模糊数学在水质评价中的应用

付雁鹏　高嘉瑞　编著

华中工学院出版社

模糊数学在水质评价中的应用

付雁鹏　高嘉瑞　编著

華中工學院出版社

内 容 简 介

全书结构分为两部分，第一部分主要介绍模糊数学的基本概念和计算方法；第二部分重点介绍模糊综合评判、模糊聚类分析在水质评价中的应用，突出体现应用模糊数学进行水质评价的优越性。

本书可供大中专水文地质专业师生、环保工作者、水文地质工作者、给排水设计人员使用参考。

模糊数学在水质评价中的应用

付雁鹏　高嘉瑞　编著

责任编辑　龙纯曼

*

华中工学院出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中工学院出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　　印张：3.625　　字数：68,000

1986年12月第一版　　1986年12月第一次印刷

印数：1—2,000

统一书号：13255-062　　定价：0.65元

前　言

自模糊数学在我国开始研究起，就引起了地质院校广大师生和野外地质工作者的极大兴趣．为了配合大家学习，我们编写了这本书．为了使尽量多的读者能顺利地自学，编写中我们力求做到内容通俗简明、应用具体，使读完本书的人不仅对模糊数学有个基本认识，而且能和自己的工作紧密结合．但由于我们水平有限，不知是否能达到这个目的，本书的许多不足之处和错误，还望读者多多赐教．

模糊数学虽是一门新兴的数学，但其内容十分丰富和高深，所涉及的科学领域也相当广泛．本书只介绍了“模糊综合评判”和“模糊聚类分析”两方面的内容．全书结构分两部分：第一部分主要介绍模糊数学的基本知识，这部分内容是参考了北师大汪培庄教授的《模糊集合论及其应用》及北方交通大学贺仲雄教授的《模糊数学及其应用》的内容编出的．第二部分介绍“模糊综合评判”和“模糊聚类分析”在水质污染评价中的应用．在运算过程中为了将原理表达清楚，我们仍然采用笔算的方法，在实际工作中可以采用BASIC语言或ALGOL-60语言编制程序进行电算，其效果更好．

本书全稿是经陈贻源老师审阅的，陈老师在百忙中不仅详细地审阅全稿，而且提出了宝贵的修改意见，使作者受到很大教益，在此，向陈贻源老师致谢！

本书在编写过程中始终受到林学钰教授的鼓励和支持，地院教材科颜永良、陈明远等同志对该书出版给予很多关注，

在此一并致谢！

最后要特别感谢华中工学院出版社的同志们为本书出版付出了辛勤的劳动。

付雁鹏

一九八六年二月于长春地质学院

目　录

第一章　绪言……………………………………………………(1)
第二章　预备知识…………………………………………………(4)
§2—1　普通集合………………………………………………………(4)
§2—2　集合的包含和相等……………………………………………(6)
§2—3　集合的运算……………………………………………………(8)
§2—4　向量和矩阵……………………………………………………(12)
§2—5　映射与关系……………………………………………………(18)
第三章　模糊集合…………………………………………………(22)
§3—1　模糊子集………………………………………………………(22)
§3—2　模糊子集的运算………………………………………………(24)
§3—3　模糊子集与普通集合的转化…………………………………(26)
§3—4　模糊关系………………………………………………………(27)
§3—5　模糊矩阵………………………………………………………(29)
第四章　隶属函数的确定…………………………………………(33)
§4—1　模糊统计试验法………………………………………………(33)
§4—2　二元对比排序法………………………………………………(37)
§4—3　逐级估量法……………………………………………………(45)
§4—4　隶属函数图表法………………………………………………(46)
§4—5　中值法…………………………………………………………(49)
第五章　模糊集间相似性的计算…………………………………(53)
§5—1　模糊度及其确定原则…………………………………………(53)
§5—2　两模糊集之间相似性的计算…………………………………(54)
§5—3　贴近度…………………………………………………………(58)
§5—4　用相似系数计算模糊集间的相似性…………………………(59)
第六章　模糊综合评判……………………………………………(64)

