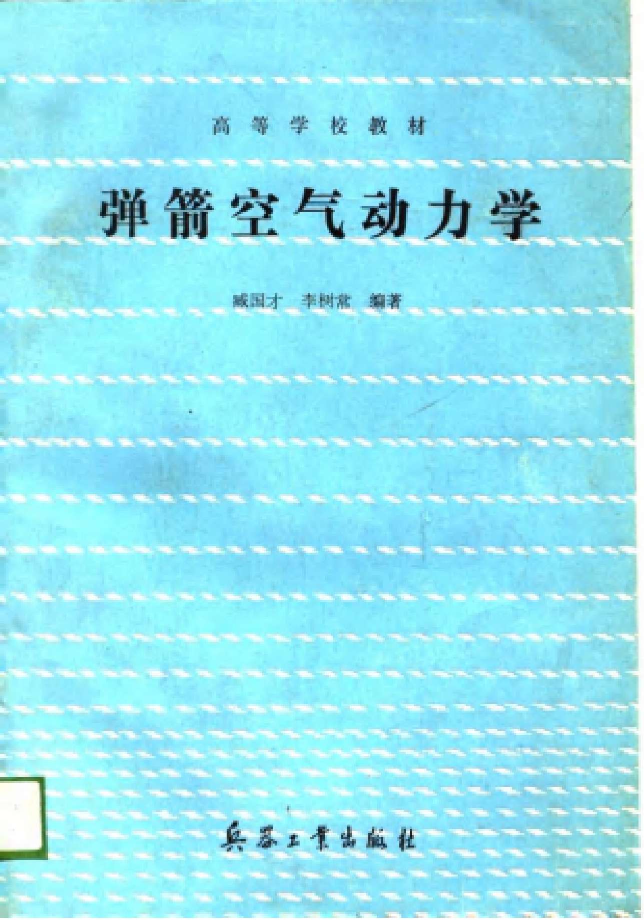

校 教 材

动力学

常 编著

兵器工业出版社

内 容 简 介

本书是一本阐述弹箭部件气动性能分析与计算的教材。内容较为系统，方法较为实用，而且既注意阐明物理概念，又注意了严格的数学处理。

本书主要内容包括线化理论，旋成体绕流的二级近似理论，薄弹翼理论，组合体理论，表面摩擦阻力，底部阻力以及弹箭气动特性的工程计算等。本书所提供的方法可供进行弹箭气动外形选择及气动力估算之用。

本书可供兵器、弹道、航空以及有关工程力学专业的高年级学生和研究生作为教材，同时可供有关科技人员和工程设计人员参考。

本书由苗瑞生主审，经原兵器工业部第一教材编审委员会导弹空气动力学与飞行力学编审小组审查，部教材编审室审定，同意作为部级教材出版。

弹箭空气动力学

臧国才　李树常　编著

*

兵器工业出版社 出版

（北京市海淀区车道沟10号）

新华书店总店北京科技发行所发行

昊海印刷厂印装

*

开本：787×1092 1/16　印张：30　字数：[illegible]千字

1989年9月第1版　1989年9月第1次印装

印数：1000　定价：3.95元

ISBN 7-80038-089-0/TJ·13(课)

前　　言

现代弹箭技术迅速发展，阻力小、射程远、稳定性能好、射击密集度高的新弹种不断涌现，尤其是大口径远射程榴弹、高速穿甲弹、小口径高速弹丸都在不断地更新弹形或采用新的空气动力学技术，这就给弹箭空气动力学提出了新的课题。

弹箭空气动力设计是兵器设计的先导，而弹箭部件空气动力设计与计算是完成弹箭总体空气动力设计的先决条件，本教材就是为这一目的而编写的。

本书主要讲弹箭各主要空气动力部件和组合体在亚音速、跨音速、超音速绕流时的空气动力特性。由于现代弹箭的飞行速度都相当高，因此对超音速流动特别关注，花了较多的篇幅详细介绍了国内外 70 年代、80 年代实用性较强的一、二次混合扰动理论预估方法和二次激波膨胀波理论预测方法，以及有攻角绕圆锥流动，同时也介绍了一些我们自己的研究成果。这些预测方法不仅给出弹箭设计所需要的气动力数据，并且提供了进行优化设计的数学模型。除此之外，本书对一些常用的超音速小展弦比薄弹翼给出了计算公式。

