现代应用数学丛书

试验设计法

〔日〕增山元三郎　著

上海科学技术出版社

內容提要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本，叙述試驗設計的数学理論。全书共四章和一个附录。第1章說明 BIB 設計的优点，第2章詳細討論如何用有限射影几何来构造 BIB 設計，第3章扼要介紹因子試驗，包含正交陣列的构造，第4章討論設計的存在条件。附录簡短地叙述构造上述設計用到的 Galois 域的知識。书末还附有 BIB 設計表(附表1)和最小函数表(附表2)。另外，为了便于讀者查閱，譯者补充了本书引用到的和本书原书出版后的一些新文献。本书可供高等学校概率統計专业的师生以及試驗設計工作者、研究人員参考。

現代应用数学丛书

試驗設計法(設計的理論)

原书名　实驗計画法—配置の型の理論
原著者　〔日〕增　山　元　三　郎
原出版者　岩　波　书　店，1957
譯　者　刘　璋　温

*

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印張 3 22/32　字数 85,000
1963年3月第1版　1963年3月第1次印刷
印数 1—4,000

統一书号：13119·496
定　价：(十四) 0.64元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地減少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

书名	原作者	譯者
代数学*	弥永昌吉等	熊全淹
几何学*	矢野健太郎	孙澤瀛
复变函数	功力金二郎	刘书琴
集合·拓扑·测度*	河田敬义	賴英华
泛函分析*	吉田耕作	程其襄
广义函数*	岩村联	楊永芳
常微分方程*	福原滿洲雄	張庆芳
偏微分方程*	南云道夫	錢端壮
特殊函数*	小谷正雄等	錢端壮
差分方程*	福田武雄	穆鴻基
富里哀变换与拉普拉斯变换*	河田龙夫	錢端壮
变分法及其应用*	加藤敏夫	周怀生
李群論*	岩堀长庆	孙澤瀛
随机过程*	伊藤清	刘璋温
回轉群与对称群的应用*	山內恭彥等	張质賢
結晶統計与代数*	伏見康治	孙澤瀛
偏微分方程的应用	犬井鉄郎等	楊永芳
微分方程的近似解法	加藤敏夫等	王占瀛
数值計算法	森口繁一等	闇昌龄
量子力学中的数学方法*	朝永振一郎	周民强
工程力学系統*	近藤一夫等	刘亦珩
非綫性振动論*	古屋茂	吕紹明
力学系与映射理論*	岩田义一	孙澤瀛
平面彈性論*	森口繁一	刘亦珩
有限变位彈性論* 变形几何学	山本善之 近藤一夫	刘亦珩
塑性論*	鷲津文一郎	刘亦珩
粘性流体理論*	谷一郎	刘亦珩
可压縮流体理論*	河村龙馬	刘亦珩
网絡理論	喜安善市等	賈弃瞀
自动控制理論*	喜安善市等	翟立林
回路拓扑学	近藤一夫	張鳴鏞
信息論*	喜安善市等	李文清
推断統計理論	北川敏男	李賢平
統計分析*	森口繁一	刘璋温
試驗設計法	增山元三郎	刘璋温
群体遺傳学的数学理論*	木村資生	刘祖洞
博奕論	宫澤光一	張鹹春
綫性規划	森口繁一	刘源張
經济理論中的数学方法	安井琢磨等	談祥柏
随机过程的应用*	河田龙夫	刘璋温
計算技术	高桥秀俊	姚晋
穿孔卡計算机	森口繁一	刘源張

注：有*者已在1962年出版。

譯 者 序

試驗設計法是数理統計学中的一个重要分支，它是在近四十年来，由于农业和工业的需要，以及由于它本身內在的数学問題的解决而迅速发展起来的一門学科。

試驗設計首先由英国統計学家 R. A Fisher 在他的經典著作 The Design of Experiments (1926) 中引进。Fisher 在該书中提出了两个設計，一个叫做随机区組(完全区組)，另一个叫做拉丁方，它們分別是現在称为多种方式分組設計和部分实施法的特殊情形。1936 年，Fisher 的学生 F. Yates 把完全区組設計推广为不完全区組設計。随后，有不少数学家，特别是印度学派，对构造不完全区組和拉丁方的数学理論作出了有价值的貢献。本书主要介紹不完全区組中的平衡不完全区組設計。