§6—1　对"环境质量综合指数法"的回顾……………………………(64)
§6—2　模糊综合评判………………………………………………(65)
§6—3　模糊综合评判的实例………………………………………(78)
第七章　模糊聚类分析……………………………………………(86)
§7—1　模糊聚类分析的步骤………………………………………(86)
§7—2　在模糊等价关系基础上聚类………………………………(88)
§7—3　在模糊相似关系基础上聚类………………………………(91)
§7—4　模糊聚类分析实例…………………………………………(97)

第一章 绪 言

模糊数学是用数学方法研究和处理具有“模糊性”现象的一种数学。这里所谓的模糊性，主要是指客观事物差异的中间过渡中的“不分明性”，这种不分明性在日常生活中俯拾皆是，例如“污染”、“老年人”、“高个”、“矮个”、“美”与“丑”等等，都是难以明确地划定界限的。对于这些难以明确划定界限，即没有明确的内涵和外延的概念，叫做模糊概念。

模糊概念和模糊事物是用“精确”数学无法描述的问题。“精确”数学建立在经典集合论的基础之上，根据集合论的要求，一个对象对于一个集合要么属于，要么不属于，两者必居其一，且仅居其一，即“非此即彼”，绝对不允许“模棱两可”。如当代许多科学上的分类标准和等级指标常常反映了经典数学这个特征。目前地下水污染评价中采用的环境质量系数法，在评价某一污染的地下水状况时，就是先求出许多个样品的环境质量系数，然后根据地下水环境质量系数把污染程度分级，如：

$E<0.5$，　污染迹象水；

$0.5<E<1$，　轻污染水；

$1<E<4$，　较重污染水；

$E>4$，　严重污染水。

这种处理问题的方法即是“非此即彼”二值逻辑形式的反映。但这样处理分级的方法是与实际有较大差异的，例如，E值为4.01，环境质量系数>4应划为严重污染水；如果E为3.999，环境质量系数<4，不论小多少也不能划为严重污染，显然这种划分存在着极限状态的不合理性。这种问题产生的原因，就是只

根据给定的临界判据（环境分级标准）判定污染程度，而没有考虑自然界中事物存在的模糊性，即中间过渡的“不分明性”造成的。

电子计算机的问世，帮助人们解决了许多重大科学难题，其计算速度与准确程度是无与类比的。但是用电脑制造机器人，并让机器人代替人去执行一些任务，如去逮捕逃犯或者充当医生给人治病，机器人却变得呆滞而不胜任。究其原因，是由于电脑不会模仿人脑的思维过程，不会象人那样去识别“亦此亦彼”的模棱两可的事物现象。然而，随着科学的发展，过去那些与数学关系不大或毫无关系的学科，如生物学、心理学、语言学以及社会科学等等，都迫切要求定量化、数字化，这就使科学工作者遇到愈来愈多的模糊概念。为了解决这些概念的定量化和数字化，人们只能改造数学本身。

怎样对数学进行改造呢？人们在认真地研究了普通集合论之后发现，普通集合论完全由其特征函数所刻画；恰恰由于其特征函数只能取 0 或 1 二值，而使数学绝对化了。因此，改变特征函数取值范围是拓广普通集合论的重要环节。于是，模糊数学引用隶属函数的概念建立了新的数学体系。隶属函数不仅象特征函数那样取 0 或 1，而且它还可以在[0,1]区间内连续取值。因此，隶属函数具有了描述事物渐变过渡的能力，模糊数学在这样的背景下诞生了。

模糊数学诞生于1965年，它的创始人是美国 California 大学的 L.A.Zadeh 教授。继 Zadeh 之后，特别是进入七十年代后期，这方面的研究迅速发展起来，至今国外已有 2000 多篇论文。

