叶 军／编著

初中数学☆奥林匹克实用教程

第二册

基础与提高并重
同步与超前结合
乐趣无限　魅力四射
名师手笔　托起希望之星

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

初中数学奥林匹克实用教程．第2册/叶军编著．—长沙：湖南师范大学出版社，2002.7

ISBN 7—81081—200—9/G·137

Ⅰ．初…　Ⅱ．叶…　Ⅲ．数学课—初中—教学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 048157 号

初中数学奥林匹克实用教程

第二册

叶　军　编著
策划组稿：李映辉
责任编辑：奇　平
责任校对：暮　子

湖南师范大学出版社出版发行
（长沙市岳麓山）
湖南省新华书店经销　　湖南众鑫印务有限公司印刷
730×988　16开　28.25 印张　583 千字
2002 年 7 月第 1 版　2002 年 7 月第 1 次印刷
印数：1—15000 册
ISBN7—81081—200—9/G·137
定价：29.00 元

前　言

在新世纪里，体现因材施教的教育特色，培养不同层次的学科人才，是基础教育正在积极探索的一个重要课题．从全国范围来看，教育部委托北京大学、清华大学、北京师范大学、华东师范大学等高校的附中举办了面向全国的高中理科实验班，其办班的主要目的是为国家培养高水平的中学生学科竞赛人才，以适应国际大赛的需要；从本省来看，湖南省教育厅委托湖南师范大学附中、长沙市一中、长沙市雅礼中学、长沙市长郡中学举办了面向全省的高中理科实验班．自有理科实验班以来，每年均经过了严格的招生考试，考试科目分四科：数学、语文、外语、理化，四科总分 450 分，其中语文、外语、理化各占 100 分，惟独数学占 150 分，并且招生录取原则中规定：数学单科成绩不得低于 65 分．由此可见数学单科的地位与作用，能否考上高中理科实验班，数学是关键．此举一直受到广大中学教师、学生及家长的广泛关注．

随着我国高等教育的迅猛发展，读大学将不再是一件难事．现在的中学生基本上都是独生子女，家长对子女的期望值已发生了质的变化．以往是大学选择学生，而现在已经出现了学生选择大学（不服从分配）的现象．随着各地理科实验班办学质量不断提高，学生追求名牌大学的愿望将会不断增强，但由于清华、北大等一流大学每年在各省的招生名额都非常少，几乎都被理科实验班的学生提前取走，因此，要在全国高考中竞争考上清华、北大是比较困难的．这样一来，不少学生家长为了实现儿女的清华、北大梦，从初中一年级开始就着手准备了．

在这样一种趋势下，为了保证高中理科实验班有高质量的生源，各地的名牌中学在初中就纷纷办起了各种层次的实验班．这样一来，能进入初中实验班学习就成了学生追求的目标之一．

据我们了解，除了学校办的初中实验班外，在社会上，由社会团体以及学生家长自发创办的面向那些学有余力的学生开设的提高班也有不少．这些民办的提高班，往往是由各中学的初中实验班的学生组成．这些学生在校外学到的知识和技能是对校

内所学知识的重要补充，其中不少学生通过一至两年的学习，就能在全国初中数学联赛以及高中理科实验班的考试中脱颖而出.

据我们了解，目前全国的高、初中数学教科书已进行了大面积的改编，而现在各校初中实验班所用的教材都比较陈旧，适应不了新世纪中学教育改革的需要.现在绝大多数实验班和提高班的师生都希望有一套系统的能适应未来至少5年教育发展的学习用书.

综上所述，根据新编全国高、初中数学教科书的要求，湖南师范大学出版社组织编写了这套《初中数学奥林匹克实用教程》丛书.

该套丛书共分四册，第一至三册中每讲分A、B两子讲.第四册是为报考高中理科实验班的学生编写的复习迎考教材.在编写过程中注意突出以下两点：

(1)**基础与提高并重** 采用同一讲分A、B两子讲的编写方法，A讲强调基础，帮助学生从竞赛的角度进一步深化对初中课本数学内容的认识，掌握课本以外的奥数内容；B讲强调提高，帮助学生掌握初中奥数中的一些要求较高的内容和技巧.

(2)**同步与超前结合** A讲内容与初中教科书内容基本同步，但在数学思维方法的渗透和数学能力与技巧的培养方面又有一定的超前性，以便帮助那些出类拔萃的学生更快地提高；B讲内容则不受教材知识顺序的限制，在突出重点的基础上加强知识和方法的纵横联系，帮助学生从整体上把握初中奥数的内容，提高数学素养和综合解题的能力.