不完全区組設計包含着很多数学問題，因而在它一出現之后就引起了广大統計学家和部分数学家的注意。1959 年，通过平衡不完全区組設計的研究，印度学者 R. C. Bose 和 S. S. Shrikhande 以及美国学者 E. T. Parker 等人，打破了将近二百年来一直被认为是眞实的 Euler 关于不存在 $4t+2$ 阶正交拉丁方的猜想。在他們已得結果的推动下，正交拉丁方的研究比从前更加活跃了。

当然，人們对研究試驗設計感到兴趣，不只是因为它包含許多数学問題。試驗設計，从其名称可以看出，是一門应用性較强的学科，它的应用范圍几乎已扩及到自然科学和社会科学的大部分研究領域。

近年来，国外用各种文字出版的試驗設計法的书已为数不少，

但在我国，这样一本书的出版还可算是第一次❶。譯者希望，本书的出版能使更多的讀者了解数学在試驗設計法中所起的作用，并引起更大的兴趣。

在翻譯过程中，为了使原书的意义更清楚，作了一些必要的注解，并补充了若干书中引到的以及原书出版以后发表的文献，希望能对讀者有所助益。但因限于水平，挂一漏万，錯誤在所难免，請給予批評指正。

刘 璋 温

1962年10月，北京

❶ K. A. 勃郎里著（陈蔭枋譯），工业試驗統計（科学出版社，1959）一书只讲实际应用，而不讲設計的数学理論。

序

本书所介紹的是試驗設計法中用到的各种設計的理論，而不是利用这些設計来做試驗，然后讲述对試驗結果进行統計分析的方法❶。設計的理論迄今仍未充分齐整，大致已属完整的，可以举出多种方式分組設計中的固定模型的情形。这可在A. Wald的讲义[10]或者H. B. Mann的书[6]中找到❷。这里我們愿意把理論尙未完整的設計提出来，着重介紹用什么方法已解决到什么地步。但是由于篇幅的限制，对于看来希望不大的方法，不能不割爱了。

在第1章中，我們提出了最不完整而且不具有正交性的設計，亦即不完全区組設計，并且給出了它的定义和存在的問題。在第2章中，我們主要地討論了把满足給定試驗条件的解变为几何問題来求，这相当于解存在的充分条件。在第3章中，我們介紹了正交設計的几种构造方法，而其中水平数不相同的正交陣列的一般理論和强度不一样的正交陣列的一般理論，仍未解决❸。在最后一章，即第4章中，我們介紹了平衡不完全区組設計存在的必要条件，但这与上述的充分条件尙有相当大的距离。根据我們在§2中的研究結果，如果不按照参数的数論性质把設計更加細分，并个别地求其存在条件，那末这个距离看来不能縮小。

附表1列举了，当把試驗分为b个区組进行时，在$b \leqslant 100$的

---

❶ 見本丛书森口繁一：統計分析，刘璋温譯，1962.

❷ 著者已把这两本书的概要介紹于中山伊知郎編：統計学辞典，东洋經済出版社，东京，1951，增补版，1957.

❸ 見增山元三郎：穿孔カードによる実験の計画とその解析，日本科学技术連盟，东京，1957，§23.