我国从七十年代开始研究模糊数学，展开迅速并取得了一些可喜的成果，如中央气象局用模糊数学进行天气预报，在国

际气象学术讨论会上受到好评。《关幼波治疗肝病计算机诊断程序》把模糊数学应用到医疗诊断上，获北京市科技成果一等奖。林业方面，采用模糊数学确定从国外移植油橄榄在我国最佳分布区获得成功等等。

在地质战线上，一些同行也写出了关于模糊数学应用于岩石分类、地貌类型划分、地下水污染评价等方面的文章。展望未来，模糊数学将愈来愈显示其旺盛的生命力。

第二章 预备知识

前面已经提到，模糊数学是由经典集合论拓广而来的，因此，学习模糊数学的基础知识就是要学习普通集合论、逻辑数学和布尔代数这些经典数学理论。下边根据本书的需要对普通集合论做概要的介绍。

§2—1 普通集合

客观事物浩如烟海、纷纭庞杂。但是我们讨论一个具体问题时，总是把议论的对象局限在某一范围内，这个范围称为**论域**，集合论中常用大写字母 U, E, X, Y 等来表示。论域是由每个被讨论的对象组成的，每个对象被称为**元素**，通常以小写的字母 a, b, c, d, e, x, y, u 等来表示。

论域按其所含元素的数目，可区分为两类。所含元素的数目是有限的论域，称为有限论域；所含元素数目是无限的论域，称为无限论域。

给定一个论域 U，把 U 中具有某种性质的确定且彼此不同的事物（或个体）做为一个整体，这个整体便称为一个**集合**。如我们讨论化学元素，元素周期表就可看成一个论域，而表中氧族元素、卤族元素、惰性气体等分别是一个集合。集合也简称为**集**，通常用 $A, B, C, N, M, \cdots$ 等大写字母表示。

设 A 是一个集合，构成集合 A 的事物则称为 A 的元素或者叫做**成分**、**点**，元素与集合的关系，常用属于或不属于来表示。若 a 是 A 的一个元素记作 $a \in A$ 或 $A \ni a$，读作 a 属于 A；若 a

不是A的元素，则记作$a \overline{\in} A$或$a \notin A$，读作a不属于A。

对于集合，有下面两种常用的表示方法：

（一）列举法

对于有限集，把一个集合的元素全部列举出来，并用花括号括起来的方法，叫列举法或枚举法。例如

$$A=\{a,b,c,d\},$$

表明集合A是由a,b,c,d四个元素组成的，即a,b,c,d属于A。

（二）描述法（也叫定义法）

对于无限集，要把元素全部列出来，一个也不遗漏，简直是办不到的。此时就要用描述法。描述法是利用详细说明元素a属于A的定义条件作出来的，即给定一个条件$p(x)$，当且仅当a使条件$p(x)$成立时，$a \in A$。例如，集合$A=\{1,3,5,7,9\}$，可定义A为小于10的奇数集合，于是A便可表为

$$A=\{x \mid x\text{为奇数且}x<10\}.$$

花括号中的x代表构成集合的元素的一般形式，竖线的右边表示构成这一集合的条件，也就是x所具备的特性。这一竖线有时也用冒号代替，如

$$A=\{x : x\text{为奇数且}x<10\}.$$

这里需要说明：

（1）用描述法表示一个集合，其方式并不是唯一的。因为对一个集合的元素往往可以用多种不同的方式来确定，例如，集合$\{1,2,3\}$的元素可定义为不大于3的自然数，也可以定义为小于4的而能整除12的自然数，因此，集合$\{1,2,3\}$可表为

$$\{a \mid a \in N, a \leqslant 3\},$$

同时还可表为

$$\{a \mid a \in N, a<4, a \mid 12\}.$$

（2）关于集合的元素，在上述举例中都是以自然数出现的，但在集合论中对作为集合的元素个体，并没有什么限制，它可以是自然数，也可以是集合，或者文字符号，例如

$$A=\{\{1,2\},4,d,\{a\}\}.$$

在这种情况下，需要注意的是把集合 $\{a\}$ 与元素 a 区别开来，例如集 $\{a\}$ 是集合 A 的元素：$\{a\}\in A$，而 a 是集 $\{a\}$ 的元素：$a\in\{a\}$，但 a 不是 A 的元素，$a\notin A$。元素与集合是不同层次的概念。