值此《初中数学奥林匹克实用教程》出版之机，我谨向热情支持和关心本书出版的湖南师范大学出版社的有关编辑致以崇高的谢意；我还要感谢为数学竞赛作出贡献的所有专家学者和中学数学教师，本书的许多材料来源于他们的智慧和创造；最后还要感谢曹灵芝女士，她为本书的出版做了大量的具体工作.

由于水平所限，书中若有不妥和差错，敬请专家和读者批评指正，并且我热情地期待更多的优秀数学奥林匹克教材问世.

叶 军
2002年夏于湖南师范大学

作者简介

叶军，男，湖南益阳市人，1963年4月生，现为湖南师范大学数学系副教授，中国数学奥林匹克高级教练。已发表论文百余篇，出版著作9部，其中专著《数学奥林匹克教程》是全国各省市高中理科实验班必读的三本奥数书之一，被同行们誉为“白皮书”。叶军是湖南师范大学附中第34届IMO金牌获得者、第32届IMO银牌获得者的主要教练之一。1992年曾率领湖南省队参加第6届中国数学奥林匹克，该队以团体总分第一夺得“陈省身金杯”。

叶军同志从事数学奥林匹克的教学和研究工作近20年（中学6年，大学14年），在大学主讲师范类本科生必修课程“竞赛数学”，几乎每年被省内外名牌中学邀请为理科实验班讲学。他独特的教学风格赢得了广大师生的赞誉，并初步形成了贯穿中学到大学别具一格的数学奥林匹克教学体系。如今有一批青少年学子正在他的指导下脱颖而出。

内容简介

本套丛书共四册，是专门为学有余力的初中学生编写的数学奥林匹克系统学习教材。在第一至三册里，每讲分A、B两子讲。A讲主要讲述课本知识的延伸；B讲主要讲述课本知识的提高。两子讲在知识和题目的难易程度上形成了梯度，并且均指明了适用学生对象，以便于学生自学，方便教师备课。每子讲均配备了大量的针对性习题，并附有答案与提示。

目　录

第一讲 同余式及应用

A

(本讲适合初三)

同余是我们研究整数性质时常遇到的一种重要现象,同时也是我们解决有关整数问题可充分利用的一种重要数学关系,大数学家高斯最先对此作了深入探讨,并创立了同余理论.此后,同余理论发展成为了研究整数性质的强有力的工具.这里我们仅能给出十分肤浅的介绍,尽管如此,它仍闪现出夺目的光彩.

§1.1　同余的概念及性质

定义　设 a,b 是两个整数,如果 a 和 b 用正整数 m 除所得的余数相同,则称 a 与 b 对于模 m 同余,记作

$$a\equiv b\pmod m. \tag{*}$$

否则就说 a,b 对于模 m 不同余,记作 $a\not\equiv b\pmod m$.(*)式称为同余式.

根据同余的定义,显然有

(1) $m\mid a-b\Leftrightarrow a\equiv b\pmod m$.

(2) $a=b+mt\Leftrightarrow a\equiv b\pmod m$.

(3) $a\equiv a\pmod m$.

(4) $a\equiv b\pmod m\Leftrightarrow b\equiv a\pmod m$.

(5) $a\equiv b\pmod m,b\equiv c\pmod m\Rightarrow a\equiv c\pmod m$.

两个同模的同余式能够像等式一样进行加、减、乘、乘方运算.归纳起来,同余式还有如下常用性质.

性质 1　若 $a_1\equiv b_1\pmod m,a_2\equiv b_2\pmod m$,则

(1) $a_1\pm a_2\equiv b_1\pm b_2\pmod m$

(2) $ka_1\equiv kb_1\pmod m,k\in\mathbf{Z}$.

(3) $a_1a_2\equiv b_1b_2 \pmod m$.

证 (1)因为 $m\mid a_1-b_1, m\mid a_2-b_2$,所以

$$m\mid(a_1-b_1)\pm(a_2-b_2),$$

即 $m\mid(a_1\pm a_2)-(b_1\pm b_2)$,

亦即 $a_1\pm a_2\equiv b_1\pm b_2 \pmod m$.

