高等学校规划教材

矿业运筹学

邢中光　主编

煤炭工业出版社

高等学校规划教材

矿业运筹学

邢中光 主编

煤炭工业出版社

（京）新登字042号

内 容 提 要

矿业运筹学是应用现代数学方法和电算手段在矿业生产管理、设计和科研方面寻求最优决策的一门正在迅速发展的矿业学科。本书紧密结合运筹学在矿业中的应用，系统地介绍了其主要分支的基本理论和方法，以及在矿业应用的一般性实例。

本书可作为高等工科院校矿业类专业的教材，亦可供从事矿山设计、科研和生产技术管理等方面的工程技术人员参考。

高等学校规划教材
矿 业 运 筹 学
邢中光 主编
责任编辑：刘泽春
*
煤炭工业出版社 出版
（北京安定门外和平里北街21号）
煤炭工业出版社印刷厂 印刷
新华书店北京发行所 发行
*
开本 787×1092mm 1/16 印张 15 3/4
字数 373 千字 印数 1—1，355
1996年4月第1版 1996年4月第1次印刷
ISBN 7—5020—1315—6/F2

书号 4083 A0340 定价 12.20 元

前　　言

80年代各矿业院校相继开设了运筹学或矿业运筹学课程，对于采矿工程专业，各院校都把矿业运筹学列为主干课程。

矿业运筹学紧密结合运筹学在矿业中的应用介绍其主要分支的基本内容，而不侧重于严密的数学推导和证明。对于每种算法则着重介绍数学模型、基本概念和基本思路，使读者掌握求解方法和步骤。由于运筹学与计算机结合相当密切，因此，为便于应用，在附录中给出了运筹学主要分支比较重要的算法计算机程序，程序以BASIC语言为主。全书每章后面都有习题供选择，有些是紧密结合矿业实际的应用题目。

本书按40～60学时编写，各校可根据教学时数在内容上有所取舍。在教学过程中可适当安排某些算法计算机程序的编制和上机练习。

本书可作为高等工科院校矿业类专业的教材，对从事矿山设计、科研和生产技术管理等方面的工程技术人员也很有参考价值。

本书主编为邢中光，副主编为韩可琦，具体编写分工如下：

绪　论　**邢中光（黑龙江矿业学院）**

第一章　线性规划　**邢中光**

第二章　非线性规划　**罗　健（湘潭矿业学院）**

孙广义（黑龙江矿业学院）

第三章　动态规划　**李定生（焦作工学院）**

第四章　图与网络计划技术　**李定生**

第五章　可靠性理论　**韩可琦（中国矿业大学）**

第六章　预测与决策　**张玉祥（中国矿业大学）**

由于时间和水平所限，本书难免存在不妥之处，欢迎广大读者批评指正。

编　者

1994.6

目　　录

绪　论

运筹学出现在20世纪30年代末，称之为"运用研究"（Operational Research），我国译为运筹学。

运筹学是一门应用科学，至今国内外尚没有统一又确切的定义。它广泛应用现有的科学知识和数学方法，解决实践中提出的专门问题，如对人力、物力、财力等资源进行统筹安排，为决策者选择满意的决策提供科学依据。

矿业运筹学是适应矿业科学技术的发展而形成的一门学科。它的主要内容是结合矿业的特点，运用运筹学的基本知识来解决矿业学科中有关技术与管理等问题。

一般认为，运筹学是第二次世界大战期间发展起来的。主要是研究军事问题，如反空袭雷达控制系统、商船队护航问题、攻击和搜索潜艇问题等。为了进行研究，一些国家成立了专门研究小组，有的是跨学科组织。最早和最著名的是以美国物理学家勃拉凯特（Blackett）领导的运筹小组，其中有物理学家、数学家、经济学家，还有其他的专业学者、军官等，是一个典型的跨学科组织。

第二次世界大战结束以后，从事军事运筹的许多专家转入研究工业、农业、经济和社会科学等领域问题，使运筹学得到了迅速发展，逐步形成了一门独立的学科。

运筹学研究的范围很广泛，分支很多。比较成熟的分支有：线性规划、非线性规划、动态规划、决策论、可靠性理论、排队论、对策论、存贮论、搜索论等。其他比较常用的还有图论、网络计划技术（统筹方法）和计算机模拟等。

