工科硕士研究生数学用书

工程中的矩阵理论

丁学仁　蔡高厅　编

$$\begin{pmatrix} \frac{da_{11}(t)}{dt} & & 0 \\ & \frac{da_{22}(t)}{dt} & \\ 0 & \ddots & \frac{da_{nn}(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

天津大学出版社

工程中的矩阵理论

丁学仁　蔡高斤编

*

天津大学出版社出版
(天津大学内)
天津大学出版社印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行

*

开本：850×1168 毫米 1/32 印张：10 13/16 字数：280 千字
1988 年 9 月第二版　　1988 年 9 月第一次印刷
印数：1—6000
ISBN 7-5618-0067-3
O·6
定价：2.15元

原 版 前 言

用矩阵的理论和方法处理现代工程技术中的各种问题已越来越普遍．在工程技术中引进矩阵理论不仅使工程理论的表达极为简洁，而且对理论实质的刻划也更为深刻．这一点已被越来越多的科技教育工作者和科技实践者所认识．特别是由于计算机和计算方法的普及和发展，不仅为矩阵理论的应用开辟了广阔的前景，也使工程技术的研究发生了新的变化，开拓了崭新的研究途径．例如系统工程、优化方法、稳定性理论等，无不与矩阵理论有着紧密的联系．因此矩阵理论和方法是研究现代工程技术的数学基础．古典的线性代数理论已不能满足现代工程技术的需要．我们在大学本科工程数学《线性代数》的基础上，结合各学科研究生教学和科研工作的需要，在较短的教学时间内，精选了教学内容，编写出此书作为工科研究生的数学选修课主要参考教材．本书出版之前曾印成讲义，在天津大学硕士研究生数学选修课的教学中试讲过三年．此次出版，根据有关方面的意见和研究生的实际需要又进行了修改．

本书的主要内容可以分成两部分，第一部分包括第一章和第二章，这一部分是作为本科工程数学《线性代数》内容的衔接，为学习第二部分打下必要的基础．第二部分包括第三、四、五、六章内容，这一部分是考虑到当前各工程学科研究生的实际需要而选择的，同时也为读者今后进一步发展的需要打下必要的基础．

考虑到本书的主要教学对象是工科研究生，教学时数有限，因此着重于介绍一些基本概念、基本理论和基本方法，至于理论证明和推导的严密性则不过于苛求，只要读者能正确理解基本概念，掌握基本理论，熟练地使用基本方法即达目的．

本书在编写过程中，承蒙张敬如教授和李恩波教授审核，提

出了许多宝贵意见和建议，并得到天津大学研究生院的大力支持和帮助，谨此致谢。此外，对本书所参考的文献和资料的作者也一并致谢。

编者水平有限，经验不足，对于书中的谬误和不当之处，如蒙赐教，不胜感谢。

编　者

1985年1月于天津大学

再 版 说 明

《工程中的矩阵理论》一书于一九八五年九月第一次出版以来，得到有关方面的关怀和支持，许多读者和院校对本书的需求颇为殷切，现由天津大学出版社予以再版.

这次再版作了以下修改工作.

对某些定理的证明作了修改，给出了较为简洁的证明方法，同时删去了用处不大的个别定理，使内容更为紧凑．例如Hermite二次型标准形的讨论扩展到一般正规矩阵的标准形，而把Hermite矩阵作为正规矩阵的一种特例，使矩阵标准形的讨论更具一般性.

增加了新的内容．如在第一章增加了有理分式矩阵的内容．以便在读者掌握了多项式矩阵的理论后，很自然地可以推广到有理分式矩阵．在控制论中研究线性系统的传递函数时它占有重要的地位．第四章增加了矩阵关于矩阵的微分法，第五章增加了三对角矩阵的特征值的估计，第六章增加了矩阵的奇值分解等内容，使全书更为丰富实用．

对原书中不必要的练习题予以删去，确实需要而又较难的练习题这次再版仍给出适当的提示，供读者参考，以减少初学者的困难．书中带有*号的内容初学者可以不读，教学时数不够时可以不讲，不影响后面内容的继续学习．

本书第一次出版以来得到兄弟院校的热情关怀和支持，给我们提出一些有益的建议和意见，对此表示衷心的感谢．

由于学识水平所限，虽经修改，但书中不妥之处一定不少，望广大读者斧正．

编 者

1987年 9月

目　　录

第一章　多项式矩阵与矩阵的标准形

一般线性代数中所讨论的矩阵，都是以常数（或以字母代表数）为元素的矩阵，通常称为数字矩阵。但是许多工程实际问题化为数学问题时，往往会遇到以某个变量的函数做元素的矩阵，本章将研究在工程中应用比较广泛的以单变量多项式做元素的矩阵，习惯上把这种矩阵称为多项式矩阵。多项式矩阵的一些概念与数字矩阵对应的概念基本相同，但也有一些新的概念和理论，对于相同的问题本章不多加详述，重点讨论那些新的概念和理论，并利用它们，进一步研究数字矩阵，得出一些新的结论。

