信号与系统

自学辅导与应试指南

闵大镒　张庆孚　编著

电子科技大学出版社

● 高等学校《自学辅导与应试指南》丛书 ●

《信号与系统》自学辅导与应试指南

闵大镒　张庆孚　编著

电子科技大学出版社

内 容 提 要

本书共分两篇：第一篇自学辅导，第二篇应试指南。

第一篇首先扼要综合、归纳、理顺《信号与系统》课程的思路，指出全书最重要的概念、分析方法及应熟记的基本公式定理。然后根据教学大纲的基本要求，介绍考试中常见的题型及重点和难点。为了帮助广大考生学习本课的核心内容，减少由于缺乏教师面授知识、批改作业所造成的困难，还详尽列出了配合课程学习而设置的思考题及练习题解答。

第二篇根据本课程较为固定的配题原则，系统地介绍了常规题中八类试题的解题技巧，以及创新题的处理方法。以帮助读者深化概念和牢固掌握基本知识。所配置的几套模拟试卷及评分细则，既可以帮助考生有的放矢地做好应试准备，答题中分清主次，尽可能获得最好的成绩；也可供考生自查自检，树立信心。

本书内容丰富、适用，且针对性强。两篇内容互有联系，而又各自独立成篇。是自学考生及其他各层次应试考生的理想参考读物，也可供教师及从事无线电技术、信息传输、信息处理工作的广大科技人员参考。

● 高[redacted]自学辅[redacted]试指南》丛书 ●

《[redacted]号与[redacted]导[redacted]应试指南

[redacted] 编著

*

电子科技大学出版社出版发行

（中国成都建设北路二段四号） 邮编 610054

四川省郫县唐昌印制厂印刷

新华书店经销

*

开本 787×1092 1/16 印张 19.75 字数 481 千字

1997 年 5 月第一版 1997 年 5 月第一次印刷

印数：1—7000 册

ISBN 7—81043—689—9/TN・23

定价：22.00 元

前　言

《信号与系统》(或《信号与线性系统分析》)是电子信息类各专业(通信、无线电技术、雷达、自动控制、测量、计算机应用等)的重要技术基础课程。它继《电路分析基础》(或《电路基本理论》)之后，集中地研究确定信号经线性时不变(LTI)系统进行传输、处理的基本理论和基本分析方法。所以，它既是后继众多专业课的基础，也涉及诸如放大、整流、滤波、调制、解调、取样、数一模转换等典型技术。本课程具有：内容充实、论述严谨、系统性强、运用数学工具多等特点。对培养抽象思维能力、综合应用知识解决工程问题的能力非常有效。被国内外许多高校视为核心课程之一，也是大学生们视为在校学习期间收效最大的课程之一。

学习《信号与系统》课，必须理解许多重要概念，记忆许多信号分解、系统分析的重要公式定理，掌握求解系统的重要计算方法，特别是应学会从众多的方法中，寻找出解决问题的捷径、既快又好地算出正确的结果来，这些对不少考生来讲都是相当困难的事情。不少考生反映：学习本课程的内容本身似乎不难，难就难在练习题不会做，考试题更难做。做概念题常出错，而且做错了也不知错在那里；做计算题常常是错了又错，计算半天头昏脑胀也得不到正确答案；做综合题常常是无从下手，总之得不到理想的成绩。

本指南旨在帮助广大考生学习《信号与系统》时，理顺思路，掌握本课程的脉络体系；进而在理解物理本质的基础上，掌握基本概念、记住重要公式定理、学会处理各种典型问题的方法；通过实践，逐步掌握选择解题捷径。总之，帮助广大考生深化概念，牢固掌握基础知识、进而提高观察、分析、处理问题的能力，学好、考好本课程。

完成足够数量的练习，多见不同类型的例题，是掌握全书基本理论和分析方法的重要途径。为了帮助广大考生抓住要领、融汇贯通本课的重要知识、学会寻找解题捷径，减少由于缺乏教师面授知识带来的困难，本指南在第一篇里不仅扼要指出了《信号与系统》课程的主要思路和核心内容、重点、难点，还专门设置一章详尽列出了配合课程学习而设置的思考题和练习题解答；在第二篇里不仅精选了大量例题加以评述佐证，还配制了几套自学考试的模拟试卷，供考生自我检查用。对于这些模拟试卷，不仅给出了标准答案，还列出了评分细则，以帮助考生在平时的学习中就有的放矢去做好应试准备，以便答题时分清主次，尽可能获取考试的最好成绩。

