$a<b<0\Rightarrow |a|>|b|$，故 C 成立.

解法 3(特殊值法)：

取 $a=-2,b=-1$，代入知应选 B.

※师生交流

学生：解此类题找出不成立选项的方法有哪些？

教师：解此类题的思路有三种：一是直接应用不等式的性质进行推理；二是对各个选项加以分析；三是取特殊值代入有关式子判别正确与否.

例题 2

若 a、b 是任意实数，且 $a>b$，则(　　).

A. $a^2>b^2$　　　　B. $\frac{b}{a}<1$

C. $\lg(a-b)>0$　　　　D. $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$

※解题点悟　本题可采用不等式的性质并结合指数函数、对数函数的性质进行求解，也可用特殊值法求解.

※标准解法　解法 1(直接法)：

当 $a>b>0$ 时，可得 $a^2>b^2$，$\frac{b}{a}1$，但该题的条件是 $a>b$，故 $a^2>b^2$，$\frac{b}{a}<1$ 不一定成立；由 $\lg(a-b)>0$，则需 $a-b>1$，即 $a>b+1$，但由已知 $a>b$ 不能得到 $a>b+1$，故 C 不一定成立；对于 D，由于指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是减函数，所以当 $a>b$ 时，有 $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$，故 D 成立.

解法 2(特殊值法)：

取特殊值 $a=0,b=-1$ 进行检验，排除 A、B、C，得 D.

※师生交流

学生：利用不等式性质解题还应该注意哪些问题？

教师：利用不等式性质解题时，除了应注意不等式性质本身外，还应该注意函数的图像和性质，并把它们有机地结合起来，这也是高考常见的题型之一.

例题 3

若 $a<b<0$，则下列结论中正确的是(　　).

A. 不等式 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 和 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 均不能成立

B. 不等式$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$和$\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$均不能成立

C. 不等式$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$和$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2>\left(b+\frac{1}{a}\right)^2$均不能成立

D. $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$和$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2>\left(b+\frac{1}{a}\right)^2$均不能成立

※解题点悟　直接法求解时要注意到有四个不等式需要考察，本题仍可用特殊值法求解.

※标准解法

解法 1(直接法)：

由 $a<b<0$，则有$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，$|a|>|b|$，$\frac{1}{|a|}<\frac{1}{|b|}$，所以 A 不正确；又由 $a<b<0$，得 $a<a-b<0$，则$\frac{1}{a}>\frac{1}{a-b}$，所以 B 正确.

解法 2(特殊值法)：

取 $a=-2,b=-1$，得 $-1>-\frac{1}{2}$和$\frac{1}{2}>1$ 均不能成立，故选 B.

※师生交流

学生：做选择题如何恰当使用直接法和间接法?

教师：做选择题时应注意间接法的使用，不能用直接法不会做时才想到用间接法去做. 接触一道选择题时，如果对试题考查的内容及解题思路不清楚，就应该考虑用间接法去做，即便是解题思路清楚，但用直接法做费时过多也应该考虑用间接法.

直接法做选择题时，如果试题考查的是同一个知识点，可利用所学知识直接推理，如果四个选项不是同一个知识点，可逐个考察各个知识点，进行筛选.

例题 4

设 $60<a<84,28<b<33$，求 $a+b,a-b$ 及$\frac{a}{b}$的范围.

※解题点悟　直接使用不等式的性质推理.

※标准解法

$\because\quad 60<a<84,28<b<33$

$\therefore\quad -33<-b<-28,\frac{1}{33}<\frac{1}{b}<\frac{1}{28}$

$\therefore\quad 88<a+b<117,27<a-b<56$

$\therefore\quad \frac{20}{11}<\frac{a}{b}<3$

$\therefore\quad a+b,a-b,\frac{a}{b}$的范围依次是$(88,117)$，$(27,56)$，$\left(\frac{20}{11},3\right)$.

※师生交流

学生:利用不等式性质推理时应注意什么?

教师:在求两数差时通常用同向不等式相加;在求两数的商的范围时,通常转化为同向不等式相乘.

例题5

已知 $f(x)=ax^2-c$,且 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$, $-1\leqslant f(2)\leqslant 5$,求 $f(3)$的取值范围.

※解题点悟

注意到 a 和 c 不是独立的,而是相互制约的,应找到 $f(3)$与 $f(1)$、$f(2)$的关系,用整体代入的思想方法求解.

※标准解法

解法1:$\because \begin{cases} f(1)=a-c \\ f(2)=4a-c \end{cases}$

$\therefore \quad a=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)], c=\frac{1}{3}[f(2)-4f(1)]$

$\therefore \quad f(3)=9a-c=3[f(2)-f(1)]-\frac{1}{3}[f(2)-4f(1)]$

$=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$

又$\because \quad -4\leqslant f(1)\leqslant -1, -1\leqslant f(2)\leqslant 5$

$\therefore \quad -\frac{8}{3}\leqslant \frac{8}{3}f(2)\leqslant \frac{40}{3}, \frac{5}{3}\leqslant -\frac{5}{3}f(1)\leqslant \frac{20}{3}$

$\therefore \quad -1\leqslant f(3)\leqslant 20$

$\therefore \quad f(3)$的取值范围是$[-1,20]$.