运筹学各个分支解决问题的步骤比较明确，具体可分为以下五个步骤：

（1）提出和形成问题；

（2）建立模型；

（3）求解；

（4）对解进行检验与校正；

（5）解的实施。

以上过程应反复进行。

我国古代就有朴素的运筹学思想并在实践中有不少应用。如齐王赛马、丁渭修皇宫、沈括运军粮等。

50年代我国从西方引入了运筹学，最早应用在建筑业和纺织业。我国在运筹学某些领域的研究与应用有独到之处，如研究运输问题，在粮食部门为解决合理粮食调运问题，提出了"图上作业法"；在解决邮递员合理投递路线时，提出了"中国邮路问题"的解法。

60年代我国主要用运筹学研究经济问题，重点研究了投入产出模型，并首先在钢铁部门得到了应用。同时在很多领域开始应用统筹法。

70年代我国各条战线推广了优选法，优化设计在工程设计中引起了广泛重视，开始研究排队论、图论、存贮论等在各个领域的应用。

80年代至今是运筹学全面深入发展阶段。在教育、交通、能源、农业、矿业、工程设

计、经济、企业管理、城市管理、军事等方面都得到了发展。对各个分支基础理论进行了广泛研究，特别是运筹学与计算机相结合，取得了丰硕成果。

矿业运筹学的发展只有 30 多年的历史，自 1961 年召开第一届“计算机与计算机技术和运筹学在矿业中的应用”(Applications of Computers or Computer Techniques and Operations Research In the Mineral Industry。缩写 APCOM）国际会议以来，运筹学在地质、采矿、矿井建设和选矿等领域的应用得到了迅速发展。

煤炭系统运筹学的研究和应用起步较晚，80 年代初期才开始，但发展迅速，有的成果已达到国际先进水平。其应用范围比较广泛，涉及到地质勘探、规划、设计、施工、生产、经营与管理、控制等各个方面。具体应用可简述如下：

（1）市场销售　在广告预算和媒介的选择、竞争性定价、新产品开发、市场预测和销售计划的制定等方面；

（2）生产计划　在总体规划方面主要是确定矿区的长远规划目标，矿井年度计划的安排，此外还应用于生产作业计划、日程表的编排等；

（3）库存管理　主要应用于矿用多种物资库存量的确定与管理，确定某些设备的能力和容量等；

（4）运输问题　主要研究地面各种运输，如铁路运输、公路和水路运输的合理配合，煤炭、矿石等物资的合理调运问题。研究井上、下运输系统的合理确定问题；

（5）可靠性问题　主要研究设备维修、更新和生产系统可靠性问题；

（6）工程设计　在矿山建设、采矿机械设计、矿井设计、选矿厂设计等方面应用相当广泛；

（7）财务、人事、工程管理　这里涉及预算、贷款、成本分析，以及人才需求预测、人才开发与管理、人员分配与评价、各项工程施工的过程管理等等；

（8）决策　主要用于矿区、矿井发展规划方案的确定，各种工程项目的可行性论证，矿井设计方案的选择等。

近年来，随着国内外运筹学的发展，其应用领域在扩大，越来越注重研究宏观问题，解决大系统、复杂系统问题，开始与系统分析相结合。同时，也注重了研究和解决矿山企业微观管理决策及技术决策问题，使矿业运筹学在理论与实践方面得以健康地发展。

第一章 线 性 规 划

线性规划（linear programming）是运筹学的一个重要分支。自创始以来，这一分支发展很快。在发展史上最有影响的有两位学者，一位是前苏联的学者康托洛维奇（Л. В. Канторович），1939年在解决工业生产组织和计划问题时，提出了类似的线性规划的模型，并给出了“解乘数法”的求解方法。但在当时未被重视，直到1960年发表了《最佳资源利用的经济计算》一书后，才受到国内外的一致重视，为此他获得了诺贝尔奖金。另一位是丹捷格（G. B. Dantzig）。在1947年提出了线性规划，被认为是线性规划的创始人，给出了解线性规划问题的单纯形法。