(2)由 $m\mid a_1-b_1$,有 $m\mid ka_1-kb_1$,因此

$$ka_1\equiv kb_1 \pmod m.$$

(3)由 $a_1\equiv b_1 \pmod m$,有

$$a_1a_2\equiv b_1a_2 \pmod m. \quad ①$$

又由 $a_2\equiv b_2 \pmod m$,有

$$b_1a_2\equiv b_1b_2 \pmod m. \quad ②$$

再由①,②得

$$a_1a_2\equiv b_1b_2 \pmod m.$$

由性质1(3)立即可得.

推论 若 $a\equiv b \pmod m$,则对任意正整数 n 有

$$a^n\equiv b^n \pmod m.$$

性质2 若 $(c,m)=1$, $ca\equiv cb \pmod m$,则

$$a\equiv b \pmod m.$$

一般地,我们有

性质3 若 $(c,m)=d$, $ca\equiv cb \pmod m$,则

$$a\equiv b \left(\bmod \frac{m}{d}\right).$$

证 由 $m\mid c(a-b)$,有 $\frac{m}{d}\mid\frac{c}{d}(a-b)$,

而 $\left(\frac{m}{d},\frac{m}{d}\right)=1$,所以有 $\frac{m}{d}\mid a-b$,

即 $a\equiv b \left(\bmod \frac{m}{d}\right)$.

性质4 若 $a\equiv b \pmod m$, $a\equiv b \pmod n$,则

$$a\equiv b \pmod{[m,n]}.$$

证 因为 $m\mid a-b$, $n\mid a-b$,所以 $a-b$ 是 m,n 的公倍数,所以 $[m,n]\mid a-b$,

即 $a\equiv b \pmod{[m,n]}$.

推论 若 $a\equiv b \pmod m$, $a\equiv b \pmod n$, $(m,n)=1$,则

$$a\equiv b \pmod{mn}.$$

性质5 若 $a\equiv b \pmod m$,且 $n\mid m$,则

$$a\equiv b \pmod n.$$

证 因为 $n\mid m, m\mid a-b$,所以 $n\mid a-b$,即 $a\equiv b(\text{mod } n)$.

性质 6 设 p 为质数,则

$(a+b)^p\equiv a^p+b^p(\text{mod } p)$.

证 我们先证明 $C_p^k\equiv 0(\text{mod } p), k=1,2,\cdots,p-1$.其中 C_p^k 为组合数.

事实上,由恒等式 $k\cdot C_p^k=pC_{p-1}^{k-1}$,得

$p\mid kC_p^k, k=1,2,\cdots,p-1$.

因为 $(p,k)=1, k=1,2,\cdots,p-1$,所以

$p\mid C_p^k, k=1,2,\cdots,p-1$.

$\therefore\quad C_p^k\equiv 0(\text{mod } p), k=1,2,\cdots,p-1$.

其次,由二项式定理,得

$$\begin{aligned}(a+b)^p&=a^p+C_p^1a^{p-1}b+C_p^2a^{p-2}b^2+\cdots+C_p^{p-1}ab^{p-1}+b^p\\&\equiv a^p+b^p(\text{mod } p).\end{aligned}$$ 证毕.

例 1 (1)求证:$63\mid 64^{625}-1$. (2)求证:$5\mid 2^{2001}+3^{2001}$.

证 (1)$\because\quad 64\equiv 1(\text{mod } 63)$,$\therefore\quad 64^{625}\equiv 1^{625}\equiv 1(\text{mod } 63)$,

$\therefore\quad 64^{625}-1\equiv 0(\text{mod } 63)$,$\therefore\quad 63\mid 64^{625}-1$.

(2)因为 $2^{2000}=2\times^{4\times 500}=16^{500}$,$16\equiv 1(\text{mod } 5)$,

所以 $2^{2000}\equiv 1(\text{mod } 5)$,

所以 $2^{2001}\equiv 2(\text{mod } 5)$.

又因为 $3^{2000}=3^{4\times 500}=81^{500}$,

$81\equiv 1(\text{mod } 5)$,

所以 $3^{2000}\equiv 1(\text{mod } 5)$,$3^{2001}\equiv 3(\text{mod } 5)$.

于是有 $2^{2001}+3^{2001}\equiv 2+3=5\equiv 0(\text{mod } 5)$.

注 一般地,我们有

$(a+b)^n-b^n\equiv 0(\text{mod } a)$,

$a^m+b^m\equiv 0(\text{mod } a+b)$,$m$ 为正奇数.

