机构概率设计

(以色列) B.Z.桑德勒 著

科学出版社

内 容 简 介

本书是一本用概率理论研究机构运动学和动力学的专著，以解决考虑随机因素的机构运动、动力设计问题为主，并结合各种基本机构，给出了其运动精度和动力精度的计算式，而且通过对机构运动副间隙的研究，对运动学和动力学问题提出了线性和非线性的处理方法.

内容可分为三大部分：为便于工程技术人员掌握，深入浅出地介绍了概率论的基本内容；讨论了在连杆、凸轮、齿轮等机构的运动学和动力学的概率设计方法；讨论并建立了与自适应机构有关的振动自动控制方面的问题.

本书对于从事机械精度、精密机械、机床振动自动控制等方面的科技人员是一本很好的参考书，可作为机械类专业高年级学生和研究生的教材，也可供从事工程概率设计的科技人员、教师、研究生参考.

B. Z. Sandler
PROBABILISTIC APPROACH
TO MECHANISMS
Elsevier, 1984

机构概率设计

〔以色列〕B. Z. 桑德勒 著
马培荪 马 烈 译
张耀芳 校
责任编辑 杨家福

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1991年5月第 一 版 开本：787×1092 1/32
1991年5月第一次印刷 印张：10
印数：0001—2 000 字数：223 000

ISBN 7-03-001953-9/TH·14

定价：8.90 元

译 者 的 话

概率工程设计是可靠性工程的一个分支，是60年代中期发展起来的新兴学科，它是将概率统计理论应用于工程设计的一种现代设计方法．这种设计方法不仅能解决过去传统设计方法所不能处理的一些问题，而且能有效地提高机械的综合性能指标．这种设计方法因为应用简便，易于数表化，且便于应用计算机处理，所以近30年来在工程设计的各个领域已获得广泛应用，显示出巨大的生命力，并正在逐步替代传统的设计方法．

在机械向高速、精密化发展以及工业生产向大规模、自动化发展的过程中，机构的运动精度和动力精度问题日益突出，它对产品质量、寿命、制造成本等方面的影响受到人们普遍的重视，人们也迫切需要掌握有关这方面的理论与设计方法，以指导实践．B. Z. 桑德勒所撰写的这本书就是用概率设计方法研究机构运动学和动力学的专著．自70年代以来，用概率理论研究机构学的文章逐渐增多，但像本书这样系统地、较全面地介绍机构概率设计的著作则尚未见到．在我国，这个领域的研究还刚刚起步，近年来为了提高产品质量，降低成本，选择最佳参数等，机构概率设计才引起有关科研单位、高等院校和工厂的重视．

目前人们已经认识到，整个科技领域在理论上归根到底是以实验概率的概念为基础的，传统的设计方法已不再适应这个现实．但是，至今对于一些由于工程问题的概率性而出现的许多现象，人们还不能作出满意的解释，而且概率统计的

设计理论和方法还有待深入研究，在某些基础学科方面还没有发展到可以加以引用的阶段．为此，特把本书介绍给读者，以激发广大科技工作者对这个领域的兴趣，这必将有助于概率论在机械系统分析和综合方面的应用．

为了使广大工程技术人员较易掌握有关内容，本书首先深入浅出地介绍了概率的基本内容，随后几章讨论连杆、凸轮、齿轮等机构的运动学和动力学的概率设计方法．遗憾的是，本书未对空间机构的运动学和动力学问题作任何介绍，另外，也缺少对机构各种组合形式的运动、动力问题进行概率分析与综合．这些都有待人们做大量的研究工作加以完善和充实．本书的最后一章提出了采用自适应机构控制的有害和有用振动的方法．

译者曾利用本书的第二、三、四章为研究生开课，并对书中的重要公式作了推导．对于原书存在的差错，译者作了订正．马烈翻译了本书的第一、二、三、四章．裘惠薇负责译稿的抄写工作，在此深表谢意．尽管我们对译文作了很大努力，但由于水平有限，错误和不当之处仍在所难免，诚恳希望读者惠予指正，亦望专家不吝赐教．

马培荪

序

概率是用于处理实验数据和计算数据的强有力工具. 正因为如此,一百多年来,它在许多科学和技术领域被用来估算实验结果和计算结果的可靠性.