范圍内迄今已知的平衡不完全区組設計。把依 R. C. Bose 的意义不是同构而是广义同构的設計区别开来，这在实用上并沒有很大的意义，所以对于同一参数的設計，表中仅列出了表現簡单的那一个。同样，由单純的重复来增加区組个数而产生的設計，也不列出。但是这个表比現有的任何一个表❶❷都为丰富。

从介紹設計的理論这个意义来說，缺少部分平衡不完全区組(PBIB: partially balanced incomplete block)的理論，是不妥当的。但是，这种設計計算麻煩而且不太实用，而稍有实用的情形已被印成一本书❸❹，其中包含了表和理論。

起初，为使讀者不一定要参考原論文或者其他参考书也能看懂，著者在編写时把有关的証明都詳細写出，以致篇幅过大。后来作了修改，假定讀者具有相当于岩波全书《实驗計画法》(即[8])程度的知識，尽量把詳細的証明和其他书中已有的証明删去。虽然如此，著者仍然相信，修改后的本书还是能实現著者最初的目的，

---

❶ 例如北川敏男・三留三千男：实驗計画要因配置表，培風館，东京，1953.

❷ Fisher-Yates [28] 和 W. G. Cochran and G. M. Cox: Experimental Designs, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1957, 都有詳尽的表。但是，到此为止，所有这些表都是对 $r \leqslant 10$ 造出的，而本书附表 1 中却有几个 $r > 10$. 最近 Rao [48] 对 $11 \leqslant r \leqslant 15$ 的 r 做了研究。——譯者注

❸ R. C. Bose, W. H. Clatworthy and S. S. Shrikhande: Tables of Partially Balanced Designs with Two Associate Classes, *Univ. North Carolina, Mimeo. Ser.*, 77, 1953.

❹ 脚注❸的表在国内可能不容易找到。关于 PBIB 設計，可参看下列文献：

1) R. C. Bose and W. S. Connor: Combinatorial properties of group divisible incomplete block designs, *Ann. Math. Stat.*, **23** (1952), 367～383.

2) R. C. Bose and K. R. Nair: Partially balanced incomplete block designs, *Sankhyā*, **4** (1939), 337～372.

3) R. C. Bose and T. Shimamoto: Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes, *J. Amer. Stat. Assn.*, **47** (1952), 151～184.

其中 2) 是首創著作。——譯者注

即介紹'問題的所在,解決問題的方法以及其界限'。

試驗設計的模型,除了本书列举的以外,还可无穷地創造出来。因此,設計的理論尙有推广的余地。迄今已得結果的介紹,若能成为新的推广的出发点,著者将感到无任荣幸。

目　录

出版說明
譯者序
序
第 1 章　不完全区組設計 …………………………1
　§1　不完全区組設計 …………………………1
　§2　构造模型与設計的优点 …………………………6
　§3　組合方法 …………………………17
　§4　平面有限射影几何 $PG[2, t]$ …………………………18
　§5　有限射影几何 $PG[s, t]$ …………………………21
第 2 章　不完全区組設計的构造 …………………………24
　§6　点代数 …………………………24
　§7　平面上的构形 …………………………30
　§8　Galois 域上的射影几何 …………………………39
　§9　Galois 域上的仿射几何 …………………………45
　§10　循环空間 …………………………47
　§11　差集合方法 …………………………50
　§12　BIB的变形法 …………………………57
第 3 章　多因子試驗 …………………………59
　§13　多因子試驗 …………………………59
　§14　正交陣列表 …………………………66
第 4 章　設計的存在条件 …………………………78
　§15　SBIB 的存在条件 …………………………78
　§16　ARBIB 的存在条件 …………………………88
附表 1 …………………………91
附　录　关于阶 t 的 Galois 域 $GF[t]$ …………………………96
　附表 2 …………………………103
参考文献 …………………………104
譯者补充文献 …………………………105