《信号与系统》自学考试大纲(重新修订)对本课的性质、设置目的、课程特点、基本要求等都有简明阐述。对课程的内容安排、学时分配，考核重点(包括考核知识点、自学要求、考核重点)以及课程的最主要思路与核心内容都有详尽说明。因此，本指南在书末的附录中原文照登，以利于广大考生在学习本课的过程中时时参考，有针对性的学习。

本指南是作者多年从事《信号与系统》课教学以及参加各种层次、类别考试命题、评卷的实际经验积累。选材上又尽量参照了电子科技大学本专科历届的考题及最近几年四川省自学考试的试卷及辅导文章、试卷分析，因此针对性较强。希望能对广大本、专科学生及自学考

生助学有所脾益。但是，鉴于《信号与系统》课程本身所具有的内容广泛性、困难性，以及作者本身水平的限制，加之成书时间紧迫，错误与不妥之处在所难免，恳请广大读者指正。

本书第一篇由张庆孚执笔，闵大镒执笔第二篇并统编全书。在成稿过程中曾得到陈杰美、任璧荟、郭巍、朱学勇、张朝蔚、蒋绍敏、刘斌的热情帮助；书稿腾写、画图及考题、练习题校对等工作，由刘瑞和、闵永忠、闵小玲同志完成，在此一并致谢。

作　　者

1997 年 2 月于电子科技大学

目　录

第一篇　自学辅导

第一章　主要思路与核心内容

第二章　基本任务、处理方法及重点难点分析

第三章　思考题、练习题解

第二篇　应试指南

第四章　常规题中客观题的解题技巧

第五章　常规题中主观题的解题技巧

第一篇　自学辅导

第一章　主要思路与核心内容

§1.1　最重要的概念和分析方法

《信号与系统》的概念与分析方法很多，但是，最重要的都是围绕着信号在正交信号空间的分解与LTI系统的特征函数这两个最基本的概念来展开的。具体讲，它们包括两个卷积（卷积积分与卷积和）和五个线性变换（付里叶级数变换FST，付里叶积分变换FT，拉普拉斯变换LT，Z变换ZT，以及付氏Z变换FZT），这些就构成了本课的全部内容。

一、信号在正交信号空间的分解

1. 正交信号空间

(1) 矢量 $\overline{V}_1$ 与 $\overline{V}_2$ 正交（垂直）的定义式为

$$\overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2 = V_1 \cdot V_2 \cos\theta = 0 \tag{1.1-1a}$$

类似地，如果实信号 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在时间区间 (t_1, t_2) 上满足关系式

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2(t) dt = 0 \tag{1.1-1b}$$

则称 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 上正交。也即 $f_1(t)$ 中无有 $f_2(t)$ 的分量及 $f_2(t)$ 中无有 $f_1(t)$ 的分量。如果复信号 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在时间区间 (t_1, t_2) 上满足关系式

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} f_1^*(t) f_2(t) dt = 0 \tag{1.1-1c}$$

则称复信号 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 上正交。其中 $f_1^*(t)$、$f_2^*(t)$ 分别是 $f_1(t)$、$f_2(t)$ 的共扼函数。

(2) 矢量 $\overline{V}_1$ 在矢量 $\overline{V}_2$ 中的分量（相对值）C_{12} 的计算式为

$$C_{12} = \frac{V_1 \cos\theta}{V_2} = \frac{V_1 \cdot V_2 \cos\theta}{V_2 \cdot V_2} = \frac{\overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2}{\overline{V}_2 \cdot \overline{V}_2} \tag{1.1-2a}$$

类似地，实信号 $f_1(t)$ 在实信号 $f_2(t)$ 中的分量（相对值）C_{12} 的计算式为

$$C_{12} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cdot f_2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(t) dt} \tag{1.1-2b}$$

复信号 $f_1(t)$ 在复信号 $f_2(t)$ 中的分量

$$C_{12}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\cdot f_2^*(t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty}|f_2(t)|^2dt} \tag{1.1-2c}$$

(3) 正交信号空间

如果实信号(函数)集合$\{f_i(t)\}$中,各信号满足关系式

$$\int_{t_1}^{t_2} f_n(t)\cdot f_m(t)dt=\begin{cases}K, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases} \tag{1.1-3a}$$

