财经类中专试用教材

经济数学基础

（下）

王才吉　主编

中国商业出版社

编 委

（以姓氏笔画为序）

王才吉	王存仲	王耀东	孙 明	孙玉乐
李化之	李卫东	李玉珍	李来英	郑 立
张 英	张建芝	张保国	侯昭群	徐 宁
高保金	梁鸿忠	韩立水	鲍坤兰	魏连振

财经类中专试用教材

经济数学基础（下）

王才吉 李化之 李来英 侯昭群 等编

中国商业出版社出版发行

山东济宁师专印刷厂印刷

787×1092毫米 32开 10·印张 216千字

1989年7月第1版 1989年7月第1次印刷

印数：1—5000本 全套定价：6.86元

ISBN7—5044—0414—4/F·264

前　　言

为适应财经类中专数学教学改革和招收初中、高中生的教学需要，山东省中专数学教研会根据省教育厅职教处文件精神，1986年，组织讨论了财经类中专《数学教学大纲》，并编写相应教材。今在两年试用基础上，教研会又组织部分教师重新改编，全书经杜铮付教授、李国良付教授主审，由中国商业出版社出版。

教材第一册分初等教学、一元微积分两篇，第二册分线性代数与线性规划、概率与数理统计两篇。教学内容，选取应用数学基础，注重体现财经类特色，加强经济应用数学内容；内容编排和习题配备，深入浅出，删繁就简，便于教和学。

全套教材约45万字。供招收初中中专试用，约需260到280课时。其中微积分一篇单独装订成册，和第二册配合，供招收高中中专试用，约需160到180课时。

水平所限，编印不当之处，欢迎批评指正。

数学教材编写组

一九八九年六月

目　　录

第三篇　线性代数与线性规划

第一章　行列式

行列式是研究线性代数的重要工具之一，其它数学学科中也经常用到它。本章从二阶、三阶行列式的概念出发，引入n阶行列式的概念，介绍行列式的一些重要性质、计算方法等，最后给出用n阶行列式解n元线性方程组的克莱姆法则。

§1.1　二阶、三阶行列式

一．二阶行列式

我们已经学过二元一次方程组和三元一次方程组以及用加减消元法求它们的解。一次方程组又叫做线性方程组。

例1. 解方程组

$$\begin{cases} 2x-3y=-4 & (1) \\ 3x-\ y=1 & (2) \end{cases}$$

解： （1）－（2）×3得：

$$-7x=-7$$

$\therefore x=1$

把 $x=1$ 代入（2）得：

$$3\times1-y=1$$

$\therefore y=2$

$\therefore$ 方程组的解为：

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

这是用加减消元法解线性方程组。下面学习方程组的其它解法。为此，引入一个新的概念——二阶行列式。

将二元一次方程组写成一般形式是：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (2) \end{cases}$$

其中，x_1，x_2是未知数，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}是未知数的系数，b_1，b_2是常数项（在一般形式中，把常数项写在方程等号的右边）。

仍用上述加减消元法可以得到（注）：

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_1a_{12} \qquad (3)$$

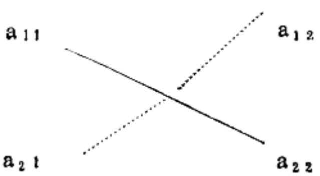
$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21} \qquad (4)$$

于是，当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时，方程组有唯一解：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \qquad (5)$$

为了便于记忆这一结果，我们对公式（3）进行分析。

在公式(5)中，两个式子的分母都是$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，并且都只含有未知数的系数。把未知数系数按照它们在方程组中原来的位置排列成正方形。即：



注：将(1)$\times a_{22}$－(2)$\times a_{12}$即得到(3)
　　将(1)$\times a_{21}$－(2)$\times a_{11}$即得到(4)

画出这个正方形的两条对角线，把实线称为主对角线，虚线称为副对角线。可以看出，分母$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$是这样两项的和：一项是主对角线上两个系数的乘积，再添上正号；一项是副对角线上两个系数的乘积，再添上负号。

我们在这四个数的两旁各加一条竖线，引进符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

并规定它的展开式为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad (6)$$

称为二阶行列式。

二阶行列式中a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}叫做行列式的元素，可简记为a_{ij}（i，$j=1,2$）。这四个元素排成二行二列（横排叫行，竖排叫列）。例如a_{21}就表示行列式中第二行第一列的元素。利用对角线把二阶行列式展开成（6）式的方法称为对角线法则。