第1章　不完全区組設計

§1 不完全区組設計

設对 v 个品种 V_i $(i=1, 2, \cdots, v)$ 的每亩收成，用 b 块田 B_j $(j=1, 2, \cdots, b)$ 做試驗进行比較。我們規定，当品种 V_i 被包含于区組(田) B_j 时，$n_{ij}=1$，其他情形时，$n_{ij}=0$. 矩陣 $\boldsymbol{A}=(n_{ij})$ 叫做**結合矩陣**❶。这个矩陣的第 i 行元素的和 r_i 表示品种 V_i 被包含于多少个区組，叫做 V_i 的**实施数**❷；第 j 列元素的和 k_j 表示区組 B_j 包含多少个品种，叫做区組 B_j 的**大小**。

$$r_1+r_2+\cdots+r_v=k_1+k_2+\cdots+k_b\overset{\mathrm{d}}{=}N \tag{1.1}$$

是**試驗总数**。式中等号上的 d 表示定义式。如果 B_j 的大小不依賴于 j 而等于 v，那末这种設計叫做**完全区組設計**(R. A. Fisher, 1926)❸。若把一块田的大小取得过大，则土地肥沃度的不匀性产生影响，以致当把品种位置的排列随机化时，外表上的誤差有趋大的傾向。为了避免这一点，如果取每一区組大小都小于 v，那末这种設計叫做**不完全区組設計**(F. Yates, 1936)❹。

$$\lambda_{ij}\overset{\mathrm{d}}{=}\sum_{l=1}^{b} n_{il}n_{jl}\quad (i\neq j) \tag{1.2}$$

是两个不同品种 V_i 与 V_j 被包含于同一区組的次数，叫做两者**相遇数**。特別，当 $i=j$ 时，定义

$$\lambda_{ii}\overset{\mathrm{d}}{=}r_i. \tag{1.3}$$

---

❶ 也称关联矩陣(incidence matrix).——譯者注

❷ 也称重复数(number of replication).——譯者注

❸ Fisher[26].——譯者注

❹ Yates[65].——譯者注

在不完全区組設計中，特别若实施数，区組大小以及相遇数都不依賴于足碼而为一定，卽分別等于 r, k, λ，則叫做**平衡不完全区組**(**BIB**: balanced incomplete block)。又若

$$v=b, \tag{1.4}$$

則叫做**对称平衡不完全区組** (**SBIB**: symmetrical balanced incomplete block)。在 BIB 中，試驗总数是

$$N=vr=bk. \tag{1.5}$$

考虑特定一个品种，譬如 V_1 的比較对手，允許重复，就总共有 M 品种，

$$M\overset{\mathrm{d}}{=}\lambda(v-1)=r(k-1)\ ❶. \tag{1.6}$$

(1.5) 和 (1.6) 是 BIB 存在的必要条件，但不是充分条件❷。如附表1中用十字架所示那样，有些 v, k, b 的組合虽然滿足这两个条件，但 BIB 却不存在。v, k, b, r 和 λ 叫做 BIB 的**第一类参数**。

与 V 对偶地考虑 B. 一般，令 μ_{gh} 表示不同区組 B_g 和 B_h 所包含的公共品种的个数，这叫做两区組的**公有数**，

$$\mu_{gh}\overset{\mathrm{d}}{=}\sum_{i=1}^{v} n_{ig}n_{ih}. \tag{1.7}$$

特別，当 $g=h$ 时，定义

$$\mu_{gg}\overset{\mathrm{d}}{=}k_g. \tag{1.8}$$

在 BIB 中，固定一个区組，譬如 B_1，找出与 B_1 公有数为 0 的

---

❶ 关系式(1.6)是这样得到的：一方面，特定一个品种 V_1 出現 r 次，每次同它直接比較的品种有 $(k-1)$ 个，所以总共有 $r(k-1)$ 个；另一方面，V_1 以外的 $(v-1)$ 个品种分別同 V_1 直接比較 λ 次，所以总共有 $\lambda(v-1)$ 个。$r(k-1)$ 与 $\lambda(v-1)$ 应該相等。——譯者注