线性规划是一种合理利用资源和合理调配资源的数学方法。其数学模型用自然语言表达是满足一组约束条件下，求目标函数的极值，目标函数和约束条件皆为线性函数。

第一节 基本概念和图解法

一、线性规划的数学模型

为了说明线性规划的数学模型和建模过程，下面举3个例子加以说明。

〔例1—1〕某矿开采2个煤层，上层的粉煤采出率为20%，下层煤的粉煤采出率为30%。上层煤主要生产环节能力50万t/a，下层为20万t/a。由于开采顺序等条件的限制，下层煤的产量不能超过上层煤的产量。按照粉煤的供销要求，矿井粉煤的年产量不应超过12万t/a。试确定这2个煤层的合理年产量，使得全矿井产量最大。

这个问题可以用以下的数学模型来描述。

设 x_1 为上层煤的年产量，x_2 为下层煤的年产量，矿井年产量为 z。

根据给定的条件，可以列出下列数学表达式：

$$x_1 \leqslant 50$$

$$x_2 \leqslant 20$$

$$x_2 \leqslant x_1$$

$$0.2x_1 + 0.3x_2 \leqslant 12$$

由于产量不可能为负值，故有：

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$$

安排两层煤同时开采，矿井的年产量为：

$$z = x_1 + x_2$$

此问题的目标是全矿井产量达到最大值。因此，目标可以写成

$$\max Z = x_1 + x_2$$

将以上数学表达式归纳起来则有：

目标函数 $\max Z = x_1 + x_2$

约束条件
$$\begin{cases} x_1 \leqslant 50 \\ x_2 \leqslant 20 \\ x_2 \leqslant x_1 \\ 0.2x_1 + 0.3x_2 \leqslant 12 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

〔例 1—2〕某矿务局，有Ⅰ、Ⅱ两个矿井，向三处工厂供煤。各矿井产煤量、各厂需煤量和各矿到各厂的单位运量的运费见表 1—1。要求确定一个发送煤方案，使总运输费用最低。

表 1—1

运价(元/t) 工厂 j / 矿井 i	工厂 j			供煤量 t
	1	2	3	
Ⅰ	6	4	2	10,000
Ⅱ	5	4	3	8,000
需煤量 t	6,000	7,000	5,000	

为求解该问题，可以设 x_{ij}表示 i 矿运到 j 厂的煤炭数量，设总运输费用为 Z。

那么，这个问题的目标是总运输费用最低。可以表示为：

$$\min Z = 6x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23}$$

对于生产矿井要满足供煤量要求，可表示为：

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 10000$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 8000$$

3 个工厂的要求煤量要得到满足，可表示为：

$$x_{11} + x_{21} = 6000$$
$$x_{12} + x_{22} = 7000$$
$$x_{13} + x_{23} = 5000$$

归纳起来，数学模型为：

目标函数 $\min Z = 6x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23}$

约束条件
$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 10000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 8000 \\ x_{11} + x_{21} = 6000 \\ x_{12} + x_{22} = 7000 \\ x_{13} + x_{23} = 5000 \\ x_{ij} \geqslant 0 \ (i=1,\ 2 \quad j=1,\ 2,\ 3) \end{cases}$$

〔例 1—3〕某煤矿原煤筛选后的价格和粒度组成如表 1—2 和表 1—3 所示。

试确定最优筛选品结构（各级煤产率），使吨煤售价最高。

根据所给条件，将原煤进行分解如表 1—4 所示。

表 1—2

元/t

中块	混中块	大块	混块	小块	粒煤	混煤	末煤
33.17	32.67	33.64	31.43	30.20	28.12	24.50	24.26

表 1—3

粒度级别 mm	>100	50—100	25—50	13—25	6—13	3—6	0—3
各级产率%	23.98	10.80	16.90	15.42	9.51	5.62	17.77

表 1—4

品种	中块	混中块			大块		混块				小块	粒煤	混煤				末煤	
各级产率%	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}
粒度级别 mm	25～50	13～25	25～50	50～100	50～100	>100	13～25	25～50	50～100	>100	13～25	6～13	0～6	6～13	13～25	25～50	0～6	6～13

这样，数学模型归纳如下：

目标函数 $\max Z=\frac{1}{100}(33.17x_1+32.67(x_2+x_3+x_4)+33.64(x_5+x_6)$
$+31.43(x_7+x_8+x_9+x_{10})+30.20x_{11}+28.12x_{12}$
$+24.50(x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16})+24.26(x_{17}+x_{18}))$

