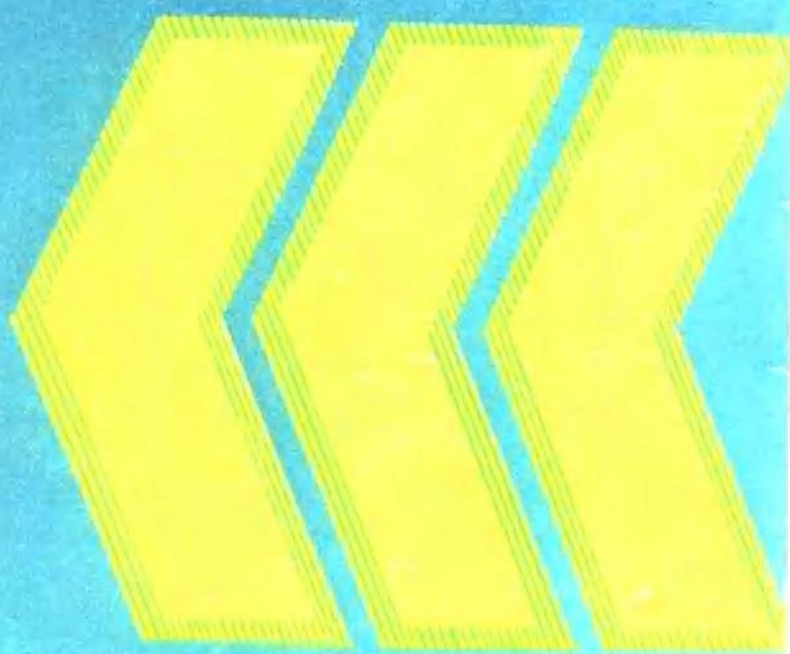


高等学校教材

# 工程数学 复变函数

(第三版)

西安交通大学高等数学教研室 编



高等教育出版社

本书保持了第二版的主要优点,作者按照 87 年国家教委审订的《复变函数课程教学基本要求》作了修改,使内容的叙述更加通俗易懂,便于教学。书中附有 \* 号部分,可供各专业选用。

本书内容是复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、保角映射等,可供高等工科院校各专业的师生作为教材使用。

第三版责任编辑 丁鹤龄

高等学校教材

工程数学

**复变函数**

(第三版)

西安交通大学高等数学教研室 编

\*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

\*

开本  $850 \times 1168 \frac{1}{32}$  印张 7.375 字数 170 000

1990年4月第1版 1990年4月第3版 1990年4月第1次印刷

印数 0001— 60 170

ISBN 7-04-002847-6/O·906

定价 1.95 元

## 第三版前言

《复变函数》自从 81 年 4 月再版以来,不少学校采用该书作为教材.从各方面反馈的信息来看,认为该教材对工科本科各专业是比较适用的.同时对该教材也提出了一些改进意见.

在这一版中,我们作了如下的一些更动和修改:首先,根据国家教委 1987 年批准印发的《复变函数课程教学基本要求》,调整了打“\*\*”的内容.我们把原来打“\*\*”的“留数在定积分计算上的应用”一节取消了双星号;把“平面场的复势”一节改为打“\*”.对《复变函数课程教学基本要求》中不列的项目以及相应的习题,在本版中除了复球面和收敛半径的求法以外,一律打“\*”,供各有关专业选用.另外,根据基本要求,增加了  $(1+z)^n$  的麦克劳林展开式.其次,为了使有关的教学内容衔接得更加紧密,重点更加突出,我们理顺了个别内容的先后次序,将第二章中的“解析函数和调和函数的关系”一节移到了第三章的最后,作为第六节.这样,就避免了在前面引用到后面才讲的关于“解析函数的导数仍为解析函数”这一结论的弊端.第三,根据使用过该教材的同志的意见,我们对分式线性映射的保“对称性”这一重要结论给出了证明;对一些写得不够清楚和不够恰当的地方作了修改;还对全书的习题和答案再次进行了审核,改正了个别错误,并略有补充.最后,修改和重绘了部分插图;并对一些“名词”和“术语”进行了统一.