且再也找不到一个信号$g(t)$使下式

$$\int_{t_1}^{t_2} f_i(t)\cdot g(t)dt=0$$

成立,则称集合$\{f_i(t)\}$是一个在区间(t_1,t_2)上的完备正交信号集合或正交信号空间。

而如果信号集合$\{f_i(t)\}$是复信号集合,则式(1.1-3a)应换成

$$\int_{t_1}^{t_2} f_n(t)\cdot f_m^*(t)dt=\begin{cases}K, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases} \tag{1.1-3b}$$

2. 信号在正交信号空间的分解

与几何矢量$\bar{V}$可以分解成几何空间(三维空间)中各分量之和,即

$$\bar{V}=x\bar{V}_x+y\bar{V}_y+z\bar{V}_z \tag{1.1-4a}$$

一样,满足一定条件的任何信号$f(t)$都可以分解成正交信号空间$\{g_i(t)\}$中各分量之和,即

$$\begin{aligned}f(t)&=c_1g_1(t)+c_2g_2(t)+\cdots+c_ng_n(t)+\cdots\\&=\sum_{i=1}^{\infty}c_ig_i(t)\end{aligned} \tag{1.1-4b}$$

式(1.1-4b)包含二重意思:① 完备正交函数集合中包含有无穷多个元素,② 式(1.1-4b)是在最小均方误差等于零这个意义上的相等。

譬如,角频率为ω_0的整数倍($n\omega_0$)的正弦、余弦函数集合,$\{\sin\omega_0t,\ \sin2\omega_0t,\ \cdots,\ \sin n\omega_0t,\ \cdots,\ \cos\omega_0t,\ \cos2\omega_0t,\ \cdots\}$加上直流($\cos0t=1$)就是一个完备的的正交函数集合。满足狄里赫利条件的、周期为$T=\frac{2\pi}{\omega_0}$的任何信号$f_T(t)$,就都可以分解成三角函数形式的付里叶级数(FS)。即

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos n\omega_0t+b_n\sin n\omega_0t\} \tag{1.1-5a}$$

同理,角频率为ω_0的整数倍(包括$0\cdot\omega_0=0$)的纯虚数指数函数集合$\{e^{jn\omega_0t}\}$,也是一个完备的正交函数集合。满足狄里赫利条件的周期为$T=\frac{2\pi}{\omega_0}$的任何信号$f_T(t)$,也可分解成指数函数的付里叶级数。即

$$f_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{jn\omega_0t} \tag{1.1-5b}$$

其中,a_n,b_n,F_n(通常也记为$F(n\omega_0)$)分别是$f_T(t)$在$\cos n\omega_0t$,$\sin n\omega_0t$,$e^{jn\omega_0t}$中的分量(相对大小)。利用一个信号在另一个信号中的分量的计算公式(1.1-2),不难把它们分别计算出来。即

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\cos n\omega_0 t, \qquad n = 0 \sim \infty$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\sin n\omega_0 t, \qquad n = 1 \sim \infty \tag{1.1-6a}$$

及

$$F(n\omega_0) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)e^{-jn\omega_0 t}, \qquad n = 0,\pm 1,\pm 2,\cdots \tag{1.1-6b}$$

在周期信号的FS中，指数形式FS最重要。其中，F_n 或 $F(n\omega_0)$ 又叫 $f_T(t)$ 的频谱或付里叶系数。

虽然信号在正交信号空间中的分解是一个十分抽象且证明起来较为困难的概念，而且直接应用这个结论并按式(1.1-5)及(1.1-6)进行实际计算，全本书也只有这一节。但是，这是一个最基本、最有用的概念，读者一定要花一些功夫去掌握它们，至少也要理解它和记忆它(至于严格的数学推导证明则可以不予深究)。并且用这个概念去理解、记忆有关两个卷积和其他四个变换的物理本质。只有这样，才能理解本课的基本思路，掌握全书的脉络体系，进而做到深化概念，融汇贯通所学知识，提高分析处理问题的能力。

3. 非周期连续信号的分解——付里叶变换(FT)

$$f(t) = \lim_{d\omega\to 0}\sum_{\omega=-\infty}^{\infty} F(j\omega)\,\frac{d\omega}{2\pi}e^{j\omega t}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{1.1-7a}$$

其中

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{1.1-7b}$$

$F(j\omega)$ 称为信号 $f(t)$ 的频谱(密度)函数，其量纲为弧度/赫芝，它是信号 $f(t)$ 在各(角)频率 ω 上的相对幅度。

4. 连续信号 $f(t)$ 分解成无时限指数信号 e^{st} 的和——拉普拉斯变换(LT)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds, \qquad \mathrm{Re}(s):(\alpha,\beta) \tag{1.1-8a}$$