约束条件
$$\begin{cases}x_6+x_{10}=23.98\% \\ x_4+x_5+x_9=10.80\% \\ x_1+x_3+x_8+x_{16}=16.90\% \\ x_2+x_7+x_{11}+x_{15}=15.42\% \\ x_{12}+x_{14}+x_{18}=9.51\% \\ x_{13}+x_{17}=23.39\% \\ x_1x_2\cdots\cdots,\ x_{18}\geqslant 0\end{cases}$$

从以上 3 个例子可以看出，它们有以下共同特征：

(1) 每个问题都用一组变量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示一组方案，这组变量的值就代表一个具体方案，一般这些变量取值是非负的。

(2) 存在一定的约束条件可用一组线性等式或不等式表示。

(3) 都有一个要达到的目标，它可以用变量的线性函数（目标函数）来表示，按研究的问题不同，要求目标函数实现最大化或最小化。

满足以上 3 个条件的数学模型称为线性规划的数学模型。其一般形式为：

目标函数 $$\max(\min)\ Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n \tag{1-1}$$

约束条件
$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(=,\geqslant)\ b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(=,\geqslant)\ b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1-3) \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(=,\geqslant)\ b_m \quad (1-2) \\ x_1,\ x_2\cdots\cdots x_n\geqslant 0\end{cases}$$

由前面可知，线性规划问题有各种不同形式。目标函数有的要求 max，有的要求 min；约束条件可以是“≤”，也可以是“≥”形式的不等式，还可以是等式。这种多样性给讨论问题带来不便，因此将数学模型变换为统一的形式，即称为标准型。这里规定标准型为：

$$\max Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n \tag{1-4}$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \quad (1-5) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=b_m \quad (1-6) \\ x_1,\ x_2\cdots\cdots x_n\geqslant 0\end{cases}$$

可简写为

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \tag{1-7}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{1-8}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{1-9}$$

用向量和矩阵符号表示为

$$\max Z = cx$$
$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b$$
$$x_j \geqslant 0 \quad j=1,\ 2,\ \cdots n$$

其中 $c = (c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots c_n)$

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ P_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

向量 P_j 对应的变量为 x_j。

用矩阵表示为：

$$\max\ Z = cx$$
$$Ax = b$$
$$x \geqslant 0$$

其中 $$A=\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix} = (P_1,\ P_2,\ \cdots P_n)$$

A 为约束条件的 $m \times n$ 维系数矩阵，一般 $m < n$，m，$n > 0$

遇到各种线性规划问题的数学模型可采用以下方法变为标准型。

(1) 若求 $\min\ Z = cx$。可令 $Z' = -Z$，可得到 $\max\ Z' = -cx$。

(2) 有的约束条件若为"$\leqslant$"不等式，可在"$\leqslant$"不等式的左端加入一个非负松弛变量，把"$\leqslant$"不等式变为等式；有的约束条件为"$\geqslant$"不等式，可在"$\geqslant$"不等式左端减去一个非负剩余变量（亦可称为松弛变量），把不等式变为等式。

(3) 一般要求 $b_i \geqslant 0$，否则等式两端乘以"-1"。

(4) 若有的变量无非负限制，如为 x_k，则可令 $x_k = x'_k - x''_k$，其中 x'_k，$x''_k \geqslant 0$。

经证明，标准型与原问题同解。

下面以例 1－1 说明变标准型的方法。

$$\max\ Z = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} x_1 \leqslant 50 \\ x_2 \leqslant 20 \\ x_2 \leqslant x_1 \\ 0.2x_1 + 0.3x_2 \leqslant 12 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

目标函数已为标准型。

在 4 个不等式中分别加上一个松弛变量 x_3，x_4，x_5，x_6，使不等式变为等式。这时标准型为：

$$\max Z = x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + x_3 \qquad\qquad = 50 \\ \quad x_2 \qquad\qquad + x_4 \qquad = 20 \\ -x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 \quad = 0 \\ 0.2x_1 + 0.3x_2 \qquad\qquad + x_6 = 12 \\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