我们热忱恳望使用和关心该教材的同志,对本书提出更多的宝贵意见,使它的质量能够不断地得到提高.在这里,我们谨向对

本书提过意见的同志表示衷心的感谢。

参加这次修订工作的是陆庆乐与王锦森两同志。

1969年7月

## 第一版前言

本书是根据1977年在北京召开的工科教材会议精神,按照同年12月在西安召开的全国高等学校工科数学教材编写会议上所通过的编写大纲编写的,它是工科学校《工程数学》教材之一,可供电类各专业使用,也可供其他专业选用。对工程技术人员可以作为参考书。

在编写过程中,我们主要参照了1966年1月高等教育出版社出版的由我室编写的《复变函数》一书。在保持原书主要优点的基础上,适当增加了一些内容,努力贯彻理论联系实际的原则,文字上力求通俗易懂,便于自学。同时,配备了比较丰富的习题,并于书后附有答案。有\*号的部分,可以根据各专业的需要来选用。

本书由浙江大学主审,主审人为该校周茂清教授,参加审稿的单位有北京航空学院、河北工学院、吉林工业大学、山东工学院、湖南大学、天津大学、西安冶金建筑学院、上海机械学院、上海交通大学、南京航空学院、南京工学院、重庆大学。对于他们所提出的宝贵意见,我们表示衷心的感谢。

由于我们学识水平浅薄,教学经验不足,错误和不妥之处在所难免,诚恳地欢迎广大的教师和读者提出批评意见。

参加本书编写工作的有陆庆乐、唐象礼、王绵森三位同志。

西安交通大学高等数学教研室

1978.9.

• 3 •

## 第二版前言

这一版,我们是按照1980年6月在北京举行的高等学校工科数学教材编审委员会扩大会议审订的工程数学教学大纲(草案)修订的。超过大纲的内容都打了“\*”号,供需要的专业选用。其中打“\*\*”的是大纲中原已打了“\*”的内容。

根据使用本书的教师所提出的意见,我们在这一版中增添了“复球面”、“函数在无穷远点的性态”及“函数在无穷远点的留数”等内容。“初等函数”、“泰勒级数”、“罗伦级数”各节,出于教学方法上的考虑,已予重写。例题与习题比第一版略有增加。为了便于挑选,按内容的先后,调整了习题的次序。对书中一些不妥之处和错误,作了改正。

许多用本书的教师和读者诚恳地给我们提出本书不足之处以及印刷上的错误,我们在此表示感谢。希望今后再有发现时,能及时告诉我们,以便有机会时改正。

参加这次修订工作的有陆庆乐、唐象礼两同志。

1981年4月

# 目 录

引言 .....	1
<b>第一章 复数与复变函数</b> .....	<b>2</b>
§ 1 复数及其代数运算 .....	2
1. 复数的概念 .....	2
2. 复数的代数运算 .....	2
§ 2 复数的几何表示 .....	5
1. 复平面 .....	5
2. 复球面 .....	9
§ 3 复数的乘幂与方根 .....	11
1. 乘积与商 .....	11
2. 幂与根 .....	13
§ 4 区域 .....	16
1. 区域的概念 .....	16
2. 单连域与多连域 .....	17
§ 5 复变函数 .....	19
1. 复变函数的定义 .....	19
2. 映射的概念 .....	20
§ 6 复变函数的极限和连续性 .....	23
1. 函数的极限 .....	23
2. 函数的连续性 .....	26
第一章习题 .....	27
<b>第二章 解析函数</b> .....	<b>31</b>
§ 1 解析函数的概念 .....	31
1. 复变函数的导数与微分 .....	31
2. 解析函数的概念 .....	34
§ 2 函数解析的充要条件 .....	36
§ 3 初等函数 .....	42
1. 指数函数 .....	42
2. 对数函数 .....	44

3. 乘幂 $a^b$ 与幂函数	45
4. 三角函数和双曲函数	47
5. 反三角函数与反双曲函数	49
* § 4 平面场的复势	50
1. 用复变函数表示平面向量场	50
2. 平面流速场的复势	52
3. 静电场的复势	58
第二章习题	60
<b>第三章 复变函数的积分</b>	<b>64</b>
§ 1 复变函数积分的概念	64
1. 积分的定义	64
2. 积分存在的条件及其算法	65
3. 积分的性质	67
§ 2 柯西-古萨 (Cauchy-Goursat) 基本定理	69
§ 3 基本定理的推广——复合闭路定理	73
§ 4 柯西积分公式	76
§ 5 解析函数的高阶导数	78
§ 6 解析函数与调和函数的关系	82
第三章习题	85
<b>第四章 级数</b>	<b>90</b>
§ 1 复数项级数	90
1. 复数项的极限	90
2. 级数概念	91
§ 2 幂级数	93
1. 幂级数概念	93
2. 收敛圆与收敛半径	94
* 3. 收敛半径的求法	96
4. 幂级数的运算和性质	98
§ 3 泰勒级数	100
§ 4 罗伦级数	107
第四章习题	118
<b>第五章 留数</b>	<b>121</b>
§ 1 孤立奇点	121