过去的三四十年中,由于随机函数理论的发展,特别是N. 威纳(Wiener)和A. 柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)对此所作的贡献,经典的概率论更具有生命力. 随机函数理论是控制论的最核心部分,最初它是为了满足自动控制理论以及优化的需要而建立的. 以后,特别在60年代,随着导弹和空间研究时代的开始,随机函数才被应用于与刚体和薄壳的机械振动有关的问题.

在那个时期,概率论几乎从不用于机构运动学和动力学的研究. 相反,对于存在有随机因素的场合却大量采用非随机的方法来加以处理. 例如,连杆机构、凸轮机构或齿轮机构中的精度问题,通常通过假定其误差的形状、频率或性质为确定的,从而被简化成通用的经典形式.

经典的非随机的分析和综合的方法是有吸引力的,因为它们至少在原理上能够提供完整的数值解. 另一方面,在某些情况下统计方法可以缩短计算过程,因为这种方法本来就不一定需要完整的信息.

尽管人们为完善非随机的计算方法已做了大量工作,并且取得了辉煌成果,但是对于某些问题应用概率方法是卓有成效的. 这些问题包括:第一,估计随机因素对机构动作的影响;第二,随机过程的谱理论能够有效地应用于估算机械系统

的动力学性能；第三，使用概率有时可无需使用标准模型；最后，采用概率方法能够有效地用于研究高副机构（如凸轮机构和齿轮机构等），而常规的非随机方法对于这种机构实际上无法应用（例如，本书显示了随机函数理论如何应用于由凸轮廓线和齿轮周节的随机误差所引起的问题）．总之，处理机构运动精度和动力精度这样的问题时需要用到随机函数和概率理论．

本书也讨论了概率论在工程技术上的另外一些用途，如用于气动的机构和液动的机构以及滚动轴承等．对于运动学和动力学问题，书中提出了线性和非线性两种处理方法．本书讨论了所述机构的分析和综合这两方面问题（综合问题指的是符合一定准则的系统最优化）．所提出的方法表明，随机函数理论的频谱概念是用于优化综合方法的有力工具，甚至当激振为确定时也是如此．

优化问题引导作者考虑到建立自适应机构的可能性，也就是使机械系统的传递函数能自动适应随机变化的激振的可能性．讨论并说明了一些振动自动控制的实例．

由于有可能从众多的现象中获得可靠的结果，从而促进了一种测量技术的发展．这种测量技术与传统测量方法的本质区别，在于它不需要标准模版，是通过被测件之间的比较得到统计特性，再经过处理便可获得测量结果．本书给出了这种概率方法的一些应用实例．

本书共七章．第一章讨论概率理论和随机函数理论，熟悉这方面内容的读者可不必阅读本章．第二章介绍机构运动学和动力学的一般概念，以及主要的通用关系式和误差的转换．第三章和第四章分别讨论凸轮机构和齿轮机构的运动精度和动力精度的问题．在第五章中，我们研究非线性运动学和动力学问题，重点在于讨论游隙对机构运动的影响．第六

章是有关统计学在气动、液动和带传动机构中的一些应用.最后，第七章讨论与建立自适应机构有关的振动自动控制方面的问题.

B. Z. 桑德勒

目　录

第一章　概率基本知识

1.1　引　　言

本章叙述读者在本书中将要用到的概率论的主要概念和定义. 我们并不希望以此来代替概率论的起码的基本认识, 我们的目的只在于帮助读者熟悉本书中常用的一些名词术语和公式, 使读者重温学过的知识, 而不是重新学习它们. 在本书中人们可以看到它有时并没有严格遵循合乎逻辑的顺序, 其原因是为了简化对名词术语的说明, 所以有时候先讨论概念, 然后才给出它们的定义.

本章主要讨论两方面内容:

(1) 随机变量(1.2～1.24 节);

(2) 随机函数(1.25～1.37 节).

1.2　随机变量

变量就是没有事先给定数值的量, 通常定义为随机变量. 一般, 随机变量在一定的范围内变化, 每个数值(对于离散型变量) 或一组确定的数值 (对于连续型变量) 都有确定的概率相对应.

例如:

(1) 机器零件的真实尺寸与设计图中所标注的名义值之间的偏差.

(2) 在某一特定时刻，凸轮从动杆的加速度与设计值之间的偏差.

现在我们给出一些定义，每一个定义将用实例予以说明.