例 2 今天是星期六,再过 9^{2000} 天是星期几?

解 问题的实质是求 9^{2000} 除以 7 的余数.

$\because\quad 9^{2000}=9^{3\times 666+2}=729^{666}\cdot 81$,

$729\equiv 1(\text{mod } 7)$,$729^{666}\equiv 1(\text{mod } 7)$, $81\equiv 4(\text{mod } 7)$,

$\therefore\quad 9^{2000}=729^{666}\cdot 81\equiv 1\cdot 4=4(\text{mod } 7)$,

即 9^{2000} 除以 7 余 4,从而再过 9^{2000} 天是星期三.

例 3 求 8 除以 $1^5+2^5+\cdots+99^5+100^5$ 所得的余数.

解 对偶数 $2n$,$(2n)^5\equiv 0(\text{mod } 8)$;

对奇数 $2n+1$,$(2n+1)^5\equiv 2n+1(\text{mod } 8)$,

所以 $1^5+2^5+\cdots+99^5+100^5$

$= (1^5+3^5+\cdots+99^5)+(2^5+4^5+\cdots+100^5)$

$\equiv 1+3+\cdots+99=50^2=(48+2)^2\equiv 2^2=4(\text{mod}8)$.

即所求余数为4.

注 对任意奇数 a, $a^2\equiv 1(\text{mod}8)$,该结论十分有用.

例4 证明:一个正整数除以9所得的余数等于其各位数字之和除以9所得的余数.

证 设此数为 $A=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$,则

$A=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_1\cdot 10+a_0$.

因为 $10\equiv 1(\text{mod}9)$,

所以对于任意正整数 k 有 $10^k\equiv 1(\text{mod}9)$,

于是 $A\equiv a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0(\text{mod}9)$. 证毕.

例5 (1)求 $(257^{33}+46)^{2001}$ 被50除的余数.

(2)求 $47^{35^{23}}$ 被7除的余数.

解 (1)$\because$ $257\equiv 7(\text{mod }50)$,

$\therefore$ $257^2\equiv 49\equiv -1(\text{mod }50)$,

$\therefore$ $(257^2)^{16}\equiv(-1)^{16}=1(\text{mod }50)$,

$\therefore$ $257^{33}\equiv 257\equiv 7(\text{mod }50)$.

又$\because$ $46\equiv -4(\text{mod}50)$, $\therefore 257^{33}+46\equiv 7-4\equiv 3(\text{mod }50)$.

又$\because$ $3^{2001}=(3^5)^{398}\cdot 3^{11}\equiv(-7)^{398}\cdot 3^{11}$

$\equiv[(-7)^2]^{199}\cdot 3^{11}\equiv(-1)^{199}\cdot 3^{11}$

$\equiv -27\cdot 81^2\equiv -27\times 19^2\equiv -27\times 11=-297\equiv 3(\text{mod }50)$.

即 $(257^{33}+46)^{2001}$ 被50除的余数为3.

(2)分析:先找出最小的正整数 n,使 $47^n\equiv 1(\text{mod }7)$.再考虑 $35^{23}(\text{mod }n)$.

$\because$ $47\equiv 5(\text{mod }7)$, $\therefore$ $47^2\equiv 25\equiv 4(\text{mod }7)$, $\therefore$ $47^3\equiv 5\times 4=20\equiv -1(\text{mod }7)$,

$\therefore$ $47^6\equiv 1(\text{mod }7)$.

又$\because$ $35\equiv 5\equiv -1(\text{mod }6)$, $\therefore 35^{23}\equiv -1(\text{mod }6)$.

$\therefore$ $35^{23}=6k+5$, k 为整数.

这样一来 $47^{35^{23}}=47^{6k+5}=(47^6)^k\cdot 47^5\equiv 47^5$

$=47^2\cdot 47^5\equiv 4\cdot(-1)\equiv 3(\text{mod }7)$,

即 $47^{35^{23}}$ 被7除的余数为3.

例6 试求最大正整数 m 的值,使得 $123\equiv 333\equiv 718(\text{mod}m)$.

解 $\because$ $123\equiv 333\equiv 718(\text{mod}m)$,

$\therefore$ $m\mid 333-123, m\mid 718-333, m\mid 718-213$,

即 $m\mid 210, m\mid 385, m\mid 595$.

$\therefore$ $m_{\max}=(210,385,595)=35$.

例7 已知 $13|\overline{3axaya3}$，求 x,y.