本书紧密结合弹箭的空气动力设计和计算，力求概念清晰、数学模型完整、理论结合实际。

由于编者水平有限，书中难免有失误和不妥之处，欢迎读者批评指正。

本书承北京理工大学苗瑞生教授审阅，并提出许多有益的建议，对提高书稿质量起了重要作用，特致谢意。

编者　　1986 年 6 月

主要符号

b	弹翼弦长
c	音速
C_{xf}	摩擦阻力系数
C_{xB}	波阻系数
C_T	前缘吸力系数
C_{xb}	弹体底部阻力系数
C_{xn}	弹体头部阻力系数
C_{xt}	弹体尾部阻力系数
C_y	升力系数
C_x	阻力系数
C_{x0}	零升阻力系数
C_{xi}	诱导阻力系数
e	内能
f	翼型弯度
H	热焓
κ	绝热指数
K	翼体干扰因子
k	热传导系数
L	弹体全长
M	马赫数
M_*	临界马赫数
m_z	俯仰力矩系数
m_x	滚转力矩系数
p	压力（压强）
Q	热量
q	动压
R	气体常数
Re	雷诺数
Re_t	转捩雷诺数
r	半径
S	面积
s	熵
T	温度（K）
v	速度

v'	透导速度
X	阻力
X_f	摩擦阻力
x_T	转换点坐标
x_p	压力中心位置
x	直角坐标
Y	升力
y	直角坐标
Z	侧向力
z	直角坐标
α	攻角
β	激波倾斜角
δ	附面层厚度
ε	下洗角
ζ	直角坐标
η	根梢比
η_λ	形状修正系数
η_M	压缩性修正系数
θ	角度
θ_c	圆锥激波半顶角
λ	长细比（长径比）
μ	粘性系数
γ	运动粘性系数
ξ	直角坐标
ρ	密度
τ	摩擦应力
Φ	速度势
φ	扰动速度势
χ	后掠角
Ψ	流函数
ω	角速度