§2—2　集合的包含和相等

集合的包含和相等是集合间的两个基本关系。

（一）包含关系

属于包含关系的有子集合、空集合和幂集合。

（1）子集合

设有集合 A，B，如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集合**，简称**子集**。记作

$$A\subseteq B \quad 或 \quad B\supseteq A \text{（读作 } B \text{ 包含 } A\text{）}.$$

例如，$A=\{a,b\}$，$B=\{a,b,c,d\}$，A 中有两个元素 a,b，这两个元素都是 B 的元素，故 A 集是 B 集的子集合。此例中，B 集合的子集合有：

$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{d\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{a,d\}$，$\{b,c\}$，

$\{b,d\}$，$\{c,d\}$，$\{a,b,c\}$，$\{a,b,d\}$，$\{a,c,d\}$，$\{b,c,d\}$，

$\{a,b,c,d\}$，$\varnothing$。

其中有两个特别的子集，即 $\{a,b,c,d\}$ 与 $\varnothing$。$\{a,b,c,d\}$ 又称作**全集合**，$\varnothing$ 称作**空集合**。在集合论中又常把除全集合以外的其它子集合称作**真子集**。

（2）空集合

空集$\varnothing$是不包含任何元素的集合，如$A=\{x|x$是整数，$4<x<5\}$，$A=\{x|x^2=8$，x是整数$\}$都是空集合。

空集合是个很有用的概念，当证明两条线平行，或者证明命题$p(x)$对于一切x不真，只要证明两条线交点的集合是一个空集或证明$\{x|p(x)\}=\varnothing$即可。空集合可以做任何集合的子集。

（3）幂集合

把论域U的子集看成新的元素，U的一切子集又可构成一个集合，这是集合的集合。由U的一切子集所组成的集合，叫做U的**幂集**。记作$P(U)$。

例如，由a,b组成的论域$U=\{a,b\}$，它的子集有$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a,b\}$，$\varnothing$，由这些子集构成的U的幂集是

$$P(U)=\{\{a\},\ \{b\},\ \{a,b\},\ \varnothing\}.$$

（二）相等关系

设有集合A,B，如果A的每一个元素都是B的元素，B的每一个元素也都是A的元素，即$A\supseteq B$，同时$B\supseteq A$，则称A集合与B集合相等。记作$A=B$。

显然，所谓集合A与集合B相等，即意味着A与B具有完全相同的元素。

例1 设$A=\{x|x(x-1)=0\}$，$B=\{0,1\}$。

则$A=B$。

例2 设$A=\{1,4,2\}$，$B=\{1,2,4\}$。

则$A=B$。

第1例$A=B$是很明显的。在第2例中两个集合的元素是相同的，只是元素的排列次序改变，但次序的变化并不影响集合的相等。

§2—3 集合的运算

由于集合是某些事物的总体，不是通常的数，因此，集合之间的运算具有自己的特色。为学习模糊数学方便起见，我们只对集合论的几个基本运算简述如下：

（一）集合的并

设A，B为论域U的两个子集合，A,B的**并集**以符号$A\cup B$表示，定义为：

$$A\cup B=\{x|x\in A\text{或}x\in B\}.$$

该定义式说明，A集和B集的并集包含一切属于A或属于B的元素。例如

$$A=\{a,b,c,d\},\quad B=\{c,d,e,f\},$$

则$A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$.