1. 可去奇点	122
2. 极点	122
3. 本性奇点	123
4. 函数的零点与极点的关系	124
*5. 函数在无穷远点的性态	126
§ 2 留数	129
1. 留数的定义及留数定理	129
2. 留数的计算规则	131
*3. 在无穷远点的留数	136
§ 3 留数在定积分计算上的应用	139
1. 形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ 的积分	139
2. 形如 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$ 的积分	141
3. 形如 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{aix}dx (a>0)$ 的积分	143
* § 4 对数留数与辐角原理	147
1. 对数留数	147
2. 辐角原理	149
3. 路西(Rouché)定理	151
第五章习题	153
<b>第六章 保角映射</b>	<b>156</b>
§ 1 保角映射的概念	156
1. 解析函数的导数的几何意义	157
2. 保角映射的概念	160
§ 2 分式线性映射	160
§ 3 唯一决定分式线性映射的条件	166
§ 4 几个初等函数所构成的映射	172
1. 幂函数 $w = z^n (n$ 是不小于 2 的自然数)	172
2. 指数函数 $w = e^z$	177
*3. 儒可夫斯基函数	181
* § 5 关于保角映射的几个一般性定理	182
* § 6 许瓦尔兹-克力斯托夫 (Schwarz-Christoffel) 映射	184
* § 7 拉普拉斯方程的边值问题	195
第六章习题	200

附录 I 参考书目 .....	204
附录 II 区域的变换表 .....	205
习题答案 .....	216

## 引 言

在我们已经学过的《高等数学》课程中，研究的主要对象是实变函数。理论的探讨和生产实践的发展，又提出了对复变数的研究，而研究复变数之间的相互依赖关系，就是复变函数这门课程的主要任务。

复变函数中的许多概念、理论和方法是实变函数在复数领域内的推广和发展，因而它们之间有许多相似之处。但是，复变函数又有与实变函数不同之点。我们在学习中，要勤于思考，善于比较，既要注意共同点，更要弄清不同点。这样，才能抓住本质，融会贯通。

复变函数的理论和方法在数学、自然科学和工程技术中有着广泛的应用，是解决诸如流体力学、电磁学、热学、弹性理论中的平面问题的有力工具。而自然科学和生产技术的发展又极大地推动了复变函数的发展，丰富了它的内容。我们在学习中，要正确理解和掌握复变函数中的数学概念和方法，逐步培养利用这些概念和方法解决实际问题的能力。

# 第一章 复数与复变函数

## § 1 复数及其代数运算

1. 复数的概念 在学习初等代数时, 已经知道在实数范围内, 方程

$$x^2 = -1$$

是无解的. 因为没有有一个实数的平方等于 $-1$ . 由于解方程的需要, 人们引进一个新数  $i$ , 称为虚单位, 并规定

$$i^2 = -1$$

从而  $i$  是方程  $x^2 = -1$  的一个根.

对于任意二实数  $x, y$ , 我们称  $z = x + iy$  或  $z = x + yi$  为复数, 其中  $x, y$  分别称为  $z$  的实部和虚部, 记作

$$x = \operatorname{Re}(z), y = \operatorname{Im}(z),$$

当  $x = 0$  时,  $z = iy$  称为纯虚数; 当  $y = 0$  时,  $z = x + 0i$ , 我们把它看作是实数  $x$ . 例如复数  $3 + 0 \cdot i$  可看作实数  $3$ .

两个复数相等, 必须且只须它们的实部和虚部分别相等. 一个复数  $z$  等于  $0$ , 必须且只须它的实部和虚部同时等于  $0$ .

复数与实数不同, 一般说来, 任意两个复数不能比较大小.

2. 复数的代数运算 两个复数  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  的加法、减法及乘法的定义如下:

$$(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2), \quad (1.1.1)$$

$$\text{及 } (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2). \quad (1.1.2)$$

并分别称以上两式右端的复数为  $z_1$  与  $z_2$  的和、差与积。

显然, 当  $z_1$  与  $z_2$  为实数(即当  $y_1 = y_2 = 0$ )时, 以上两式与实数的运算法则一致。

至于除法, 可定义为: 满足

$$z_2 z = z_1, \quad (z_2 \neq 0)$$

的复数  $z = x + iy$ , 称为  $z_1 = x_1 + iy_1$  除以  $z_2 = x_2 + iy_2$  的商, 记作

$z = \frac{z_1}{z_2}$ . 从这个定义, 立即可推得

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 y_2 - y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.1.3)$$