解 $\overline{3axaya3}=3\times10^6+a\times10^5+x\cdot10^4+a\cdot10^3+y\cdot10^2+a\cdot10+3(0\leqslant x,a,y\leqslant9)$.

注意到 $a\cdot10^5+a\cdot10^3+a\cdot10=a10101 0\equiv0(\bmod 13)$，

由已知条件 $\overline{3axaya3}\equiv0(\bmod 13)$，故有

$3\cdot10^6+x\cdot10^4+y\cdot10^2+3\equiv0(\bmod 13)$.

$\because$ $10^6\equiv1(\bmod 13),10^4\equiv3(\bmod 13),10^2\equiv9(\bmod 13)$,

故 $6+3x+9y\equiv0(\bmod 13),3(x+3y+2)\equiv0(\bmod 13)$.

$\because$ $(3,13)-1$，$\therefore$ $x+3y+2\equiv0(\bmod 13)$.

$\because$ $2\leqslant x+3y+2\leqslant9+3\times9+2=38$.

故 $x+3y+2=13$ 或 26.

即 $x+3y=11$ 或 24. $\therefore$ $x\equiv2,0(\bmod 3)$.

经计算可知，$(x,y)=(0,8),(2,3),(3,7),(5,2),(6,6),(8,1),(9,5)$.

例8 求证：$504|n^9-n^3$，n 为整数.

分析 由 $504=7\cdot8\cdot9$，可考虑对模 7,8,9 分类讨论.

证 由于 $504=7\cdot8\cdot9$：

当 $n\equiv0,\pm1,\pm2,\pm3(\bmod 7)$ 时，有

$n^3\equiv0,\pm1(\bmod 7),n^9\equiv0,\pm1(\bmod 7)$.

故 $n^9-n^3\equiv0(\bmod 7)$.

当 $n\equiv0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4(\bmod 8)$ 时，有

$n^3\equiv0,\pm1,\pm3(\bmod 8),n^9\equiv0,\pm1,\pm3(\bmod 8)$.

故 $n^9-n^3\equiv0(\bmod 8)$.

当 $n\equiv0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4(\bmod 9)$ 时，有

$n^3\equiv0,\pm1(\bmod 9);n^9\equiv0,\pm1(\bmod 9)$.

故 $n^9-n^3\equiv0(\bmod 9)$.

又因为 $(7,8)=(7,9)=(8,9)=1$，所以

$n^9-n^3\equiv0(\bmod 7\cdot8\cdot9)$.

即 $504|n^9-n^3$.

例9 试证：$1992|2000^n-200^n+449^n-257^n$，其中 n 为正整数.

证 设 $A=2000^n-200^n+449^n-257^n$.

又 $1992=2^3\cdot3\cdot83$,

所以只需证明 $A\equiv0(\bmod 8),A\equiv0(\bmod 3),A\equiv0(\bmod 83)$.

事实上，$2000\equiv0(\bmod 8),200\equiv0(\bmod 8),449\equiv1(\bmod 8),257\equiv1(\bmod 8)$，所以

$A\equiv0^n-0^n+1^n-1^n\equiv0(\bmod 8)$.

又 $2000\equiv2(\bmod 3),200\equiv2(\bmod 3),449\equiv2(\bmod 3),257\equiv2(\bmod 3)$,

所以 $A\equiv2^n-2^n+2^n-2^n\equiv0(\bmod 3)$.

再由 $2000=8(\bmod 83)$，$200\equiv 34(\bmod 83)$，$449\equiv 34(\bmod 83)$，$257\equiv 8(\bmod 83)$，所以 $A\equiv 8^n-34^n+34^n-8^n\equiv 0(\bmod 83)$.

综上所述，$A\equiv 0(\bmod 1992)$.

例 10　若 $(5,x)=(5,y)=(5,z)=1$，则 $x^5-y^5-z^5$ 不是 25 的倍数.

证　$\because x,y,z$ 均与 5 互质，$\therefore$ 可设 $x=5k_1+r_1$，$y=5k_2+r_2$，$z=5k_3+r_3$，其中 $r_1,r_2,r_3=1,2,3,4$，于是有

$$x^5\equiv r_1^5,y^5\equiv r_2^5,z^5\equiv r_3^5(\bmod 25).$$

这样一来，问题等价于证明当 $r_1,r_2,r_3\in\{1,2,3,4\}$ 时，

$$r_1^5-r_2^5-r_3^5\not\equiv 0(\bmod 25). \qquad (*)$$

又　$r_1^5,r_2^5,r_3^5\equiv r_1,r_2,r_3(\bmod 5)$，

故　$r_1^5-r_2^5-r_3^5\equiv r_1-r_2-r_3(\bmod 5)$.