下标：

∞	自由来流状态
0	滞点状态
$*$	临界状态
W	弹翼
l	下表面
u	上表面
t	紊流状态

B 弹体

M_∞ 可压缩状态

$M=0$ 不可压缩状态

c 最大厚度

r 翼根处

b 弹体底截面处

n 弹头部

L 弹体全长

G 质心

$\overline{BW}$ 组合体尾翼段

BW 组合体

上标：

$*$ 附面层位移厚度 δ^* 的上标

— 无因次值

α 对攻角的导数（1/（°））

a 对攻角的导数（1/rad）

目　　录

主要符号

第一章　空气动力学的基本方程……（1）

第一节　流动的描述方法及物理量的变化率……（1）

第二节　流体流动的基本方程……（3）

第三节　小扰动速势方程……（7）

第四节　扰动速势的分解……（11）

第五节　边界条件……（13）

第六节　压力系数……（14）

第二章　旋成体弹丸的几何特性及其空气动力系数表达式……（18）

第一节　旋成体弹丸的一般几何特性……（18）

第二节　圆锥母线……（19）

第三节　尖拱形母线……（20）

第四节　抛物线形母线……（23）

第五节　哈克系列母线……（25）

第六节　幂次系列母线……（25）

第七节　轴向力系数表达式……（26）

第八节　法向力系数表达式……（28）

第九节　俯仰力矩系数表达式……（29）

第三章　旋成体绕流的线化理论解法……（31）

第一节　流动特点和解法概要……（31）

第二节　亚音速流中的扰动速势解……（31）

第三节　超音速流中的扰动速势解……（35）

第四节　超音速尖头旋成体绕流的圆锥叠加解法……（39）

第五节　超音速尖头旋成体绕流的多项式解法……（44）

第六节　超音速流中的几种点源分布……（47）

第四章　细长旋成体理论……（53）

第一节　亚音速绕细长旋成体的轴向流动……（53）

第二节　超音速绕细长旋成体的轴向流动……（58）

第三节　绕细长旋成体的横向流动……（63）

第四节　绕细长旋成体流动的阻力和升力……（68）

第五节　大攻角细长旋成体绕流的空气动力增量……（69）

第五章　超音速旋成体绕流的其它解法……（71）

第一节　一二次混合扰动理论速势方程……（71）

第二节　二次迭代解……（77）

第三节　二次混合理论的数值解法 ……………………………………………………（ 80 ）
第四节　横向流动的一次解 ……………………………………………………………（ 93 ）
第五节　钝头影响的牛顿修正方法 ……………………………………………………（ 95 ）
第六节　超音速锥体绕流的基本方程 …………………………………………………（ 98 ）
第七节　绕锥轴对称流动的数值计算 …………………………………………………（100）
第八节　高马赫数下绕锥轴对称流动的近似解法 ……………………………………（106）
第九节　有攻角的圆锥绕流计算 ………………………………………………………（109）
第十节　二次激波膨胀波的基本概念和基本方程 ……………………………………（124）
第十一节　二次激波膨胀波计算旋成体气动性能 ……………………………………（133）
第六章　摩擦阻力和底部阻力 ……………………………………………………（142）
第一节　摩擦阻力和附面层 ……………………………………………………………（142）
第二节　可压缩紊流附面层微分方程 …………………………………………………（144）
第三节　普朗特混合长度理论 …………………………………………………………（149）
第四节　可压缩平板紊流附面层内的速度分布 ………………………………………（151）
第五节　动量积分关系式 ………………………………………………………………（153）
第六节　可压缩平板紊流摩擦阻力系数 ………………………………………………（154）
第七节　底部阻力的计算方法 …………………………………………………………（158）
第七章　薄弹翼的低速及亚音速空气动力特性 …………………………………（163）
第一节　弹翼的几何形状 ………………………………………………………………（163）
第二节　绕薄弹翼流动的分解 …………………………………………………………（164）
第三节　薄翼型理论 ……………………………………………………………………（166）
第四节　升力线理论 ……………………………………………………………………（176）
第五节　后掠弹翼的空气动力特性 ……………………………………………………（184）
第六节　戈泰特变换法则 ………………………………………………………………（190）
第八章　薄弹翼的跨音速空气动力特性 …………………………………………（194）
第一节　临界马赫数 ……………………………………………………………………（194）
第二节　翼型的跨音速绕流特性 ………………………………………………………（195）
第三节　翼型的跨音速空气动力特性 …………………………………………………（197）
第四节　无限翼展后掠翼的跨音速特性 ………………………………………………（198）
第九章　薄弹翼的超音速空气动力特性 …………………………………………（200）
第一节　翼型的超音速空气动力特性 …………………………………………………（200）
第二节　无限翼展后掠翼的空气动力特性 ……………………………………………（209）
第三节　超音速绕流弹翼的基本概念 …………………………………………………（211）
第四节　超音速薄翼的边界条件 ………………………………………………………（213）
第五节　超音速薄翼阻力问题的基本解 ………………………………………………（215）
第六节　点源强度函数 $f(\xi,\zeta)$ 的确定 ………………………………………（216）
第七节　对称翼型矩形翼的厚度波阻 …………………………………………………（217）
第八节　对称翼型斜率为常数的角形翼的压力分布 …………………………………（220）

第九节　薄弹翼厚度波阻算例 ……………………………………………………………（224）
第十节　超音速薄翼升力问题的扰动速势 …………………………………………………（229）
第十一节　超音速小攻角绕流矩形平板翼的升力 …………………………………………（232）
第十二节　超音速小攻角绕流三角形平板翼的升力 ………………………………………（238）
第十三节　诱导阻力系数 ……………………………………………………………………（240）
第十章　弹体弹翼组合体的空气动力特性 ………………………………………………（241）
第一节　组合体各部件间的干扰 ……………………………………………………………（241）
第二节　细长组合体的升力和干扰系数 ……………………………………………………（244）
第三节　尾翼弹的阻力系数 …………………………………………………………………（255）
第四节　尾翼弹的俯仰力矩系数 ……………………………………………………………（256）
第十一章　马格努斯效应 ……………………………………………………………………（259）
第一节　单独弹体的马格努斯效应 …………………………………………………………（260）
第二节　全层流附面层时弹体的马格努斯力系数 …………………………………………（262）
第三节　弹翼的马格努斯效应 ………………………………………………………………（266）
第十二章　弹箭空气动力工程计算 …………………………………………………………（271）
第一节　弹体空气动力系数计算 ……………………………………………………………（271）
第二节　弹翼空气动力系数计算 ……………………………………………………………（290）
第三节　尾翼弹空气动力系数计算 …………………………………………………………（300）
主要参考文献 …………………………………………………………………………………（309）

第一章　空气动力学的基本方程

第一节　流动的描述方法及物理量的变化率

在描述作为连续体的流动时，例如空气或水，通常需要分割这个连续体而得到无限多个微小的微团。微团尺寸既要比绕流物体的尺寸小得多，又要比分子及其自由行程的尺寸大得多，这样的流体微团又称为流体质点。研究流体的运动规律，也就是研究组成该流体的流体质点的运动。因为流体质点实质上是一个微团，因此它具有物理量，例如压力、密度、温度等，这样的点又称为物理点。