(1) 随机事件(RE).

例如在指定的一个周期中，零件或发生断裂或不发生断裂.

(2) 离散型随机变量(DRV).

例如在闭合过程中，继电器触头反弹的次数.

(3) 连续型随机变量(CRV).

例如齿轮轮齿的厚度.

(4) 随机函数(RF).

例如凸轮廓线，球轴承的滚道.

(5) 随机变量的函数(FRV).

例如作为凸轮转角函数的凸轮从动杆的运动.

1.3 事　　件

“事件”的概念与随机变量和概率紧密相关.

在机械方面，事件的实例有：

(1) 加速度超过某一允许值；

(2) 机器零件破损或未破损；

(3) 球轴承中的某一个指定的球碰到了推力轴承的上环；

(4) 齿轮的一个轮齿上出现了裂缝.

事件是在一次试验结果中可能出现也可能不出现的现象. 例如，出现一个比预定尺寸大的零件是一个事件. 我们可以用数字来表达一个“事件”.

现在，我们列出如下一组定义：

不可能事件——一定不可能发生的事件；不可能事件发生的概率 $P=0$.

必然事件或真实事件——必然会发生的事件；必然事件发生的概率 $P=1$.

完整事件组——一组事件在试验结果中其中之一必然发生；事件组中某一个事件发生的概率 $P=1$.

互斥事件(互不相容事件)——不可能同时发生的事件；如果 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ 分别为这些事件的概率，那么其中一个事件将发生的概率 P 为

$$P=P_1+P_2+\cdots+P_n$$

应当强调的是，所有可能结果的概率之和始终等于1.

非互斥事件——能够单独发生和同时发生的事件；在这种情况下，出现事件 A 或 B 的概率可用下式表示：

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

式中，AB——两个事件同时出现.

独立事件——不依赖其它事件而发生的事件；如果 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$ 是独立事件的概率，那么，在一次试验中，所有这些事件同时发生的概率 P 为

$$P=P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdot\cdots\cdot P_n$$

非独立事件——一事件的发生依赖于它相对其它事件的状态；这里，必须介绍一下条件概率的概念. 如果 P'_1 为第一个事件发生的概率，$P'_2, P'_3, \cdots, P'_n$ 为以后的第 2, 3, …, n 个事件发生的条件概率，那么所有后继事件以指定顺序发生的概率 P 为

$$P=P'_1\cdot P'_2\cdot P'_3\cdot\cdots\cdot P'_n$$

1.4 概　　率

通常，我们把概率定义为在试验或测量中，成功结果占所

有可能结果的比率，即

$$P=\frac{N_s}{N_T}$$

式中，N_s 为成功的次数，N_T 为所有各种结果的数目或试验的次数．如上所述，不可能事件的概率等于零，必然事件的概率等于1．

因此，下式成立：

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

式中，$P(A)$为某一结果的概率．

1.5 分　　布

随机变量的分布描述了变量的特性，它把变量的值与它们各自的概率联系起来．

1.6 离散型变量的分布

用累积分布函数(CDF)能更好地描述随机变量．函数 $F(x)$描述 X 小于或等于规定值 x 的概率

$$F(x)=P(X\leqslant x)$$

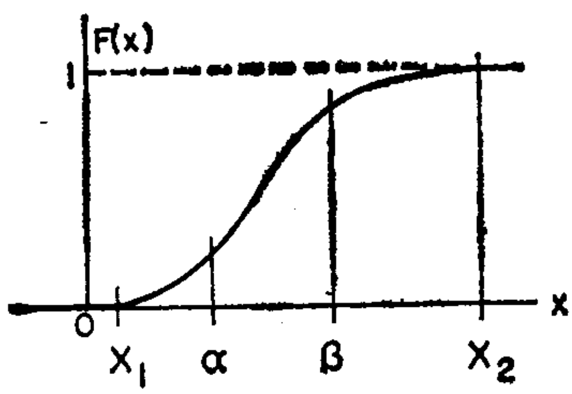

图 1.1　典型累积分布函数

如果随机变量 X 的变化范围为 x_1 至 x_2，那么对于

$X<x_1$，有

$F(x)=0$ 对于

$X>x_2$，有

$F(x)=1$

图 1.1 显示了一典型的累积分布函数(CDF)．在实际问题中常常要求回答这样的问题：随机值落在区间 α 至 β 内($\alpha\leqslant X<\beta$)的概率是多少？也