若 $r_1-r_2-r_3\not\equiv 0(\bmod 5)$，则 $(*)$ 式成立.

下面只需证明满足 $r_1-r_2-r_3=0(\bmod 5)$ 的情形 $(*)$ 式也成立.

事实上，不妨设 $r_2\leqslant r_3$，则满足 $r_1-r_2-r_3\equiv 0(\bmod 5)$ 的数组 (r_1,r_2,r_3) 只有 8 种情形.

$(r_1,r_2,r_3)=(1,2,4),(1,3,3),(2,1,1),(2,3,4),(3,1,2),(3,4,4),(4,1,3),(4,2,2)$.

注意到 $2^5\equiv 7,3^5\equiv -7,4^5\equiv -1(\bmod 5)$，依次对上述 8 种情形模 25 验证，得：

①$1^5-2^5-4^5\equiv 1-7-(-1)=-5$;

②$1^5-3^5-3^5\equiv 1-2\times(-7)=15$;

③$2^5-1^5-1^5\equiv 7-2=5$;

④$2^5-3^5-4^5\equiv 7-(-7)-(-1)=15$;

⑤$3^5-1^5-2^5\equiv(-7)-1-7=-15$;

⑥$3^5-4^5-4^5\equiv -7-2(-1)=-5$;

⑦$4^5-1^5-3^5\equiv -1-1-(-7)=5$;

⑧$4^5-2^5-2^5\equiv(-1)-2\times 7\equiv -15$.

由此可知，上述 8 种情形模 25 均不为 0，从而我们证明了

$$x^5-y^5-z^5\not\equiv 0(\bmod 25).$$

注　该题的一般性问题为：设 p 为质数，若 $(p,x)=(p,y)=(p,z)=1$，则 $x^p-y^p-z^p$ 不是 p^2 的倍数.此结论是否成立请同学们证明.

例 11　从集合 $\{1,4,8,10,16,19,21,25,30,43\}$ 中取出不超过 4 个数，使其和是 11 的倍数，这样的取法有多少种？

解　对已知集合中的 10 个数依次 mod11，得

$a_1=1\equiv 1$，$a_2=4\equiv 4$，$a_3=8\equiv -3$，$a_4=10\equiv -1$，$a_5=16\equiv 5$，$a_6=19\equiv -3$，$a_7=21\equiv -1$，$a_8=25\equiv 3$，$a_9=30\equiv -3$，$a_{10}=43\equiv -1$.

将所作的和分成三类：

第一类，取两数的和，有

$a_1+a_4\equiv a_1+a_7\equiv a_1+a_{10}\equiv 1+(-1)\equiv 0(\bmod 11)$,

$a_8+a_3\equiv a_8+a_6\equiv a_8+a_9\equiv 3+(-3)\equiv 0(\bmod 11)$.

共有 6 种取法.

第二类，取三数的和，注意到只有

$4+(-3)+(-1)\equiv 0(\bmod 11)$.

因此，和中必有 a_2，再取 a_4,a_7,a_{10}之一，有 3 种取法；最后取 a_3,a_6,a_9 之一，有 3 种取法，则共有 9 种取法.

第三类，取四数的和. 注意到

$-1+(-1)+(-1)+3\equiv 0(\bmod 11)$

的 4 数和恰有 1 种；

$(-1)(-1)+(-3)+5\equiv 0(\bmod 11)$

的 4 数和恰有 9 种；

$1+(-1)+3+(-3)\equiv 0(\bmod 11)$

的 4 数和也恰有 9 种；

$3+4+5+(-1)=11\equiv 0(\bmod 11)$

的 4 数和恰有 3 种；

$5+1+(-3)+(-3)\equiv 0(\bmod 11)$

的 4 数和也恰有 3 种.

故 4 数和的情况共 25 种取法.

综合所述，取 2 个，3 个，4 个作和的取法共有 $6+9+25=40$ 种.

§1.2　末位数与完全平方数

1. 末位数

一个十进制数$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$的末位数用同余式来刻划是非常方便的. 我们有

(1) $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\equiv a_0(\bmod 10)$,

(2) $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\equiv \overline{a_1a_0}(\bmod 100)$,

(3) 对于任一 $k(0<k<n)$，有 $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\equiv \overline{a_ka_{k-1}\cdots a_1a_0}(\bmod 10^k)$.