研究流体质点的物理量和它们的变化是很重要的。其研究方法有两种：一种是研究每一个流体质点随时间变化而变化的情况，即着眼于每一个流体质点，研究它在任意一段时间内的轨迹及速度、压力、密度等，这种方法称为拉格朗日方法。另一种方法是着眼于流体所占据的空间中的某一点，即研究空间某一固定点上各个瞬时流体质点的速度、压力、密度的变化，这种方法称为欧拉方法。

拉格朗日的方法似乎比较容易理解，但实际上用此方法解某些特定问题，往往是非常困难的。在大多数情况下，所研究的流体是匀质、匀速来流，不需要仔细区分每一个流体质点的运动状况，而只要把某个局部空间中各点的流体状态和那个时刻的变化弄清楚就可以了。因此一般不采用拉格朗日方法，而采用欧拉方法。采用欧拉方法可以引进数学场的概念，这在数学处理上带来很大的方便。

空气动力学的最终目的是为了寻求满足给定边界条件的流动状态，即求出流场空间中各瞬时的物理的解。对于空间坐标 x、y、z 和时间坐标 t，共有四个独立变量，那么所有流体质点的物理量都可以用它们来描述。

设 A 是流动过程中流体质点的某一个物理量，它可以代表速度、压力、密度等，也可以是向量函数，还可以是数量函数。A 可以表示成 t、x、y、z 的函数。根据台劳级数展开式，A 的改变量 δA 可以写成

$$\delta A=\frac{\partial A}{\partial t}\delta t+\frac{\partial A}{\partial x}\delta x+\frac{\partial A}{\partial y}\delta y+\frac{\partial A}{\partial z}\delta z+ +O(\delta t^2,\delta x^2,\delta y^2,\delta z^2) \tag{1-1}$$

因为流体速度 $\vec{v}$ 在 x、y、z 方向的分量分别为 v_x、v_y、v_z，其定义为

$$\begin{cases} v_x=\lim\limits_{\delta t\to 0}\dfrac{\delta x}{\delta t} \\ v_y=\lim\limits_{\delta t\to 0}\dfrac{\delta y}{\delta t} \\ v_z=\lim\limits_{\delta t\to 0}\dfrac{\delta z}{\delta t} \end{cases}$$

即流体质点的某一物理量 A 随时间的变化率是

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta A}{\delta t} = \frac{\partial A}{\partial t} + v_x \frac{\partial A}{\partial x} + v_y \frac{\partial A}{\partial y} + v_z \frac{\partial A}{\partial z} \tag{1-2}$$

如果引进微分算子

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{1-3}$$

因而可以把流体质点的物理量 A 的变化率写成如下形式

$$\frac{\mathrm{D}A}{t} = \frac{\partial A}{\partial t} + v_x \frac{\partial A}{\partial x} + v_y \frac{\partial A}{\partial y} + v_z \frac{\partial A}{\partial z} \tag{1-4}$$

在柱坐标系中有

$$\frac{\mathrm{D}A}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial A}{\partial t} + v_x \frac{\partial A}{\partial x} + v_r \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \tag{1-5}$$

在球坐标系中

$$\frac{\mathrm{D}A}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial A}{\partial t} + v_r \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \tag{1-6}$$

在方程（1-4）、（1-5）、（1-6）中，右边第一项表示物理量 A 在空间固定点随时间的变化率，如果这一项为零，即物理量 A 不显含时间 t，称这类流动为定常流动，反之则称为不定常流动。其余各项是由于物理量 A 在空间分布不均匀，流体质点移动时所产生的对流变化率，称作迁移变化率。这两部分的和就构成了物理量 A 随时间的变化率。

如果把物理量 A 认作为位置矢量 $\vec{r}$（x, y, z），显然 $\vec{r}$ 随时间的变化率是速度 $\vec{v}$，即有

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{D}\vec{r}}{\mathrm{D}t} = v_x \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}$$

如果物理量 A 取为速度矢量 $\vec{v}$，那么其变化率就是加速度，即有

$$\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

上式右边第一项表示局部加速度，对于定常运动，局部加速度为零。后面三项的和是由于空间速度分布不均匀引起的，称为对流加速度或迁移加速度。

至于其它物理量 p、ρ、T，其变化率也都按式（1-4）形式给出。

下面再考虑每单位质量流体的物理量 Φ 的变化情况。在所考虑的流体中选取一个固定的边长为 Δx、Δy、Δz 的立方体，设流体密度为 ρ，那么 Δt 时间内，从 x 处的 $\Delta y \Delta z$ 面流入的物理量为 $\rho\Phi v_x \Delta t \Delta y \Delta z$，而从 $x+\Delta x$ 处的 $\Delta y \Delta z$ 面流出的物理量应为 $[\rho\Phi v_x + \partial(\rho\Phi v_x)/\partial x \cdot \Delta x]\Delta t \Delta y \Delta z$。