应当指明，A，B组成并集时，重复的元素只能出现一次。

求集合并集的运算，也称为求和运算或加法，但集合求并的运算与数字求和的运算有着本质的区别，集合求并是范围的合并，数字求和则是数值相加。

（二）集合的交

设A，B为论域U的两个集合，A，B的**交集**以符号$A\cap B$表示，定义为：

$$A\cap B=\{x|x\in A,\ \text{且}x\in B\}.$$

从定义式中看出，交集所含的元素必定是同时属于A集与B集的元素，即是由A集与B集的共有元素构成的。例如，

$$A=\{a,b,c,d\},\quad B=\{c,d,e,f\},$$

则$A\cap B=\{c,d\}$.

如果集合A与集合B没有公共元素，则称A与B不相交，此时，$A \cap B = \varnothing$.

（三）集合的补集

补集可区分为相对补集和绝对补集。

相对补集讨论的是两个集合间的补余情况。设有集合A，B，由属于B而不属于A的所有元素组成的集合，称为**A关于B的相对补集**或B与A的**差集**。记作$B - A$，即

$$B - A = \{x \mid x \in B,\ x \overline{\in} A\}.$$

例如，$A = \{2, 5, 6\}$，$B = \{3, 4, 2\}$，

则$B - A = \{3, 4\}$，$A - B = \{5, 6\}$.

绝对补集则是子集合与全集合的相对补集。设有集合A，全集合U，A的补集（绝对补集）以符号A^c，$\overline{A}$等表示。则

$$A^c = U - A = \{x \mid x \in U,\ x \overline{\in} A\}.$$

可以用这样一个例子说明A的补集。设某班共开设语文、数学、政治、物理、化学、英语和体育七门课程，这就是论域U。如果已经复习了的功课有数学、物理、化学、英语，称为集合A；那么没有复习的功课也是一个集合，这个集合就是$U - A$，它为A集的补集。

集合的并、交、补运算有许多性质，下面列出这些性质中最主要的几条，并称它们为集合运算的基本规律。

（1） 交换律

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A.$$

（2） 结合律

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

（3） 分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

（4） 互补律

$A\cup A^c=U$；$A\cap A^c=\varnothing$。

（5） 德摩根律

$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$；$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$。

在普通集合论中除上述写出的几条运算规律外，还有一些常用的规律，但考虑到本书的情况，这些规律连同以上恒等关系的证明均不在此介绍。

（四） 文氏图

集合的并、交、补运算也可以用图解进行示意，这种图称为**文氏图**．在文氏图中全集U用一长方形区域表示，U的子集用该长方形内的圆形区域表示，图中的阴影区域表示了每个图形下边所指出的集合（见图2-1）。

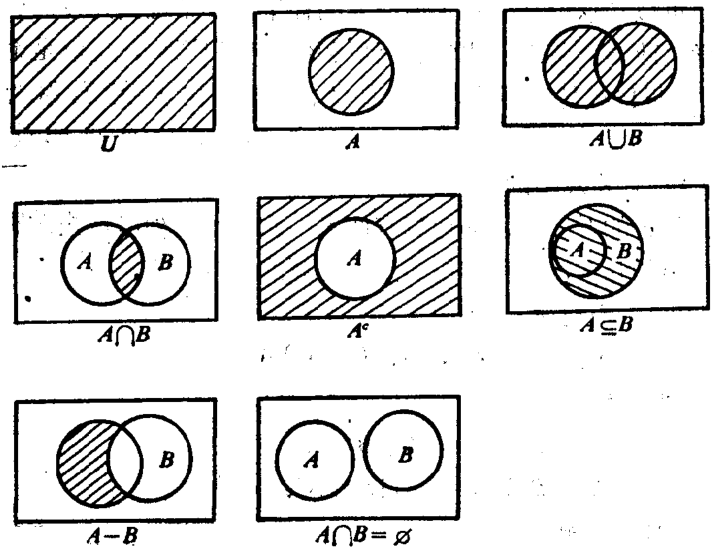

图 2-1