第一节　多项式矩阵

为了便于讨论多项式矩阵，本节先简要介绍单变量 λ 的多项式的有关概念和运算法则。

设 F 为一数域，$a_k \in F$ $(k=0,1,2,\cdots,s)$，λ 为一变量，数学表达式

$$a(\lambda)=a_s\lambda^s+a_{s-1}\lambda^{s-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=\sum_{k=0}^{s}a_k\lambda^k$$

称为变量 λ 的多项式。系数 a_k $(k=0,1,2,\cdots,s)$ 属于数域 F 的多项式的全体，记为 $F[\lambda]$。复系数多项式的全体记为 $C[\lambda]$，实系数多项式的全体记为 $R[\lambda]$.

当系数 $a_s\neq 0$ 时，称 $a(\lambda)$ 为 s 次多项式，并记为 $\deg[a(\lambda)]=s$，$a_s\lambda^s$ 称为多项式 $a(\lambda)$ 的首项。又当 $a_s=1$ 时，称 $a(\lambda)$ 为 s 次的首一多项式。系数全都是零的多项式称为零多项式，并记为 0。对零多项式不定义次数。要特别注意零多项式与零次多项式的区别。

对 $F[\lambda]$ 中的两个多项式

$$a(\lambda)=\sum_{k=0}^{m}a_k\lambda^k,\quad b(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}b_k\lambda^k$$

如果满足：

（1） $m=n$,

（2） $a_k=b_k\ (k=0,1,2,\cdots,m)$,

则称多项式$a(\lambda)$与多项式$b(\lambda)$相等，并记为$a(\lambda)=b(\lambda)$.

对多项式$a(\lambda)$与$b(\lambda)$（不妨设$m\geqslant n$）可以定义以下运算：

（1） 加法

$$a(\lambda)+b(\lambda)=c(\lambda)=c_m\lambda^m+c_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+c_1\lambda+c_0$$

其中系数$c_k=a_k+b_k(k=0,1,2,\cdots,m)$，对$b_k$规定

$$b_{n+1}=b_{n+2}=\cdots=b_m=0\ .$$

（2） 数乘多项式

$$\mu a(\lambda)=d(\lambda)=d_m\lambda^m+d_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+d_1\lambda+d_0$$

其中 $\mu\in F$，$d_k=\mu a_k(k=0,1,2,\cdots,m)$。

（3） 乘法

$$a(\lambda)b(\lambda)=e(\lambda)=e_{m+n}\lambda^{m+n}+e_{m+n-1}\lambda^{m+n-1}+\cdots+e_1\lambda+e_0$$

其中

$$e_k=a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_1b_{k-1}+a_0b_k,\quad (k=0,1,\cdots,m+n)$$

对a_k规定

$$a_{m+1}=a_{m+2}=\cdots=a_{m+n}=0$$

对b_k规定

$$b_{n+1}=b_{n+2}=\cdots=b_{m+n}=0$$

根据上述运算定义，这些多项式的次数有以下关系

$$\deg[a(\lambda)+b(\lambda)]=\max\{\deg[a(\lambda)],\deg[b(\lambda)]\},$$

$$\deg[\mu a(\lambda)]=\deg[a(\lambda)],\quad(\mu\neq 0)$$

$$\deg[a(\lambda)b(\lambda)]=\deg[a(\lambda)]+\deg[b(\lambda)].$$

不难验证多项式的这些运算与数的对应运算有相同的运算规律。

本章要研究的多项式矩阵是以数域F上的一个变量λ的多项式做元素的矩阵，亦简称为λ-矩阵。一个m行n列的多项式矩阵表示为

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

其中$a_{ij}(\lambda)\in F[\lambda]$，$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$。元素是$F[\lambda]$中多项式的$m$行$n$列多项式矩阵的全体，记为$F[\lambda]^{m\times n}$，类似地，元素是$C[\lambda]$中多项式的$m$行$n$列多项式矩阵的全体，记为$C[\lambda]^{m\times n}$，而$R[\lambda]^{m\times n}$表示元素是$R[\lambda]$中多项式的$m$行$n$列多项式矩阵的全体。