对 $\Delta z \Delta x$、$\Delta x \Delta y$ 面的情况，完全可以写出类似的式子。因此，通过立方体各表面的净流出量（对流增量）为

$$\left[\frac{\partial(\rho\Phi v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\Phi v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\Phi v_z)}{\partial y}\right]\Delta t \Delta x \Delta y \Delta z$$

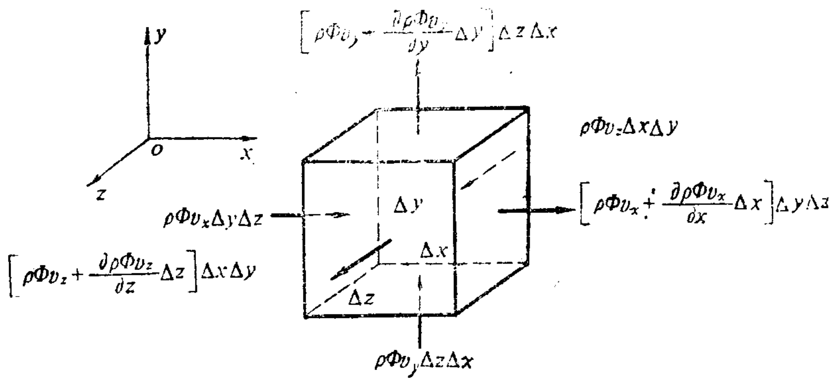

图 1-1 对小立方体Φ的流入流出量

另一方面，在小立方体内经 Δt 时间，由于物理量变化而获得一个净增量为

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t}\Delta t\Delta x\Delta y\Delta z$$

这两者之和就构成了物理量 Φ 在流动过程中的总增量。如果考虑单位时间，单位质量物理量的变化率，就应该用 $\rho\Delta t\Delta x\Delta y\Delta z$ 除之，于是便得该物理量的变化率为

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\Phi v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\Phi v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\Phi v_z)}{\partial z}\right]$$

$$=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\Phi\vec{v})\right]$$

$$=\frac{D\Phi}{Dt}+\Phi\left[\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}+\mathrm{div}\vec{v}\right] \qquad (1\text{-}7)$$

例如考虑流体体积的变化，因为每单位质量流体的体积为 $1/\rho$，将 $\Phi=1/\rho$ 代入式（1-7），得到 $1/\rho\cdot\mathrm{div}\vec{v}$，因此单位质量流体的体积变化率就是

$$\frac{\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\vec{v}}{\frac{1}{\rho}}=\mathrm{div}\vec{v}$$

对于式（1-7），物理量可以是标量，也可以是矢量，上式同样成立。

若用以上方法来求单位质量流体的质量、动量、能量的变化，再通过普遍的质量、动量、能量守恒定律，就可以得到流体运动所遵循的质量、动量、能量守恒方程。

第二节　流体流动的基本方程

根据经典力学中的质量守恒定律，在流动过程中系统的质量是保持不变的。在式（1-7）中，把 Φ 取为单位质量流体的质量，当然 $\Phi=1$，而其变化率为零，即

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\vec{v})=0 \qquad (1\text{-}8)$$

或
$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\mathrm{div}\vec{v}=0 \tag{1-9}$$

这就是流体力学中的质量守恒关系式，称为连续方程。

对于定常情况，即 $\partial/\partial t=0$，那么连续方程为
$$\mathrm{div}(\rho\vec{v})=0 \tag{1-10}$$

此外，对于不可压缩流体，流动过程中 ρ 保持不变，即 $\mathrm{D}\rho/\mathrm{D}t=0$，那么连续方程为
$$\mathrm{div}\vec{v}=0 \tag{1-11}$$

采用柱坐标系时，连续方程的表达式为
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_r r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta}=0 \tag{1-12}$$

采用球坐标系时，连续方程的形式为
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_r r^2)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial\varphi}=0 \tag{1-13}$$