所加松弛变量表示没有被开采的资源，故没有产量，在目标函数中其系数应为零，即

$$c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6 = 0$$

二、图解法

图解法简单而直观，介绍它有助于了解线性规划的基本性质和求解的基本原理。

下面以例 1－1 说明图解法的解题方法与步骤。

(1) 先确定坐标系为平面坐标系，纵轴表示 x_2 变量，横轴为 x_1 变量，如图 1－1a 所示。有 $x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$，故满足约束条件区域在第一象限内。

(2) 在图上标出约束条件。建立 4 个不等式约束所对应的区域，先画出各自的边界直线，阴影线区域表示其解集。4 个不等式约束的解集如图 1－1b，c，d，e 所示。

(3) 确定所形成的解的空间（可行域）。上述不同的解集所围成的交集，就是全部可行解的区域，如图 1－1f 所示。

(4) 寻找最优解。分析目标函数 $z = x_1 + x_2$，它可表示以 z 为参数，－1 为斜率的一族平行线 $x_2 = -x_1 + z$。位于同一直线上的点，函数值相同，因而称为“等值线”。亦可表示为：

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 10$$

$$x_1 + x_2 = 20$$

$$x_1 + x_2 = 30$$

$$\vdots$$

这些等值线可表示于图 1－1g 中。等值线向右上方移动，当移动到 c 点时，z 的取值就获得最大。这就得到了最优解，c 点的坐标为 $(50, 6.67)^T$。说明该矿井安排上层煤产量为 50 万 t/a，下层煤产量为 6.67 万 t/a，全矿井产量达到最大值为 56.67 万 t/a。

一般的线性规划问题的最优解是唯一的，也有些线性规划问题，求解结果可能会出现以下几种情况：

(1) 无穷多最优解。若将例 1－1 中的目标函数变为求 $\max Z = x_1 + 1.5x_2$，那么平行线族与 $0.2x_1 + 0.3x_2 = 12$ 直线平行，当 Z 变大时，将与 BC 线重合（见图 1－2），线段 BC 上任一点都使 Z 取得相同的最大值，这个线性规划问题就有无穷多最优解。

(2) 无界解。例如有一线性规划问题，

$$\max Z = -4x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 9 \\ 3x_1 + x_2 \geqslant 12 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

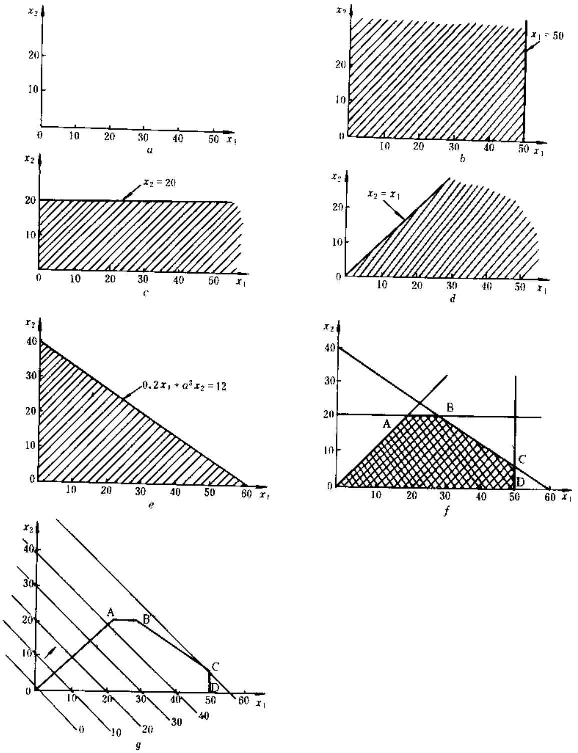

图 1—1

其图解如图 1—3 所示

从图中可以看出，可行域无界，目标函数可以增大到无穷大。称这种情况为无界解或无最优解。

(3) 无可行解。当一个线性规划问题的约束条件的交集是空集时，则无可行解。

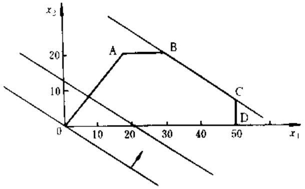

图 1—2

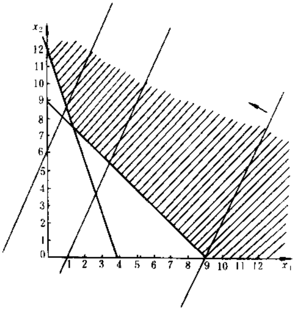

图 1—3

通过图解法可以看出，线性规划问题的所有可行解的集合构成一个可行域，一般为凸多边形。若存在最优解，则一定在可行域的某个顶点上达到。若在两个顶点上同时得到最优解，则这两个顶点的连线上任一点都是最优解。