❷ 对于 $k=3$ 以及 $\lambda=1$ 或者 2，条件是充分的，見 Bose[15]．最近 Hanani[33] 証明了：对 $k=3, 4$ (和所有的 λ) 以及 $k=5$, $\lambda=1, 4, 20$，条件也是充分的，但有可能的例外情形：$k=5$, $\lambda=1$, $v=141$.——譯者注

区組，为 1 的区組，等等，再就其頻数分布求方差，这决不为負。由此推出 **R. A. Fisher 不等式**❶

$$b \geqslant v. \tag{1.9}$$

在 BIB 中，特别当区組个数 b 为 r 的倍数，即

$$b \overset{\mathrm{d}}{=\!=} nr \tag{1.10}$$

的情形，如果能适当地把区組全体分为各有 n 个区組的 r 組，使得每一品种在每一組中只出現一次，那末这种設計叫做**可分解平衡不完全区組**（**RBIB**: resolvable balanced incomplete block）（R. C. Bose, 1942）❷。参看 §10 的例 1。在 RBIB 中，从（1.5）推出 $v=nk$. RBIB 的統計分析跟 BIB 相同，但也可当作多因子試驗的特殊情形来分析。比較这两种情形，便可以知道，为了除掉土地肥沃度的不匀性而縮小区組大小是否有效。在 RBIB 中，令 $B_{\alpha\beta}$ 表示第 α 組的第 β 个区組。固定 B_{01}，令 $l_{\alpha\beta}$ 表示 $B_{\alpha\beta}(\alpha\neq 0)$ 与 B_{01} 的公有数。对 $l_{\alpha\beta}$ 采用与（1.7）～（1.9）相同的方法，便可推出 **R. C. Bose 不等式**❸

$$b \geqslant v+r-1. \tag{1.11}$$

特别当等号成立时，亦即 $l_{\alpha\beta}$ 的方差为 0 的情形，

$$b = v+r-1. \tag{1.12}$$

这种情形叫做**仿射可分解平衡不完全区組**（**ARBIB**: affine resolvable balanced incomplete block）（R. C. Bose, 1942）。在 ARBIB 中，B_{01} 与 $B_{\alpha\beta}(\alpha\neq 0)$ 的公有数为一定，并且

---

❶ Fisher 的原証明，見 Fisher[27] 或者 H. B. Mann [6]，128～129. 另一个証明，見 Bose [18].——譯者注

❷ Bose [16].——譯者注

❸ 由可分解性推出 $v=nk$，但逆不一定成立。Roy [49]，Mikhail [40] 和 Murty [41] 不假定可分解性而在較弱的假定 $v=nk$ 下也分别証明了这个不等式。——譯者注

$$k^2/v=k/n\overset{\mathrm{d}}{=}c \tag{1.13}$$

也为一定且是整数。这时

$$r=(cn^2-1)/(n-1), \tag{1.14}$$

且在

$$\lambda=(cn-1)/(n-1)=c+(c-1)/(n-1)\overset{\mathrm{d}}{=}c+t \tag{1.15}$$

中 t 是0或者正整数。利用 t 和 n 为輔助参数，就在 ARBIB 中，

$$\left.\begin{aligned}&v=n^2[1+(n-1)t],\ k=n[1+(n-1)t],\\&b=n[1+n(1+nt)],\\&r=1+n(1+nt),\quad \lambda=nt+1,\\&E=n(nt+1)/[1+n(1+nt)],\end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

此处 E 是下节叙述的效率因子。特別，令

$$t\overset{\mathrm{d}}{=}(n^N-1)/(n-1),\quad n\overset{\mathrm{d}}{=}p^s, \tag{1.17}$$