任意一个复数μ可以视作零次多项式（$\mu\neq0$时），或零多项式（$\mu=0$时），因此通常的数字矩阵也就包含在多项式矩阵中。为了方便，以后用A，B，…表示数字矩阵，用$A(\lambda)$，$B(\lambda)$，…表示多项式矩阵。

由于多项式的加法，数乘多项式，多项式乘法与数的对应运算有完全相同的运算规律，而矩阵的加法，数乘矩阵，乘法运算只牵涉到其中元素的加法和乘法运算，因此对多项式矩阵可以仿照数字矩阵的运算定义多项式矩阵的对应运算。同样也可以仿照数字矩阵的子式，代数余子式以及$n\times n$数字矩阵的行列式定义多项式矩阵的子式，代数余子式及$n\times n$多项式矩阵的行列式，特别是对任意$A(\lambda)$，$B(\lambda)\in F[\lambda]^{n\times n}$，恒有

$$\det[A(\lambda)B(\lambda)]=\det[A(\lambda)]\det[B(\lambda)]$$

成立，等等。在此不再赘述。

一般地说，多项式矩阵的子式是关于λ的一个多项式$\varphi(\lambda)$，

当 λ 取 $\varphi(\lambda)$ 的一个零点 λ_0 时，可以使这个子式的值 $\varphi(\lambda_0)=0$。但就多项 $\varphi(\lambda)$ 而言，有零多项式与非零多项式之分，因此可以从子式是否为零多项式来定义多项式矩阵的秩。

定义1.1.1 如果多项式矩阵 $A(\lambda)$ 有一个 $r\,(r\geqslant 1)$ 级子式是非零多项式，而一切 $r+1$ 级子式（如果有的话）全都是零多项式，则称 $A(\lambda)$ 的秩为 r，并记为 $\mathrm{rank}[A(\lambda)]=r$。

零矩阵的秩等于零。

如果 $n\times n$ 的多项式矩阵 $\det[A(\lambda)]\neq 0$，其秩等于 n，则称 $A(\lambda)$ 为满秩多项式矩阵或称为非奇异多项式矩阵。

定义1.1.2 设 $A(\lambda)$ 是 $n\times n$ 的多项式矩阵，如果存在 $n\times n$ 的多项式矩阵 $B(\lambda)$，使等式

$$A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=E \tag{1.1.1}$$

成立，其中 E 是 $n\times n$ 的单位矩阵，则称多项式矩阵 $A(\lambda)$ 是可逆的。

应当指出，对于任意 $n\times n$ 多项式矩阵 $A(\lambda)$，适合等式（1.1.1）的多项式矩阵 $B(\lambda)$ 是唯一的（如果存在的话）。事实上，假若 $B_1(\lambda)$，$B_2(\lambda)$ 是两个适合等式（1.1.1）的两个多项式矩阵，就有

$$A(\lambda)B_1(\lambda)=B_1(\lambda)A(\lambda)=E$$
$$A(\lambda)B_2(\lambda)=B_2(\lambda)A(\lambda)=E$$

从而有

$$\begin{aligned}B_1(\lambda)&=B_1(\lambda)E=B_1(\lambda)[A(\lambda)B_2(\lambda)]\\&=[B_1(\lambda)A(\lambda)]B_2(\lambda)=EB_2(\lambda)=B_2(\lambda)\end{aligned}$$

这就证明了适合等式（1.1.1）的 $B(\lambda)$ 是唯一的（如果存在的话）。

通常把适合等式（1.1.1）的唯一的 $n\times n$ 多项式矩阵 $B(\lambda)$ 称为 $n\times n$ 多项式矩阵 $A(\lambda)$ 的逆矩阵，并记为 $A^{-1}(\lambda)$。

众所周知，在数字矩阵中满秩矩阵一定是可逆的。但是这一结论并不适用于多项式矩阵。这是因为，如果 $n\times n$ 的多项式矩

阵$A(\lambda)$可逆，则有$B(\lambda)$使得

$$A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=E$$

成立。等式两边取行列式，得到

$$\det[A(\lambda)]\det[B(\lambda)]=\det(E)=1.$$

而$\det[A(\lambda)]$与$\det[B(\lambda)]$都是λ的多项式，其乘积等于零次多项式1，即

$$\deg\{\det[A(\lambda)]\}+\deg\{\det[B(\lambda)]\}=0,$$

而多项式$\det[A(\lambda)]$，$\det[B(\lambda)]$的次数是非负实数，于是

$$\deg\{\det[A(\lambda)]\}=0,\ \deg\{\det[B(\lambda)]\}=0,$$

即$\det[A(\lambda)]$是非零常数。

反之，如果$\det[A(\lambda)]=d\neq0$，d是一个非零常数。记$A(\lambda)$的伴随矩阵为$\mathrm{adj}[A(\lambda)]$，那么

$$\frac{1}{\det[A(\lambda)]}\mathrm{adj}[A(\lambda)]=\frac{1}{d}\mathrm{adj}[A(\lambda)]$$