其中，

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \qquad \mathrm{Re}(s):(\alpha,\beta) \tag{1.1-8b}$$

$F(s)$ 称为 $f(t)$ 的正拉氏变换，是 $f(t)$ 在 e^{st} 中的分量(相对复频谱密度函数)。关系式 $\sigma=\mathrm{Re}(s):(\alpha,\beta)$ 也可写为 $\alpha<\sigma<\beta$，叫做 $F(s)$ 的收敛区。

从信号在正交信号空间的分解这个角度看问题：反付里叶变换式(1.1-7a)，实现了将 $f(t)$ 分解成沿 $j\omega$ 轴分布的、纯虚数指数信号 $e^{j\omega t}$ 的连续和，$F(j\omega)df=\frac{1}{2\pi}F(j\omega)d\omega$ 正是 $e^{j\omega t}$ 的幅度，$F(j\omega)$ 则是分量 $e^{j\omega t}$ 的频谱密度(函数)，式(1.1-7b)则是 $f(t)$ 在 $e^{j\omega t}$ 中的分量的计算式；反拉氏变换式(1.1-8a)，则实现了将 $f(t)$ 分解成沿收敛区内、任一平行于 $j\omega$ 轴的直线分布的、复指数信号 e^{st} 的连续和，$F(s)df=\frac{1}{2\pi j}F(s)ds$ 正是 e^{st} 的幅度，$F(s)$ 则是分量 e^{st} 的复频谱密度(函数)，式(1.1-8b)则是 $f(t)$ 在 e^{st} 中的分量的计算式。这样来认识FT和LT，就抓

住了问题的实质，掌握了本书的精髓，达到了提高分析处理问题的能力。

5. 离散信号 $f[k]$分解成无时限指数序列 z^k 的连续和——Z 变换(ZT)

$$f[k]=\oint_c \frac{F(z)}{2\pi jz}dz\cdot z^k$$
$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c F(z)z^{k-1}dz,\qquad |z|:(\gamma_a,\gamma_b)\tag{1.1-9a}$$

其中

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f[k]z^{-k},\qquad |z|:(\gamma_a,\gamma_b)\tag{1.1-9b}$$

$F(z)$称为$f[k]$的正 Z 变换，是$f[k]$在 z^k 中的分量，$|z|:(\gamma_a,\gamma_b)$或$\gamma_a<|z|<\gamma_b$ 叫 $F(z)$的收敛区。

一般教科书中，正反 ZT 的定义式是直接由复变函数的罗伦级数展开式硬搬过来的，但 从 ZT 与 LT 的关系中可以 看出上述信号分解的概念。鉴于自学考生没有学过复变函数，所以式(1.1-9)掌握记忆起来都有一定困难。建议考生从信号分解的角度去直接记忆和理解，，这样运用 ZT 去求解系统就可减少困难了。

6. 离散信号 $f[k]$分解成简谐序列 $e^{j\Omega k}$(其中 Ω: $-\pi\sim+\pi$)的连续和——付氏 Z 变换(FZT)

$$f[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(e^{j\Omega})e^{j\Omega k}d\Omega\tag{1.1-10a}$$

其中

$$F(e^{j\Omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f[k]e^{-j\Omega k}\tag{1.1-10b}$$

$F(e^{j\Omega})$称为离散信号 $f[k]$的频谱(密度)函数，是 $f[k]$在(角)频率 Ω 上，$e^{j\Omega k}$的相对幅度。

一般教科书中，对 FZT 只是略有提及。自考大纲中，对 FZT 只要求理解它与 ZT、FT 的关系，即

$$\mathscr{F}\{f[k]\}=\mathscr{Z}\{f[k]\}_{|z|=1}=\mathscr{F}\{f_s(t)\}_{\Omega=\omega T}\tag{1.1-10c}$$

其中，$f_s(t)=f(t)\cdot\delta_T(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)\delta(t-kT)$，$f(t)$是 $f[k]$的包络函数，$|z|=1$ 即 $z=e^{j\Omega}$。

当然，如果考生能从信号分解的角度去理解 FZT，甚至能结合付里叶分析的种种结论加以举一反三(这一点自学考试不会作要求)，必能很顺利地掌握这一对变换(甚至 DFST)，这对今后进一步学习深造(诸如学习数字信号处理、FFT 等知识)都大有脾益。