其中柱坐标系，球坐标系的取法参见图 1-2，图 1-3。

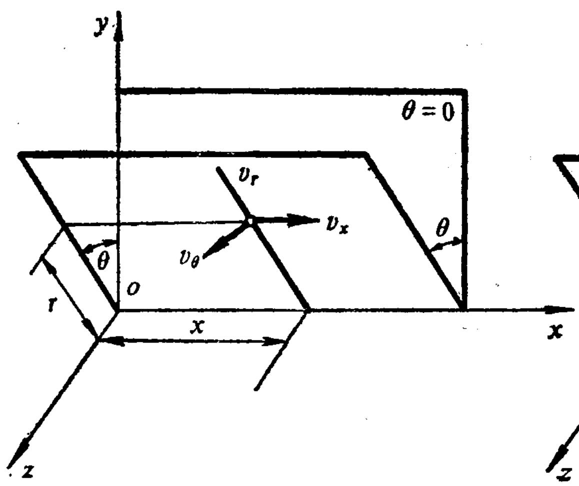

图 1-2　柱坐标系

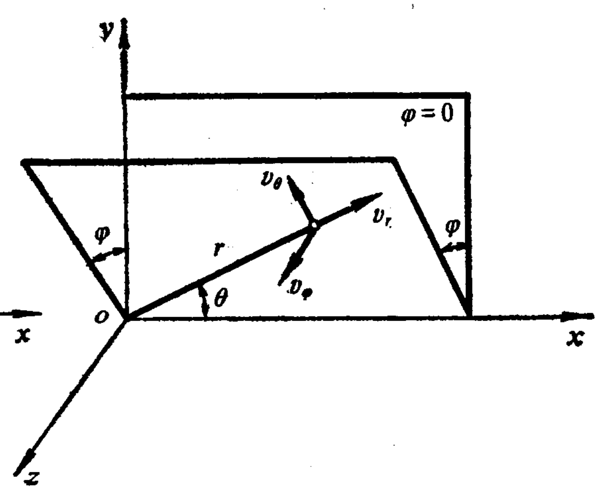

图 1-3　球坐标系

按牛顿运动第二定律的叙述，系统的动量变化率与作用在该系统上的力相等。取单位质量流体作为系统，其动量就是速度 $\vec{v}$（$\Phi=\vec{v}$），那么按照牛顿第二定律有
$$\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}=\text{作用在单位质量流体上的力}$$

如果考虑的是理想流体，外力为质量力 $\vec{G}$ 和压力梯度引起的力 $-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p$，这时动量方程可写为
$$\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}=\vec{G}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p \tag{1-14}$$

对于一般空气而言，质量力主要是重力，其量值很小，可以略去不计。

如果考虑的是粘性流体，那么外力除以上两项外，还有剪切摩擦应力，对于一般空气而言，可以认为粘性系数 μ 为常数，这时动量方程的形式为

$$\frac{D\vec{v}}{Dt}=\vec{G}-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}p+\gamma\nabla^2\vec{v}+\frac{\gamma}{3}\,\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{v}) \tag{1-15}$$

其中

$$\gamma=\frac{\mu}{\rho}$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

方程（1-15）称作纳维-斯托克斯（Navier-Stokes）方程，但不是最一般的纳 维-斯 托克斯方程，因为前面已经用了 μ 为常数的假设。

对于不可压缩粘性流体，由于连续方程为 $\mathrm{div}\,\vec{v}=0$，所以上式可化简为

$$\frac{D\vec{v}}{Dt}=\vec{G}-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}p+\gamma\Delta^2\vec{v} \tag{1-16}$$

本教材所讨论的流体为空气，一般不计粘性影响，只是在附面层内才讨论粘性影响，因此所关心的动量方程是理想流体的欧拉运动方程，即

$$\frac{D\vec{v}}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}p \tag{1-17}$$

这个方程在直角坐标系中的分量形式很容易写出来。而在有些内容的讨论中，用柱坐标系或球坐标系表述问题更方便一些。所以下面把柱坐标形式和球坐标形式的欧拉运动方程写出来，而不作详尽的推导。柱坐标中的欧拉方程

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_r\frac{\partial v_x}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_x}{\partial\theta}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
&\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_r}{\partial x}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\\
&\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_\theta}{\partial x}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial\theta}
\end{aligned}\right. \tag{1-18}$$

球坐标中的欧拉方程

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{v_\theta^2+v_\varphi^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\\
&\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\varphi^2\mathrm{ctg}\theta}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial\theta}\\
&\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{v_r v_\theta}{r}+\frac{v_\theta v_\varphi\mathrm{ctg}\theta}{r}=-\frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varphi}
\end{aligned}\right. \tag{1-19}$$