图解法简单、直观，但只适合求解两个变量的线性规划问题，3 个变量已太复杂了，再多将无法进行。

三、线性规划问题的解和基本定理

1．线性规划问题的解

可行解　满足约束条件（1—8）、（1—9）的解 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，称为线性规划问题的可行解。

最优解　使目标函数（1—7）达到最大值的可行解称为最优解。

基　设 A 是约束方程组的 $m\times n$ 阶系数矩阵，其秩为 m。B 是矩阵 A 中的 $m\times m$ 阶非奇异子矩阵（$|B|\neq 0$），则称 B 是线性规划问题的一个基。

这就是说，矩阵 B 是由 m 个线性独立的列向量组成，不失一般性可设

$$B=\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1}, & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
$$=(P_1, P_2, \cdots, P_m)$$

称 P_j（$j=1, 2, \cdots, m$）为基向量，与基向量 P_j 相对应的变量 x_j 为基变量，否则称为非基变量。

为了进一步讨论线性规划问题的解，下面我们来研究约束方程（1—8）的求解问题。假设该方程组系数矩阵 A 的秩为 m，因 $m<n$，故它有无穷多个解，假设前 m 个变量的系数列向量是线性独立的，这时（1—5）可写成

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{bmatrix} x_m = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \vdots \\ a_{mm+1} \end{bmatrix} x_{m+1} - \cdots - \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n \qquad (1-10)$$

或

$$\sum_{j=1}^{m} P_j x_j = b - \sum_{j=m+1}^{n} P_j x_j$$

方程组（1—10）的一个基是

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

$$= (P_1, P_2, \cdots, P_m)$$

设 X_B 是对应这个基的基变量

$$X_B = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$$

现若令式（1—10）的非基变量 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，并用高斯消去法求出一个解

$$X = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m, 0, \cdots, 0)^T$$

这个解的非零分量的数目不大于方程组数目 m，称 X 为基本解。

由此可见，有一个基，就可以求出一个基本解，如图 1—1 中的点（0，0），A，B，C，D 代表基本解。

基本可行解　满足非负条件的基本解，称为基本可行解。图 1—1 中的点 0，A，B，C，D 代表基本可行解。

可见，基本可行解的非零分量数目不大于 m，并且都是非负的。

可行基　对应于基本可行解的基，称为可行基。

可见约束方程组（1—8）具有基本解的数目最多是 C_n^m 个。一般讲基本可行解的数目要小于基本解的数目，最多是相等。

以上提出的几种解的概念，它们之间的关系可用图 1—4 表明。

另外还要说明一点，基本解中的非零分量的个数小于 m 个时，此基本解是退化解，在以下讨论标准型的求解时，我们假设不出现退化。

以上我们给出了线性规划问题解的定义，它们将有助于用来分析线性规划问题的求解过程。

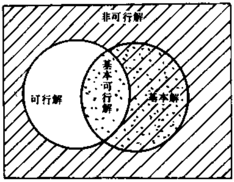

图 1—4

2. 基本概念及定理

凸集　设 K 是 n 维欧氏空间的一个点集，任意两点 $X^{(1)}\in K$，$X^{(2)}\in K$ 的连线上的一切点 $\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}\in K$，$(0\leqslant\alpha\leqslant1)$ 则称 K 为凸集。

实心圆、实心球体、实心立方体等都是凸集，从直观上讲凸集没有凹入部分，其内部没有孔洞。图 1—5 中的 a，b 是凸集，c 不是凸集。

凸组合　设 $X^{(1)}$，$X^{(2)}$，…，$X^{(k)}$ 是 n 维欧氏空间 E^n 中的 K 个点。若存在 μ_1，μ_2，…，μ_k，且 $0<\mu_i<1$，$i=1, 2, \cdots, k$，