就是，我们要求概率 $P(\alpha\leqslant X<\beta)$。

对于下述事件，我们规定：

对事件 A $X<\beta$

对事件 B $X<\alpha$

对事件 C $\alpha\leqslant X<\beta$

考虑到 $A=B+C$，我们可以写出

$$\left.\begin{aligned}&P(X<\beta)=P(X<\alpha)+P(\alpha\leqslant X<\beta)\\ \text{或}\quad&\\&P(\alpha\leqslant X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)\end{aligned}\right\}\quad(1.6.1)$$

随机值落在给定区间内的概率等于这个区间内分布函数的增量.

如果 $\alpha\rightarrow\beta$，我们便得到概率 $P(X=\beta)$．由方程(1.6.1)可知，只有当分布函数 F 在点 β 有跃变时，我们才得到概率 $(X=\beta)$ 的结果，其值等于分布函数在该点的跃变量.

显然，如果分布函数在点 β 是连续的，那么

$$P(X=\beta)=0.$$

连续型随机变量的任何单独的定值发生的概率等于零.

1.7 连续型变量的分布

为了计算概率 $P(x\leqslant X<x+\Delta x)$，根据方程(1.6.1)可写出

$$P(x\leqslant X<x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x)$$

然后，我们把分布函数的导数表示成

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x)$$

这个新函数称为概率密度函数(PDF)。为了计算 $P(x_1\leqslant X<x_2)$ 的值，我们写出

$$P(x_1 \leqslant X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \qquad (1.7.1)$$

$f(x)$的主要特性是:

(1) $f(x) \geqslant 0$, 即概率密度函数总为非负;

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, 即由 x 轴限制的函数下面的面积等于1.

1.8 期望值、平均值或均值

一个被测的特定物理量的均值是这样得到的, 即用许多个测量值加起来, 并用测量次数之和 n 去除. 假定 $N_1, \cdots, N_n$ 为所测得的一组值, 于是我们得到

$$E(N) = E_N = \overline{N} = \frac{\sum_{1}^{n} N_i}{n} \qquad (1.8.1)$$

式中, E 是期望值.

(1) 对于具有分布函数 $F(x)$ (此分布函数定义了每个 x_i 相应的概率 P_i) 的离散型变量 $x_i (i=1, \cdots, n)$, 其均值

$$E(X) = \overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i \qquad (1.8.2)$$

(2) 对于在 α, β 范围内具有密度函数 $f(x)$ 的连续型变量 X, 期望值的形式为

$$E(X) = \overline{X} = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x)\,dx \qquad (1.8.3)$$

数学期望可以定义为随机变量的一阶矩, 而 s 阶矩则定义为

$$M_s(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^s P_i \quad \text{适用于离散型变量}$$

和

$$M_s(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)\,dx \quad \text{适用于连续型变量}$$

对于随机函数 $X(t)$（见 1.25～1.37 节），其均值或期望值也可如下表示：

$$E(X)=\bar{x}=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt \tag{1.8.4}$$

式中，t 为时间.

显然，若变量不是时间，而是其它参量，表达式的形式仍不变．例如，对于随机函数 $Y(x)$，我们有

$$E(Y)=\bar{y}=\frac{1}{x}\int_0^x y(u)\,du \tag{1.8.5}$$

在本书中，我们将同时使用 E 和"－"来描述随机变量的期望值（或平均值或均值）．期望值的主要特性是

(1) 线性，即和的期望值等于期望值之和．因此，

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]=\sum_{i=1}^{n} E(x_i) \tag{1.8.6}$$

和

$$E[aX]=aE(X) \tag{1.8.7}$$

式中，a 为常数.

(2) 常数值的数学期望等于常数值本身，即

$$E[C]=C \text{ 和 } E(\bar{x})=\bar{x} \tag{1.8.8}$$

如果随机变量的均值等于零，则称为中心化随机变量．因此，

$$\mathring{X}=X-\bar{x} \tag{1.8.9}$$

式中，$\mathring{X}$——中心化随机变量；

X——随机变量；

$\bar{x}$——随机变量 x 的均值.

显然，

$$E[\mathring{X}]=0 \tag{1.8.10}$$

1.9 方　　差

描述随机变量偏离均值（平均值）的特性参数称为方差