事实上, 因为  $z_2 z = (x x_2 - y y_2) + i(x y_2 + x_2 y) = x_1 + i y_1$ , 所以

$$x x_2 - y y_2 = x_1, \quad x y_2 + x_2 y = y_1.$$

由于  $z_2 \neq 0$ , 那末  $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$ , 于是从以上两式可以解得

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

不难证明, 复数的运算和实数的情形一样, 也满足交换律、结合律和分配律:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1;$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \quad z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3;$$

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

我们把实部相同而虚部正负号相反的两个复数称为共轭复数, 与  $z$  共轭的复数记作  $\bar{z}$ . 如果  $z = x + iy$ , 那末  $\bar{z} = x - iy$ . 共轭复数有如下性质:

$$\text{i) } \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2};$$

$$\text{ii) } \bar{\bar{z}} = z;$$

$$\text{iii) } z \bar{z} = [\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2;$$

$$\text{iv) } z + \bar{z} = 2\text{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z).$$

这些性质作为练习,由读者自己证明.

在计算 $\frac{z_1}{z_2}$ 时,可以利用性质 iii)把分子分母同乘以 $\bar{z}_2$ ,即可得到所求的商.

**例 1** 设 $z_1=5-5i$ ,  $z_2=-3+4i$ , 求 $\frac{z_1}{z_2}$ 与 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ .

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad \frac{z_1}{z_2} &= \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)} \\ &= \frac{(-15-20) + (15-20)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i. \end{aligned}$$

所以  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i.$

**例 2** 设 $z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$ , 求 $\operatorname{Re}(z)$ ,  $\operatorname{Im}(z)$ 与 $z\bar{z}$ .

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad z &= -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = \frac{i}{i(-i)} - \frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= i - \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i\right) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i, \end{aligned}$$

所以  $\operatorname{Re}(z) = \frac{3}{2}$ ,  $\operatorname{Im}(z) = -\frac{1}{2}$ ,

$$z\bar{z} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

**例 3** 设 $z_1=x_1+iy_1$ ,  $z_2=x_2+iy_2$ 为两个任意复数,证明 $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$ .

$$\begin{aligned} \text{[证]} \quad z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 &= (x_1+iy_1)(x_2-iy_2) + (x_1-iy_1)(x_2+iy_2) \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2) \\ &\quad + (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= 2(x_1x_2 + y_1y_2) = 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2). \end{aligned}$$

或  $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} = 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2).$

## § 2 复数的几何表示

1. **复平面** 由于任一复数  $z = x + iy$  与一对有序实数  $x, y$  成一一对应, 所以对于平面上给定的直角坐标系, 复数  $z = x + iy$  可以用该平面上坐标为  $(x, y)$  的点来表示, 这是一个常用的表示法. 此时  $x$  轴称为实轴,  $y$  轴称为虚轴, 两轴所在的平面称为复平面或 $z$  平面. 这样, 复数与复平面上的点成一一对应, 并且常把“点  $z$ ”作为“数  $z$ ”的同义词.

复数  $z$  还能用从原点指向点  $(x, y)$  的平面向量来表示(图 1.1). 向量的长度称为  $z$  的模或绝对值, 记作

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.2.1)$$

显然, 下列各式成立:

$$|x| \leq |z|, \quad |y| \leq |z|,$$

$$|z| \leq |x| + |y|,$$

$$z \bar{z} = |z|^2 = |z^2|.$$

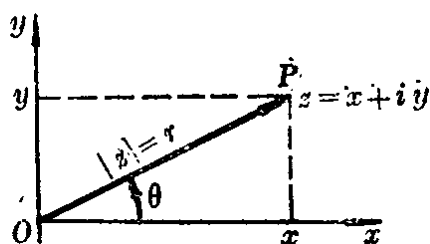


图 1.1

在  $z \neq 0$  的情况, 表示  $z$  的向量与  $x$  轴正向间的交角  $\theta$  称为  $z$  的辐角, 记作

$$\operatorname{Arg} z = \theta.$$

这时, 有

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x}. \quad (1.2.2)$$

我们知道, 任何一个复数  $z \neq 0$  有无穷多个辐角. 如果  $\theta_1$  是其中的一个, 那末

$$\operatorname{Arg} z = \theta_1 + 2k\pi \quad (k \text{ 为任意整数}) \quad (1.2.3)$$

就给出了  $z$  的全部辐角. 在  $z (\neq 0)$  的辐角中, 我们把满足  $-\pi < \theta_0 \leq \pi$  的  $\theta_0$  称为  $\operatorname{Arg} z$  的主值, 记作  $\theta_0 = \operatorname{arg} z$ .

当  $z=0$  时,  $|z|=0$ , 而辐角不确定.