7. 连续信号 $f(t)$分解为 $\delta(t)$信号的连续和——卷积积分

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=f(t)*\delta(t)\tag{1.1-11a}$$

因为

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$
$$f(t)\delta(t-\tau)=f(\tau)\delta(t-\tau)$$

显然，$f(0)\delta(t)$就是$f(t)$在$\delta(t)$中的分量，$f(\tau)\delta(t-\tau)$就是$f(t)$在$\delta(t-\tau)$中的分量。

8. 离散信号 $f[k]$分解成$\delta[k]$的离散和——卷积和

$$f[k] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} f[p]\delta[k-p] = f[k] * \delta[k] \tag{1.1-11b}$$

因为

$$f[k]\delta[k] = f[0]\delta[k]$$
$$f[k]\delta[k-p] = f[p]\delta[k-p]$$

显然，$f[0]\delta[k]$就是$f[k]$在$\delta[k]$中的分量；$f[p]\delta[k-p]$就是$f[k]$在$\delta[k-p]$中的分量。

一般的教材中，式(1.1-11b)可由$\delta[k]$的定义直观地得到；式(1.1-11a)却很要花一些功夫。对δ-函数的理解(包括定义式及性质)，也是信号与系统课程的一个重要内容。但是，如能从信号分解这一最重要的概念来加以认识，将会有很大的好处。

以上扼要而概括地介绍了最重要的信号分解的概念。从这一基本概念出发，又可引伸出信号的频谱、带宽、收敛区以及两种卷积和五种变换的性质等等重要概念。这些，我们将在本指南的后续章节里再详细介绍。

二、线性时不变(LTI)系统的特征函数

指数函数e^{st}、$e^{skT}(=z^k)$乃是物理可实现的线性时不变(LTI)系统的特征函数。因为，①连续LTI系统对于$\delta(t)$的响应(称为该系统的时域特征描述$h(t)$)是若干指数函数$e^{\lambda_j t}$的组合；② 连续LTI系统$H(p)$对e^{st}的响应是相同的指数函数$H(s)e^{st}$；③ 离散LTI系统对于$\delta[k]$的响应(也称该系统的时域特征描述$h[k]$)也是若干$e^{s_i kT}(=\gamma_i^k)$的组合；④ 离散LTI系统$H(E)$对z^k的响应也是同底的指数函数$H(z)z^k$。

1. $H(p)$对于$\delta(t)$及e^{st}的响应

设LTI连续系统的数学模型(微分方程)为

$$y(t) = H(p)f(t) = \frac{N(p)}{D(p)}f(t) = \sum_{j=1}^{n}\frac{K_j}{p-\lambda_j}f(t) \tag{1.1-12}$$

其中，$H(p)$叫连续系统的转移算符，是(物理可实现)LTI系统数学模型(微积分方程)的另一种简明表达形式，λ_j是系统的特征根，n是系统的阶数。

给定电路、电系统(或网络)，列写$H(p)$是信号与系统课程的基本要求之一。此问题在电路分析基础课程中已基本解决了，本课只是要求更熟练并略加扩展至高阶而已。如图1.1-1a所示系统中，如果用单箭头来示意系统$H(p)$的输入、输出关系，即

$$f(t) \longrightarrow y(t) = H(p)f(t) \tag{1.1-13a}$$

则

$$\delta(t) \longrightarrow h(t) = H(p)\delta(t) \tag{1.1-13b}$$

于是，由式(1.1-12)立即可得物理可实现LTI系统的时域特性表征(单位冲激响应函数)