解法2:设 $f(3)=9a-c=Af(1)+Bf(2)=A(a-c)+B(4a-c)=(A+4B)a+(-A-B)c$

由$\begin{cases} A+4B=9 \\ A+B=1 \end{cases}$ 解得 $A=-\frac{5}{3}, B=\frac{8}{3}$

即 $f(3)=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$

$\because \quad -4\leqslant f(1)\leqslant -1, -1\leqslant f(2)\leqslant 5$

$\therefore \quad \frac{5}{3}\leqslant -\frac{5}{3}f(1)\leqslant \frac{20}{3}, -\frac{8}{3}\leqslant \frac{8}{3}f(2)\leqslant \frac{40}{3}$

$\therefore \quad -1\leqslant f(3)\leqslant 20$

$\therefore \quad f(3)$的取值范围是$[-1,20]$.

※师生交流

学生:下列解法与标准解法不一致,如何解释?

由$\begin{cases}-4\leqslant a-c\leqslant -1\\ -1\leqslant 4a-c\leqslant 5\end{cases}$ 得$\begin{cases}0\leqslant a\leqslant 3\\ 1\leqslant c\leqslant 7\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}0\leqslant 9a\leqslant 27\\ -7\leqslant -c\leqslant -1\end{cases}$ 则 $-7\leqslant 9a-c\leqslant 28$

即 $f(3)\in[-7,28]$

教师:上述解法比标准解法范围大,主要原因认为 a 和 c 是独立的,而没有注意到 a 和 c 是相互制约的,从上而的解法可以看出:若 $f(3)=28$,则 $a=3,c=1$,而此时 $f(1)=a-c=2$ 与已知 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$ 矛盾,故上述解法是错误的.

例题精析

例题6

比较$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$与$2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$的大小.

※解题点悟 本题可作差进行比较.

※标准解法

$$\because\quad \left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3-\left[2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3\right]$$

$$=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3-2$$

$$=\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)\right]\left[\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^2\right]-2$$

$$=2\left(2+\frac{4}{a^2}-1+\frac{2}{a^2}\right)-2$$

$$=2\left(1+\frac{6}{a^2}\right)-2$$

$$=\frac{12}{a^2}>0$$

$$\therefore\quad \left(1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3>2-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a}\right)^3$$

※师生交流

学生:如何利用作差比较两个数的大小?

教师:解答本题的依据是:$a-b>0\Leftrightarrow a>b$,解题步骤是:作差、变形、判号、定论.其中关键是变形,变形通常采用配方法、因式分解法、有理化法等.

例题7

若 $a, b\in R_+$，比较 $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ 与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的大小.

※解题点悟　本题可采用作差比较，并统一到根式的化简变形.

※标准解法　$\because\ a, b\in R_+$

$$\therefore\ \left[\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]-(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

$$=\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$=\frac{a-b}{\sqrt{b}}+\frac{b-a}{\sqrt{a}}=(a-b)\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$$=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}$$

$$\geqslant 0$$

$$\therefore\ \left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

※师生交流

学生：本题中，在什么情况下 $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ 与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 的大小相等？

教师：由已知 $a, b\in R_+$，及变形结果可看出，当且仅当 a 与 b 相等时，$\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ 与 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 相等.

例题8

已知 $a, b, c\in R_+$，且 $b<c$，比较 ab 与 $ac+bc$ 的大小.

※解题点悟　注意运用已知条件采用作差比较.

※标准解法　$ab-(ac+bc)=a(b-c)-bc$

$\because\ b<c\quad\therefore\ b-c<0$

又 $\because\ a>0\quad\therefore\ a(b-c)<0$

$\because\ b>0, c>0$

$\therefore\ bc>0, -bc<0$

$\therefore\ ab-(ac+bc)<0$

即　$ab<ac+bc$

※师生交流

学生：有限制条件的比较大小问题应注意什么？

教师:变形时应充分考虑到已知条件,并尽量构造它.

例题9

已知 $x>0,x\neq 1,f(x)=\log_x 3x,g(x)=2\log_x 2$,试比较 $f(x)$ 与 $g(x)$的大小.

※解题点悟　作差变形时要注意运用对数运算,并按对数底数进行分类.

※标准解法　$\because\ f(x)-g(x)=\log_x 3x-\log_x 4=\log_x\frac{3x}{4}$

若 $\log_x\frac{3x}{4}>0$,则$\begin{cases}0<x<1\\0<\frac{3x}{4}<1\end{cases}$　或　$\begin{cases}x>1\\\frac{3x}{4}>1\end{cases}$

解得　$0<x<1$ 或 $x>\frac{4}{3}$

若 $\log_x\frac{3x}{4}=0$,则 $x=\frac{4}{3}$

若 $\log_x\frac{3x}{4}<0$,则$\begin{cases}0<x<1\\\frac{3x}{4}>1\end{cases}$　或　$\begin{cases}x>1\\0<\frac{3x}{4}<1\end{cases}$

解得 $1<x<\frac{4}{3}$

故当 $x\in(0,1)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$时,$f(x)>g(x)$

当 $x=\frac{4}{3}$时,$f(x)=g(x)$

当 $x\in\left(1,\frac{3}{4}\right)$时,$f(x)<g(x)$

※师生交流

学生:本题为什么要对底数进行分类讨论?

教师:由于对数函数 $y=\log_a x$ 当 $a>1$ 与 $0<a<1$ 时,对数函数的单调性是相反的,所以有关对数不等式的问题应注意底数是大于1、还是大于零小于1,必要时要进行讨论.

例题10

设 $a>b>0$,比较$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$与$\frac{a-b}{a+b}$的大小.

※解题点悟　由于要比较的两数均为正数,所以可作商比较(此法称为商比法).

※标准解法　由 $a>b>0$ 知$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}>0,\frac{a-b}{a+b}>0$

$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\div\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a-b)(a+b)}{a^2+b^2}\cdot\frac{a+b}{a-b}$