由二阶行列式的定义可知：

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

它们分别用符号D，D_1，D_2来表示：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

于是，当$D\neq0$时，上面公式(5)就可以表示为：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \end{cases}$$

这就是二元一次方程组解的行列式表示法。例如：

解方程组

$$\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ 3x-\ \ y=1 \end{cases}$$

解： $D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

$=2\times(-1)-(-3)\times3=-2+9=7$

$D_x=\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$=(-4)\times(-1)-(-3)\times1=4+3=7$

$D_y=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

$$=2\times 1-(-4)\times 3=2+12=14$$

$$\therefore\quad x=\frac{D_x}{D}=\frac{7}{7}=1,\qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{14}{7}=2$$

∴ 方程组的解为：

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

二、三阶行列式

把九个数排成三行三列，并在两旁各加一条竖线：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

并规定它的展开式为：

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

称为**三阶行列式**。

三阶行列式也可按对角线法则展开，如图1—1所示：

图1—1

容易看出，图1—1中实线上三个元素的乘积添上正号，虚线上三个元素的乘积添上负号。它就是三阶行列式展开式中的六项。

例2．用对角线法则计算行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

解：

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=3\times1\times(-2)+(-2)\times0\times1+2\times(-2)\times3$$
$$-2\times1\times1-(-2)\times(-2)\times(-2)-3\times0\times3$$
$$=-6+0-12-2+8-0=-12。$$

仿照用二阶行列式表示二元线性方程组解的方法，下面用三阶行列式来表示三元线性方程组的解。设

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

用D，D_i（i=1，2，3）表示行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则当$D\neq 0$时，方程组有唯一解：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \\ x_3=\dfrac{D_3}{D} \end{cases}$$

式中D_i表示常数项代替系数行列式D中的第i列后得到的行列式($i=1,2,3$)。

例3．解三元一次方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3 \\ -2x_1+x_2-x_3=-3 \\ x_1-4x_2+2x_3=-5 \end{cases}$$

解：先计算系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & -1\\ 1 & -4 & 2\end{vmatrix}$$

$$=2-2+8-1+8-4=11\neq 0$$

再计算未知量x_1，x_2，x_3的分子行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ -3 & 1 & -1\\ -5 & -4 & 2\end{vmatrix}=33$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ -2 & -3 & -1\\ 1 & -5 & 2\end{vmatrix}=11$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & -3\\ 1 & -4 & -5\end{vmatrix}=-22$$

于是 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{33}{11}=3$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{11}{11}=1$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-22}{11}=-2$$

∴ 方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=3\\ x_2=1\\ x_3=-2\end{cases}$$

练　习

1．行列式的符号是怎样引进的，它表示的是什么？

2．什么叫做系数行列式？试举一例说明。

3．计算下列行列式的值：

（1）$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} m+1 & m+2 \\ m & m+1 \end{vmatrix}$　　（4）$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}$

（5）$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

（6）$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ m & n & c \end{vmatrix}$

（7）$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

（8）$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$

4．解方程组

（1） $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 5x-2y=1 \end{cases}$

（2） $\begin{cases} mx+y=-1 \\ 3mx-my=2m+3 \end{cases}$

（3） $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ 3x-2y-5z-1=0 \\ x+3y-2z-4=0 \end{cases}$

（4） $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x+y-2z=0 \\ 7x+6y+7z=100 \end{cases}$

5．解方程：

（1） $\begin{vmatrix} 0 & x-1 & 1 \\ x-1 & 0 & x-2 \\ 1 & x-2 & 0 \end{vmatrix}=0$

（2） $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}=0$

§1.2 行列式的性质

为了更好地掌握和运用行列式这一重要工具及简化行列式的计算，下面以二、三阶行列式为例，介绍行列式的一些重要性质。

性质1. 把行列式的各行变为相应的各列，行列式的值不变。

例如，
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

由这一性质可知：对于行列式中行成立的性质，对于列也一定成立。下面讨论均以行为例，结论同样也可运用到列上去。

性质2. 把行列式中的两行对调，所得的行列式与原行列式绝对值相等，符号相反。

例如，

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6 - 20 + 4 - 1 - 20 + 24 = -7$$