$$h(t) = \sum_{j=1}^{n} K_j e^{\lambda_j t} u(t) \tag{1.1-13c}$$

式(1.1-13c)说明，系统的单位冲激响应$h(t)$，乃是由系统的特征根λ_j决定的，n项因果指数函数$e^{\lambda_j t}u(t)$之和。

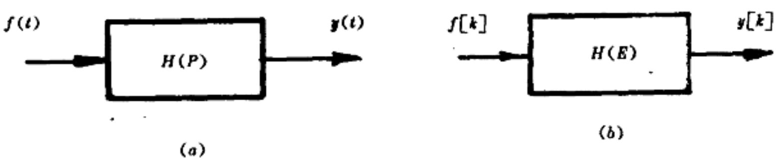

图 1.1-1　LTI 系统的示意方框图

而且

$$e^{jn\omega_0 t} \longrightarrow H(jn\omega_0)e^{jn\omega_0 t} \tag{1.1-13d}$$

$$e^{j\omega t} \longrightarrow H(j\omega)e^{j\omega t} \tag{1.1-13e}$$

其中

$$H(j\omega) = H(p)|_{p=j\omega} \tag{1.1-14a}$$

$$H(jn\omega_0) = H(p)|_{p=jn\omega_0} \tag{1.1-14b}$$

式(1.1-14)成立的条件是

$$\mathrm{Re}(\lambda)_{\max} < 0 \tag{1.1-15a}$$

或

$$h(t) \xleftrightarrow{(\mathrm{FT})} H(j\omega) \tag{1.1-15b}$$

当系统是物理可实现时(即因果系统时)，式(1.1-15a)与(1.1-15b)完全等效(注意：只有因果系统才可以用微分方程描述，所以转移算符 $H(p)$只能用来描述因果系统)；当系统为不可物理实现时(即非因果系统)，式(1.1-15b)更为适用。

以及

$$e^{st} \longrightarrow H(s)e^{st} \tag{1.1-16a}$$

其中

$$H(s) = H(p)|_{p=s} \tag{1.1-16b}$$

式(1.1-16a)成立 的条件是

$$\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\lambda_j)_{\max} \tag{1.1-17a}$$

或

$$h(t) \xleftrightarrow{(\mathrm{LT})} H(s), \qquad \sigma:(\alpha,\beta) \tag{1.1-17b}$$

当系统是物理可实现时，式(1.1-17a)与(1.1-17b)完全等效(这时，$\alpha=\mathrm{Re}(\lambda_j)_{\max}$，$\beta=\infty$)；当系统是物理不可实现时，式(1.1-17$b$)更适用。

上述 $H(j\omega)$、$H(jn\omega_0)$和 $H(s)$分别称为连续系统的频率特性和转移函数(又称系统函数)。$\mathrm{Re}(s)>\mathrm{Re}(\lambda_j)_{\max}$称为信号对系统的主导(支配)条件。

式(1.1-13c)、(1.1-13d)、(1.1-13e)及(1.1-16a)说明：无时限指数函数 e^{st}(其中 $s=\sigma+j\omega$)乃是物理可实现 LTI 连续系统的特征函数。上述公式也正是分析 LTI 连续系统各种方法的出发点。

2. $H(E)$对于 $\delta[k]$及 $z^k(=e^{sTk})$的响应

设 LTI 离散系统的数学模型(差分方程)为

$$y[k] = H(E)f[k]$$

$$=\frac{N(E)}{D(E)}f[k]=\sum_{j=1}^{n}\frac{K_jE}{E-\gamma_j}f[k] \tag{1.1-18}$$

其中,$H(E)$叫离散系统的转移算符,是LTI离散系统数学模型(递归差分方程)的另一种简明表达形式,γ_j是系统的特征根,n是系统的阶数。给定离散系统的方框图,$H(E)$可直接运用梅森规则得出;如果文字描述的离散系统,建立差分方程时切忌照题意递推,而应从未知序列$y[k]$、$y[k-1]$、…(甚至$y[k+1]$)的关系去入手(具体举例稍后进行)。如图1.1-1(b)所示系统中,仍以单箭头表示系统$H(E)$的入、出关系,即

若
$$f[k]\longrightarrow y[k]=H(E)f[k] \tag{1.1-19a}$$
则
$$\delta[k]\longrightarrow h[k]=H(E)\delta[k] \tag{1.1-19b}$$

于是,由式(1.1-18)可直接得出离散系统的单位数字冲激响应

$$h[k]=\sum_{j=1}^{n}K_j\gamma_j^k u[k] \tag{1.1-19c}$$

式(1.1-19c)说明,与连续系统一样,离散系统的单位数字冲激响应(也称系统的时域特性)$h[k]$,也是由系统的特征根γ_j决定的,n项指数函数$\gamma_j^k u[k]$之和。

$h(t)$与$h[k]$都是LTI系统的时域特征量,它们和系统的转移算符$H(p)$与$H(E)$,系统的频率特性$H(j\omega)$与$H(e^{j\Omega})$,系统的转移函数$H(s)$与$H(z)$等,都可用来唯一地描述某一确定系统;彼此也不难转移(以后再详述)。