(4) 设 $r\in\{1,2,3,4\}$，则对于 $k\in\mathbf{N}^*$ 有

$a^{4k+r}\equiv a^r(\bmod 10)$.

证　只需证明

$$\begin{cases}a^{4k+r}\equiv a^r(\bmod 2) & ①\\ a^{4k+r}\equiv a^r(\bmod 5) & ②\end{cases}$$

事实上，因为 $a\equiv 0,1(\bmod 2)$，所以当 $a\equiv 0(\bmod 2)$时，①式显然成立；当 $a\equiv 1$

$(\bmod 2)$时，$a^2\equiv 1(\bmod 2)$，

$\therefore\quad a^4\equiv 1(\bmod 2)$，$\therefore\quad a^{4k+r}\equiv(a^4)^k\cdot a^r\equiv a^r(\bmod 2)$，

故①式成立.

又$\because\quad a\equiv 0,\pm 1,\pm 2(\bmod 5)$，$\therefore\quad a^2\equiv 0,1,-1(\bmod 5)$，$\therefore\quad a^4\equiv 0,1(\bmod 5)$.

当$a\equiv 0(\bmod 5)$时，②式显然成立.

当$a\not\equiv 0(\bmod 5)$时，$a^4\equiv 1(\bmod 5)$，

$\therefore\quad a^{4k+r}\equiv(a^4)^k\cdot a^r\equiv a^r(\bmod 5)$，

$\therefore$　②式成立.

综上所述，$a^{4k+r}\equiv a^r(\bmod 10)$.

例1　证明下列命题成立：

(1)2个连续正整数的积的末位数字只能是0,2,6;

(2)3个连续正整数的积的末位数字只能是0,4,6;

(3)4个连续正整数的积的末位数字只能是0,4;

(4)5个或5个以上连续正整数的积的末位数字是0.

证　(1)设$n\in\mathbf{N}^*$，只需证明

$n(n+1)\equiv 0,2,6(\bmod 10)$.

事实上，$\because\quad n\equiv 0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,5$，

$\therefore\quad n^2\equiv 0,1,4,-1,6,5$，$\quad\therefore\quad n^2+n\equiv 0,2,6(\bmod 10)$.

(2)设$n\in\mathbf{N}^*$，只需证明

$n(n+1)(n+2)\equiv 0,4,6(\bmod 10)$.

当$n\equiv 0,-1,-2$时，$n(n+1)(n+2)\equiv 0(\bmod 10)$;

当$n\equiv -3$时，$n(n+1)(n+2)\equiv(-3)(-2)(-1)\equiv 4(\bmod 10)$;

当$n\equiv -4$时，$n(n+1)(n+2)\equiv(-4)(-3)(-2)\equiv 6(\bmod 10)$;

当$n\equiv 1$时，$n(n+1)(n+2)\equiv 6(\bmod 10)$;

当$n\equiv 2$时，$n(n+1)(n+2)\equiv 2\cdot 3\cdot 4\equiv 4(\bmod 10)$;

当$n\equiv 3$时，$n(n+1)(n+2)\equiv 3\cdot 4\cdot 5\equiv 0(\bmod 10)$;

当$n\equiv 4$时，$n(n+1)(n+2)\equiv 4\times 5\times 6\equiv 0(\bmod 10)$;

当$n\equiv 5$时，$n(n+1)(n+2)\equiv 5\times 6\times 7\equiv 0(\bmod 10)$.

综上所述，$n(n+1)(n+2)\equiv 0,4,6(\bmod 10)$.

(3)设$n\in\mathbf{N}^*$，只需证明

$n(n+1)(n+2)(n+3)\equiv 0,4(\bmod 10)$.

事实上，当$n\equiv 0,-1,-2,-3$时，显然有

$n(n+1)(n+2)(n+3)\equiv 0(\bmod 10)$;

当$n\equiv -4$时，$n(n+1)(n+2)(n+3)\equiv(-4)(-3)(-2)(-1)\equiv 4(\bmod 10)$;

当$n\equiv 1$时，$n(n+1)(n+2)(n+3)\equiv 1\times 2\times 3\times 4\equiv 4(\bmod 10)$;

当$n\equiv 2,3,4,5$时，显然有