根据能量守恒定律，系统能量的增加等于外界对该系统所作的功与加入该系统的热量之和。仍取单位质量流体为系统，单位质量流体所具有的能量，包括内能 e 和动能 $v^2/2$，若令物理量 $\Phi=e+v^2/2$，则单位质量流体能量的变化率为

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(e+v^2/2)$$

单位时间内对单位质量流体所作的功应由以下几部分所构成，即质量力做功 $\vec{v}\cdot\vec{G}$，压力梯度所做的功 $-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p\cdot\vec{v}$，剪切摩擦应力 $\vec{f}$ 做的功 $\vec{f}\cdot\vec{v}$，压力在流体体积膨胀过程中所做的功 $-p/\rho\cdot\operatorname{div}\vec{v}$，由流体摩擦产生的热耗散 Φ/ρ（Φ 称为耗散函数），另有外界加给单位质量流体的热 Q/ρ 构成。因此，表示能量守恒定律的方程有以下形式

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(e+\frac{v^2}{2}\right)=\vec{G}\cdot\vec{v}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p\cdot\vec{v}+\vec{f}\cdot\vec{v}-$$

$$-\frac{p}{\rho}\operatorname{div}\vec{v}+\frac{\Phi}{\rho}+\frac{Q}{\rho} \tag{1-20}$$

其中 Φ 是流体变形过程中由于流体粘性作用而变成热量所耗散掉的功，Φ 又被称之为能量耗散函数，其表达式如下

$$\frac{\Phi}{\rho}=\nu\left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2\right]+$$

$$+\frac{2}{3}\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}-\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2\right] \tag{1-21}$$

如果方程（1-15）与速度 $\vec{v}$ 作点积，而方程（1-15）右边最后两项之和就是摩擦剪应力 $\vec{f}$，这样就导出了一个惯性力做的功与各力所做功之间的关系式，

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{v^2}{2}\right)=\vec{G}\cdot\vec{v}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p\cdot\vec{v}+\vec{f}\cdot\vec{v} \tag{1-22}$$

从方程（1-20）中减去方程（1-22），再利用连续方程（1-9），得

$$\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}=\frac{p}{\rho^2}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\frac{Q}{\rho}+\frac{\Phi}{\rho}$$

或者

$$\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t}+p\frac{\mathrm{D}\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\mathrm{D}t}=\frac{Q}{\rho}+\frac{\Phi}{\rho} \tag{1-23}$$

再引进焓的表示式 $h=e+p/\rho$，则上式可写作

$$\frac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}t}-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t}=\frac{Q}{\rho}+\frac{\Phi}{\rho} \tag{1-24}$$

因为 $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ 表示流体质点运动过程中物理量的变化率，所以方程（1-23）和方程（1-24）实质上就是热力学第一定律在流体力学中的具体形式

$$\mathrm{d}e+p\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right)=\mathrm{d}h-\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p=\delta q \tag{1-25}$$

其中 δq 是加给流体的热量。

方程（1-23）或方程（1-24）的右端正是表示单位时间加给单位质量流体的热量。Φ 是耗散加热，Q 是外加热。

若引进熵增量的定义 $ds=dq/T$，从方程（1-24）和（1-25）可以看出，单位时间单位质量流体熵的变化率为

$$T\frac{Ds}{Dt}=\frac{Q}{\rho}+\frac{\Phi}{\rho} \tag{1-26}$$

关于熵的变化问题，普通热力学已有详尽的讨论，此处仅是简单地给一个表达式而已，说明流体运动的能量方程与热力学第一定律是一致的。

第三节　小扰动速势方程

通常解理想流体运动问题时，速度矢量 $\vec{v}$ 有三个分量，再加上压力 p 和密度 ρ 两个状态量，共五个未知函数。从流体所遵循的运动规律而言，应当服从连续方程，三个分量形式的动量方程，一个能量守恒方程，共有五个方程，原则上讲方程组是封闭的，即可依各种边界条件来求所研究的特定问题的解。如果对于绝热可逆流动，能量方程可以化为等熵方程，问题可以简化一点。但是，实际上解这样的方程组除极少数问题外，几乎是非常困难的。因此，还需要根据流体流动的实际特征，进行假设简化。

简化的一个重要方法就是小扰动理论，将原来的非线性方程线性化，然后解线性方程。线性方程在数学上易于求解，并且可以利用叠加原理，以解决某些较复杂的问题。在许多情况下，这种线化方法给出的近似解还是比较好的。