同样,

$$z^k\longrightarrow H(z)z^k \tag{1.1-19d}$$

其中
$$H(z)=H(E)|_{E=z} \tag{1.1-19e}$$

式(1.1-19d)成立的条件是

$$|z|>|\gamma_j|_{\max} \tag{1.1-19f}$$

或

$$h[k]\xleftrightarrow{(\mathrm{ZT})}H(z),\qquad |z|:(\gamma_a,\gamma_b) \tag{1.1-19g}$$

当系统的转移算符$H(E)$为有理分式时(即$H(E)=\frac{b_mE^m+b_{m-1}E^{m-1}+\cdots+b_0}{E^n+a_{n-1}E^{n-1}+\cdots+a_0}$),式(1.1-19$e$)与(1.1-19$g$)完全等效(此时$\gamma_a=|\gamma_j|_{\max}$,$\gamma_b=\infty$);当系统不能用差分方程描述时,式(1.1-19$g$)更有用。

同理,很容易推演出

$$e^{j\Omega k}\longrightarrow H(e^{j\Omega})e^{j\Omega k} \tag{1.1-20a}$$

其中
$$H(e^{j\Omega})=H(E)|_{E=e^{j\Omega}} \tag{1.1-20b}$$

或
$$=\mathscr{F}\{h[k]\} \tag{1.1-20c}$$

式(1.1-20b)成立的条件是$|\gamma_j|_{\max}<1$,式(1.1-20c)成立的条件是$h[k]$的FZT存在。

$H(z)$和$H(e^{j\Omega})$分别称为离散系统的转移函数和频率特性。

三、LTI系统的分析方法

信号在正交信号空间的分解与系统的特征函数这两个重要概念相结合,便产生出《信号与系统》课程的各种各样的分析方法。譬如

1. 卷积(时域)分析法

式(1.1-11a)与式(1.1-13b)相结合,产生出LTI连续系统的卷积积分分析法。即

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau=f(t)*h(t) \qquad (1.1\text{-}21a)$$

式(1.1-11b)与式(1.1-19b)相结合,产生出LTI离散系统的卷积和分析法。即

$$y[k]=\sum_{p=-\infty}^{\infty}f[p]h[k-p]=f[k]*h[k] \qquad (1.1\text{-}21b)$$

2. 频域(付里叶)分析法

式(1.1-5b)与式(1.1-13d)相结合,产生出LTI连续系统的付里叶级数分析法。即

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_0)H(jn\omega_0)e^{jn\omega_0 t} \qquad (1.1\text{-}22a)$$

或

$$y(t)=\frac{A_0}{2}H(0)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n|H(jn\omega_0)|\cos(n\omega_0 t+\varphi_n+\angle H(jn\omega_0)) \qquad (1.1\text{-}22b)$$

其中,

$$A_0=a_0,\quad A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\quad \varphi_n=\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \qquad (1.1\text{-}22c)$$

而式(1.1-7a)与式(1.1-13e)相结合,则产生出LTI连续系统的付里叶积分(变换)分析法。即

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega =\mathscr{F}^{-1}\{F(j\omega)H(j\omega)\} \qquad (1.1\text{-}23a)$$

如果加以推演,则式(1.1-10a)与式(1.1-20a)相结合,必将产生出LTI离散系统的付里叶分析法。即

$$y[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})e^{j\Omega k}d\Omega =\mathscr{F}^{-1}\{F(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})\} \qquad (1.1\text{-}23b)$$

当然,本课对式(1.1-23b)没有要求。但如能理解这一概念,对今后其他专业课的学习是大有好处的。

3. 复频域、Z域分析法

式(1.1-8a)与式(1.1-16a)相结合,产生出LTI连续系统的复频域分析法。即

$$y(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)H(s)e^{st}ds =\mathscr{L}^{-1}\{F(s)H(s)\} \qquad (1.1\text{-}24a)$$

式(1.1-24a)中,变量s的选择应在$F(s)$与$H(s)$的公共收敛区内。

式(1.1-9a)与式(1.1-19d)相结合,产生出LTI离散系统的Z域分析法。即

$$y[k]=\frac{1}{2\pi j}\oint_c F(z)H(z)z^{k-1}dz$$
$$=\mathscr{Z}^{-1}\{F(z)H(z)\} \qquad (1.1\text{-}24b)$$