也是一个λ的多项式矩阵，并且有

$$A(\lambda)\frac{1}{d}\mathrm{adj}[A(\lambda)]=\frac{1}{d}\mathrm{adj}[A(\lambda)]A(\lambda)=E,$$

所以$A(\lambda)$是可逆的多项式矩阵。于是可得如下定理。

定理1.1.1 $n\times n$多项式矩阵$A(\lambda)$可逆的充分必要条件是$A(\lambda)$的行列式$\det[A(\lambda)]$等于非零常数。

可逆的多项式矩阵又称为单（么）模态矩阵。显然单模态矩阵一定是满秩的，但满秩矩阵不一定是单模态矩阵。例如

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda^3+1 & -1\\ \lambda^2 & \lambda^2-\lambda & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\det[A(\lambda)]=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ \lambda & \lambda^3+1 & -1\\ \lambda^2 & \lambda^2-\lambda & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^4+\lambda^2.$$

$\mathrm{rank}[A(\lambda)]=3$，即$A(\lambda)$是满秩的，但$A(\lambda)$不是单模态矩阵。

在数字矩阵中，为了确定矩阵的秩，曾经引进初等变换的概念，对多项式矩阵，也可以类似地引进初等变换的概念。

定义1.1.3 下面三种变换：

（1）任意两行互换位置；

（2）某一行乘以非零常数 a；

（3）某一行乘以多项式 $\varphi(\lambda)$ 再加到另一行上去；

称为多项式矩阵的初等行变换。类似地可以定义初等列变换。初等行变换与初等列变换统称为初等变换。

为了书写方便，用记号$[i,j]$表示第 i，j 两行（列）互换位置，用记号$[i(a)]$表示第 i 行（列）乘以非零数 a，用记号$[i+j(\varphi)]$表示第 j 行（列）乘以多项式 $\varphi(\lambda)$ 后，再加到第 i 行（列）上去。

为了建立多项式矩阵的初等变换与矩阵乘法的联系，下面引进初等矩阵的定义。

定义1.1.4 由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵。

按定义，每个初等变换都有一个初等矩阵与之对应。

（1）互换单位矩阵 E 的第 i、j 两行（列）得到

$$P_{ij}=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} & & & (i\text{列}) & & & & (j\text{列}) & & \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 & & 1 & \vdots & & & & \vdots & & \\
 & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\
 & & & \vdots & \ddots & & & \vdots & & \\
 & & & \vdots & & 1 & & \vdots & & \\
 & & & \vdots & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & \vdots & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\
 & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ (i\text{行}) \\ \\ \\ \\ \\ (j\text{行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

（2）E 的第 i 行（列）乘以非零数 a，得到

$$
\begin{array}{cc}
 & (i\text{列}) \\
P_i(a) = \begin{pmatrix}
1 & & & & \\
 & \ddots & & \vdots & \\
 & & 1 & \vdots & \\
 & & & a & \cdots\cdots \\
 & & & & 1 \\
 & & & & & \ddots \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ (i\text{行}) \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

（3） E 的第 j 行（i 列）乘以多项式 $\varphi(\lambda)$ 后，加到第 i 行（j 列）上去，得到

$$
\begin{array}{cc}
 & (i\text{列})(j\text{列}) \\
P_{ij}(\varphi) = \begin{pmatrix}
1 & & & & \\
 & \ddots & \vdots & \vdots & \\
 & & 1 & \cdots\cdots \varphi(\lambda) & \cdots \\
 & & & \ddots \vdots & \\
 & & & 1 & \cdots\cdots \\
 & & & & \ddots \\
 & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ (i\text{行}) \\ \\ (j\text{行}) \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

因为$\det(P_{ij})=-1$，$\det[P_i(a)]=a\neq 0$，$\det[P_{ij}(\varphi(\lambda))]=1$，所以初等矩阵都是单模态矩阵。它们的逆矩阵分别为

$$P_{ij}^{-1}=P_{ij},P_i^{-1}(a)=P_i(a^{-1}),P_{ij}^{-1}(\varphi(\lambda))=P_{ij}(-\varphi(\lambda))$$