此处 p 是素数，s 是正整数，則这种情形与由§9中的仿射几何 $EG[N+2,p^s]$所构造的設計一致。从(1.16)显然看出，在ARBIB中

$$\lambda+k=r. \tag{1.18}$$

对一个 BIB，(i)更换品种号碼，或者(ii)更换区組号碼后，仍是一个 BIB．依 R. C. Bose 意义，称如此得到的 BIB 与原来的 BIB **同构**。品种在区組内的順序虽不被指定，但对 SBIB 的情形，利用 Dénes König (1914) 的**分綫色定理**❶，給予 v 个白球(品种)和 b 个黑球(区組)，用 k 种色綫联系它們表示結合关系，就可以作出 k 行 b 列的品种排列，使得一列表示一区組内的品种，并且每一品种在每一行只出現一次。亦即把被同一色綫联系的球放在同一行。参看例1的图1.1。这种排列是**不完全拉丁方** (F. Yates, 1936) ❷ 的

---

❶ Dénes König: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen (Akad. Verlag, Berlin, 1936) (Chelsea 版, 1950).

❷ Yates [66].——譯者注

特殊情形，而不完全拉丁方是从边长为 v 的拉丁方 (§ 14) 中留下适当的 k 行并去掉其余的行后得到的，这也叫做 **Youden 方** (W. J. Youden, 1937) ❶。現在所知道的 Youden 方，都是由一行的循环置换得到其他行的，但在 § 14 中叙述的拉丁方則不完全如此。在拉丁方中，有些通过行与行，列与列以及字母与字母的交换也不能从一个变换到另一个。但是，其中有些通过証明分綫色定理时用到的綫色的交换，也可以从一个变换到另一个。把依 Bose 意义虽不同构但是如此广义同构的 BIB 区别开来，不管数学上的意义怎么样，在实用上并沒有很大价值。在这个意义下，即使由循环置换得不到的 BIB 存在，但当令第一类参数相等，并由循环置换可以得到与此广义同构的 BIB，那末尽量研究由循环置换得到的解，就也充分地满足实用上的需要。但其实也存在着 § 15 将叙述到的那种例子。必須留意，由循环置换得到的解，可用穿孔卡机器或者电子計算机按辞典方式求出。附表 1 列出了 $b \leqslant 100$，$k \leqslant 30$ 的范圍内的 BIB.

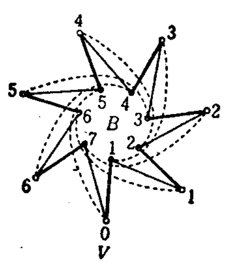

图 1.1

表 1.1

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
E	0	1	2	3	4	5	6
P	1	2	3	4	5	6	0
P^3	3	4	5	6	0	1	2

例 1 $v=b=7$, $k=r=3$, $\lambda=1$ 的 SBIB. 先在第一个区組中給予品种号碼，然后作循环置换便得到。例如 (0, 1, 3), (1, 2, 4), …. 第一个区組叫做**初始区組**。关于循环的几何意义，可参看图 8.1。

表中的 P 表示从第一行移到第二行的字母的置换，E 表示恒等置换，

❶ Youden [67].——譯者注

$P^7=E$. 这个初始区組包含的数字有这样的特性:以 $v=7$ 为模考虑所有可能的差,则除 0 以外,从 1 到 $v-1$ 各出現 $\lambda=1$ 次。关于这个差,可参看 § 11。

§ 2 构造模型与設計的优点❶

把区組 B_j 内的品种 V_i 的收成看做随机变数 Y_{ij} 的实現值,并設它的构造模型为

$$Y_{ij}=\alpha_i+\beta_j+Z_{ij},\quad \left.\begin{array}{l} i=1,\ 2,\ \cdots,\ v, \\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ b. \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

此处 α_i 表示因子 V_i 的效应,β_j 表示因子 B_j 的效应。这个綫性模型,如果依品种产生的收成差异以及依区組产生的收成差异太小,那末可以认为它很好地反映了实际情况。試驗的目的是,去掉試驗場所的影响 β_j,以便檢驗未知参数 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_v$ 之間有否差异,如果有差异,则去估計这个差异。一般的綫性构造模型由

$$Y_i=\beta_1 g_{1i}+\beta_2 g_{2i}+\cdots+\beta_p g_{pi}+Z_i,$$
$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{2.2}$$