其中变量 z 也应选择在 $F(z)$ 与 $H(z)$ 的公共收敛区内。

应当特别注意 LTI 系统各种分析方法互相转换的条件及各自特别适用的场合。譬如，一个系统的数学模型 $H(p)$、$H(E)$ 与其时域特征(特性) $h(t)$、$h[k]$，及频域特征 $H(j\omega)$、$H(e^{j\Omega})$，及复频域(Z 域)特征 $H(s)$、$H(z)$ 之间的关系和相互转换条件。是

$$H(j\omega)=\mathscr{F}\{h(t)\}=H(p)_{p=j\omega}$$
$$条件：\mathrm{Re}(\lambda_j)_{\max}<0 \qquad (稳定系统)$$
$$H(s)=\mathscr{L}\{h(t)\}=H(p)_{|p=s}$$
$$条件：\mathrm{Re}(s)=\sigma>\mathrm{Re}(\lambda_j)_{\max} \qquad (因果系统)$$

及

$$H(e^{j\Omega})=\mathscr{F}\{h[k]\}=H(E)_{|E=e^{j\Omega}}$$
$$条件：|\gamma_j|_{\max}<1 \qquad (稳定系统)$$
$$H(z)=\mathscr{Z}\{h[k]\}=H(E)_{|E=z}$$
$$条件：|z|>|\gamma_j|_{\max} \qquad (物理可实现系统)$$

及 $h(t)=H(p)\delta(t)$，$h[k]=H(E)\delta[k]$ 等等。

§1.2 应熟记的基本公式、定理

《信号与系统》课程要求记忆的公式定理较多，尤其围绕两种卷积与五个变换对方面的公式定理最重要。其中相当部分都应该在理解物理意义的基础上加以记忆，并会灵活运用它们去求解问题。

一、$\delta(t)$、$\delta[k]$ 的定义与性质

1. 筛选性质

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta(t)dt=f(0) \qquad (1.2\text{-}1a)$$

其中，$t_1<0<t_2$，且 $f(t)$ 在 $t=0$ 处连续。

因此
$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t) \qquad (1.2\text{-}1b)$$

条件：$f(t)$ 在 $t=0$ 处连续且在 $t:(-\infty,\infty)$ 有界。

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} f[k]\delta[k]=f[0] \qquad (1.2\text{-}1c)$$

$$f[k]\delta[k]=f[0]\delta[k] \qquad (1.2\text{-}1d)$$

条件 $N_1<0<N_2$。

2. 时移性质

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta(t-t_0)dt=\begin{cases} f(t_0), & t_1<t_2 \\ 0, & 其他 \end{cases} \qquad (1.2\text{-}2a)$$

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0) \tag{1.2-2b}$$

$$f[k]\delta[k-k_0]=f[k_0]\delta[k-k_0] \tag{1.2-2c}$$

3. 尺度性质

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t) \tag{1.2-3a}$$

因此

$$\delta(-t)=\delta(t) \tag{1.2-3b}$$

$$\delta[-k]=\delta[k]=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases} \tag{1.2-3c}$$

4. 微分积分性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t)dt=(-1)^n f^{(n)}(0) \tag{1.2-4a}$$

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{1.2-4b}$$

因此

$$\frac{du(t)}{dt}=\delta(t) \tag{1.2-4c}$$

$$u[k]=\sum_{p=-\infty}^{0}\delta[k+p]=\sum_{p=0}^{\infty}\delta[k-p]$$

$$\delta[k]=u[k]-u[k-1]=u[-k]-u[-k-1]$$

$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$ 等等。

二、卷积的性质

1. 卷积的代数运算规则

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t) \tag{1.2-5a}$$

$$f_1(t)*\{f_2(t)+f_3(t)\}=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t) \tag{1.2-5b}$$

$$f_1(t)*f_2(t)*f_3(t)=f_1(t)*f_3(t)*f_2(t)$$

$$=f_3(t)*f_2(t)*f_1(t) \text{ 等等} \tag{1.2-5c}$$

式(1.2-5a)、式((1.2-5b)成立是绝对的，式(1.2-5c)成立有条件，即必须参予相卷积的任二函数的卷积存在。

2. 卷积的微分(与左移)

$$P\{f_1(t)*f_2(t)\}=Pf_1(t)*f_2(t)=f_1(t)*Pf_2(t) \tag{1.2-6a}$$

类似地

$$E\{f_1[k]*f_2[k]\}=Ef_1[k]*f_2[k]=f_1[k]*Ef_2[k] \tag{1.2-6b}$$

3. 卷积的积分(与右移)

$$\frac{1}{p}\{f_1(t)*f_2(t)\}=\frac{1}{p}f_1(t)*f_2(t)$$