小扰动理论适用于物体细长或者物体很薄、攻角较小、马赫数不太高的流动情况，也就是物体的存在对均匀流场产生的扰动较小。可以把物体附近的流动分成一个主流流动和一个附加的小扰动流动，而这种小扰动相对于主流而言是相当小的，若忽略其高阶小量不计，那么对应的流动控制微分方程和边界条件将大大简化。这组简化后的线性方程和线性边界条件，对亚音速、跨音速、超音速都适用。小扰动理论是求解空气动力学问题的有力工具，本教材将广泛应用。

一　速势方程

现在来研究有势流动，有势必需无旋，或者流动必需是均熵流动。对于理想流体，来流又是均匀的，除粘性影响严重及尾迹区之外，而又没有激波出现的区域都满足均熵流动条件。对于二维的斜激波前后、三维的圆锥激波前后，分别满足均熵流动条件，对于变化比较平直的曲线、曲面激波之后的流场，也近似地当作均熵、无旋、有势流场来处理。

引进向量微分算子

$$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1-27}$$

可以把定常的连续方程（1-10）和理想流体运动方程改写如下

$$\nabla(\rho\vec{v})=0 \tag{1-28}$$

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{1-29}$$

以及等熵音速方程为

$$c^2=\frac{\nabla p}{\nabla\rho} \tag{1-30}$$

把式（1-28）展开，并与式（1-30）合并消去 $\nabla\rho$

$$\rho\nabla\vec{v}+\frac{\vec{v}}{c^2}\nabla p=0 \tag{1-31}$$

用方程（1-31）和方程（1-29）消去 ∇p，得

$$c^2\nabla\vec{v}-\vec{v}[(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}]=0 \tag{1-32}$$

或者

$$c^2\nabla\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{v}\nabla v^2=0 \tag{1-33}$$

如果流动是有势流动，一定存在一个速度势函数 Φ，满足

$$\vec{v}=\nabla\Phi \tag{1-34}$$

把方程（1-34）代入方程（1-33）即得到速度势方程为

$$c^2\nabla^2\Phi-\frac{1}{2}\nabla\Phi\cdot\nabla(\nabla\Phi)^2=0 \tag{1-35}$$

方程（1-35）称作为速度势方程。由于它是以矢量形式给出的，所以很容易在各个坐标系中写出该速度势方程的形式。

在直角坐标系中，其形式为

$$\begin{aligned}&(c^2-\Phi_x^2)\Phi_{xx}+(c^2-\Phi_y^2)\Phi_{yy}+(c^2-\Phi_z^2)\Phi_{zz}\\&-2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy}-2\Phi_y\Phi_z\Phi_{yz}-2\Phi_z\Phi_x\Phi_{zx}=0\end{aligned} \tag{1-36}$$

其中 $\Phi_x=v_x$；$\Phi_y=v_y$；$\Phi_z=v_z$

在柱坐标系中，其形式为

$$\begin{aligned}&(c^2-\Phi_x^2)\Phi_{xx}+(c^2-\Phi_r^2)\Phi_{rr}+(c^2-\frac{1}{r^2}\Phi_\theta^2)\frac{1}{r^2}\Phi_{\theta\theta}\\&-2\Phi_x\Phi_r\Phi_{xr}-2\frac{1}{r^2}\Phi_r\Phi_\theta\Phi_{r\theta}-2\frac{1}{r^2}\Phi_\theta\Phi_x\Phi_{\theta x}\\&+\frac{1}{r}\Phi_r(c^2-\frac{1}{r^2}\Phi_\theta^2)=0\end{aligned} \tag{1-37}$$

其中 $\Phi_x=v_x$；$\Phi_r=v_r$；$\Phi_\theta=rv_\theta$

在球坐标系中，其形式为

$$\begin{aligned}&(c^2-\Phi_r^2)\Phi_{rr}+\frac{1}{r^2}(c^2-\frac{1}{r^2}\Phi_\theta^2)\Phi_{\theta\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}(c^2-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Phi_\varphi^2)\Phi_{\varphi\varphi}\\&-2\frac{1}{r^2}\Phi_r\Phi_\theta\Phi_{r\theta}-2\frac{1}{r^4\sin^2\theta}\Phi_\theta\Phi_\varphi\Phi_{\theta\varphi}-2\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Phi_r\Phi_\varphi\Phi_{r\varphi}\\&+\frac{1}{r}(2c^2+\frac{1}{r^2}\Phi_\theta^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Phi_\varphi^2)\Phi_r+\frac{1}{r^2}(c^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\Phi_\varphi^2)\mathrm{ctg}\theta\Phi_\theta=0\end{aligned} \tag{1-38}$$