給出,此处 $\beta_\alpha(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$ 是未知参数,$g_{\alpha i}$ 是由試驗設計或者輔助測定而定的已知常数。我們把 Y_i, $g_{\alpha i}$ 和 Z_i 分别看做 N 維 Euclid 空間的矢量 $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{g}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 的第 i 个正交分量,并記

$$\boldsymbol{Y}=\beta_1\boldsymbol{g}_1+\beta_2\boldsymbol{g}_2+\cdots+\beta_p\boldsymbol{g}_p+\boldsymbol{Z}. \tag{2.3}$$

称 $\boldsymbol{g}_\alpha$ 为**承戴参数 β_α 的矢量**。在 (2.1) 中把足碼 ij 看做二位数,按其大小順序排列,重新給予自然編碼,便得到形状 (2.2)。这时,若按足碼 i 的大小順序把 Y_i 排成 v 行 b 列,则承戴 α_r 的矢量的正交分量中只有第 r 行为 1,其余全为 0;承戴 β_c 的矢量的正交分量中只有第 c 列为 1,其余全为 0. 在下面假設随机变数 Z_1, $Z_2,\cdots$, Z_N 具有均值 0 和方差 σ^2,并且独立地分布,若无特别声明

❶ 本节包含一些新内容,討論非正交性的 BIB 設計的优点,是原著者在編写本书时得到的。——譯者注

时，并不假設它們遵循正态分布。

在很多情形中，通常按下列形式进行：

$$\alpha_2-\alpha_1,\quad (\alpha_1+\alpha_2)/2-\alpha_3,\quad (\alpha_1+\alpha_2)/2-(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)/3,$$

所以一般設

$$\theta \stackrel{\mathrm{d}}{=} l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_p\beta_p,\quad l_1+l_2+\cdots+l_p=0, \tag{2.4}$$

并称 θ 为参数 β_α 間的**对比**。当用观察值的一次式

$$t=c_1Y_1+c_2Y_2+\cdots+c_NY_N=\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{Y} \tag{2.5}$$

来估計 θ 时，若其数学期望

$$E\{t\}=m_t=\theta, \tag{2.6}$$

則称 t 为 θ 的**无偏估計量**。若 t 的方差

$$E\{(t-m_t)^2\}=\sigma_t^2 \tag{2.7}$$

为最小，則称 t 为 θ 的**有效估計量**。无偏性与有效性兼备的估計量，叫做**最优估計量**❶。从无偏性的条件推出

$$\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{g}_\alpha=l_\alpha\quad(\alpha=1,2,\cdots,p). \tag{2.8}$$

若这样的 $\mathbf{c}$ 存在，則称 θ 为**可估的**。設

$$w_{\alpha\beta} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \boldsymbol{g}_\alpha\cdot\boldsymbol{g}_\beta, \tag{2.9}$$

令 L_β 为联立方程

$$\sum_{\beta=1}^{p} w_{\alpha\beta}L_\beta=l_\alpha \tag{2.10}$$

的任意一組解，并設

$$\mathbf{c}_p \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sum_{\beta=1}^{p} L_\beta\boldsymbol{g}_\beta,\quad \mathbf{c} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mathbf{c}_p+\mathbf{c}_e,\quad \mathbf{c}_p\cdot\mathbf{c}_e=0, \tag{2.11}$$

則 $t_0=\mathbf{c}_p\cdot\boldsymbol{Y}$ 是最优估計量。这可从下述看出：

$$\mathbf{c}_p\cdot\boldsymbol{g}_\alpha=\sum_{\beta=1}^{p} L_\beta\boldsymbol{g}_\beta\cdot\boldsymbol{g}_\alpha=l_\alpha, \tag{2.12}$$

---

❶ 欲进一步深入，可参看 D. A. S. Fraser: Nonparametric Methods in Statistics (J. Wiley, New York, 1957).