根据复数的运算法则可知, 两个复数  $z_1$  和  $z_2$  的加、减法运算和相应向量的加减法运算一致(图 1. 2).

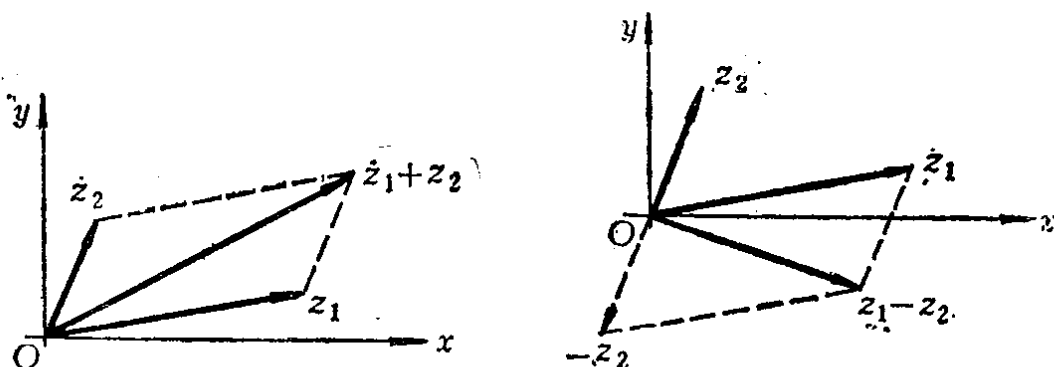


图 1. 2

我们又知道,  $|z_2-z_1|$  就是  $z_1$  与  $z_2$  之间的距离(图 1. 3), 因此

$$|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad (1. 2. 4)$$

$$|z_1-z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \quad (1. 2. 5)$$

一对共轭复数  $z$  和  $\bar{z}$  在复平面内的位置是关于实轴对称的(图 1. 4), 因而  $|z|=|\bar{z}|$ , 如果  $z$  不在负实轴和原点上, 还有  $\arg z = -\arg \bar{z}$ .

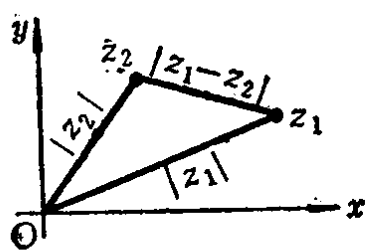


图 1. 3

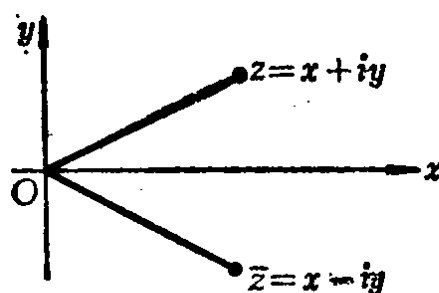


图 1. 4

利用直角坐标与极坐标的关系:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

还可以把  $z$  表成下面的形式:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (1. 2. 6)$$



称为复数的三角表示法.

再利用欧拉(Euler)公式①:  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ , 我们又可以得到

$$z = re^{i\theta}, \quad (1.2.7)$$

这种形式称为复数的指数表示法.

复数的各种表示法可以相互转换, 以适应讨论不同问题时的需要.

**例 1** 将  $z = -\sqrt{12} - 2i$  化为三角表示式和指数表示式.

[解]  $r = |z| = \sqrt{12 + 4} = 4$ ,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{-\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

由于  $z$  在第三象限, 所以

$$\theta = -\frac{5}{6}\pi.$$

$z$  的三角表示式是

$$\begin{aligned} z &= 4 \left[ \cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) \right] \\ &= 4 \left( \cos\frac{5}{6}\pi - i \sin\frac{5}{6}\pi \right), \end{aligned}$$

$z$  的指数表示式是

$$z = 4e^{-\frac{5}{6}\pi i}.$$

**例 2** 设  $z_1, z_2$  为两个任意复数, 证明:

- 1)  $|z_1 \bar{z}_2| = |z_1| |z_2|$ ;
- 2)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  (三角不等式).

[证] 1)  $|z_1 \bar{z}_2| = \sqrt{(z_1 \bar{z}_2)(z_1 \bar{z}_2)} = \sqrt{(z_1 \bar{z}_2)(\bar{z}_1 z_2)}$   
 $= \sqrt{(z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2)} = |z_1| |z_2|.$

---

① 其实, 它是欧拉公式:  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$  ( $z$  为任意复数) 的特殊情况, 这个公式的来源参见第二章 § 4 公式(2.4.14).