因此初等矩阵的逆矩阵是同类型的初等矩阵。

有了初等矩阵的概念，就可以把对多项式矩阵 $A(\lambda)$ 施以初等变换的步骤，转化为 $A(\lambda)$ 与初等矩阵的乘积关系。

设$A(\lambda)$是$m\times n$的多项式矩阵，P_{ij}，$P_i(a)$，$P_{ij}(\varphi(\lambda))$表示$m\times m$的初等矩阵，Q_{ij}，$Q_i(a)$，$Q_{ij}(\varphi(\lambda))$表示相应的$n\times n$的初等矩阵，则有：

（1） $P_{ij}A(\lambda)$ 为互换$A(\lambda)$ 的第 i，j 两行的位置；$A(\lambda)Q_{ij}$ 为互换$A(\lambda)$ 的第 i，j 两列的位置。

（2） $P_i(a)A(\lambda)$ 为 $A(\lambda)$ 的第 i 行乘以数 $a\neq 0$；$A(\lambda)Q_i(a)$为$A(\lambda)$的第 i 列乘以数 $a\neq 0$。

（3）$P_{ij}(\varphi(\lambda))A(\lambda)$为把$A(\lambda)$的第 j 行乘以 $\varphi(\lambda)$后，再加到第 i 行上去；$A(\lambda)Q_{ij}(\varphi(\lambda))$为把$A(\lambda)$的第 i 列乘以 $\varphi(\lambda)$后再加到第 j 列上去。

定义1.1.5 设 $A(\lambda)$，$B(\lambda)$ 都是 $m\times n$ 的多项式矩阵，如果$A(\lambda)$可以经过有限次初等变换化为$B(\lambda)$，则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价，记为$A(\lambda)\simeq B(\lambda)$。

按等价的定义，易证多项式矩阵的等价关系有以下性质：

（1）反身性：任何多项式矩阵都与它自身等价。

（2）对称性：若多项式矩阵$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价，则 $B(\lambda)$与$A(\lambda)$ 也等价。

（3）传递性：若多项式矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价，$B(\lambda)$ 与$C(\lambda)$等价，则$A(\lambda)$与$C(\lambda)$ 等价。

如果 $m\times n$的多项式矩阵经过 s 次初等行变换，t 次初等列变换化为多项式 矩 阵 $B(\lambda)$，应用初等变换与初等矩阵的关系，则有相应的$m\times m$的初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_s$ 及相应的 $n\times n$ 的初等矩阵$Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$，使得

$$P_sP_{s-1}\cdots P_2P_1A(\lambda)Q_1Q_2\cdots Q_{t-1}Q_t = B(\lambda)$$

记

$$P(\lambda)=P_sP_{s-1}\cdots P_2P_1,\quad Q(\lambda)=Q_1Q_2\cdots Q_{t-1}Q_t$$

即有单模态多项式矩阵$P(\lambda)$，$Q(\lambda)$，使得

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)=B(\lambda).$$

第二节　多项式矩阵的Smith标准形

对于数字矩阵而言，如果A是秩为 r 的$m\times n$数字矩阵，那么A一定可以经过有限次的初等变换化为标准形

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 E_r为$r\times r$的单位矩阵。对于多项式矩阵也有类似的结果，这

就是把多项式矩阵$A(\lambda)$化为Smith标准形问题。下面先证明一个引理。

引理 设$A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))$是m×n多项式矩阵，如果$a_{11}(\lambda)\neq 0$，且$a_{11}(\lambda)$不能除尽某个元素$a_{ij}(\lambda)$，则存在多项式矩阵$B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))\simeq A(\lambda)$，$b_{11}(\lambda)\neq 0$，且$\deg[b_{11}(\lambda)]<\deg[a_{11}(\lambda)]$。

证明 根据不能被$a_{11}(\lambda)$除尽的元素$a_{ij}(\lambda)$在$A(\lambda)$中所处的位置，分为以下三种情形：

（1）在第一行有某元素$a_{1j}(\lambda)$不能被$a_{11}(\lambda)$除尽，按带余除法，有

$$a_{1j}(\lambda)=a_{11}(\lambda)\varphi(\lambda)+b(\lambda)$$

其中$b(\lambda)\neq 0$，且$\deg[b(\lambda)]<\deg[a_{11}(\lambda)]$。这时作以下初等变换：

$$A(\lambda)\xrightarrow[{[j+1(-\varphi)],[1,j]}]{}B(\lambda)$$

（注意：变换记号写在箭号→下面表示作列变换，写在箭号上面表示作行变换。）

那么，就有n×n的初等矩阵$P_{1j}(-\varphi)$，P_{1j}，使得

$$A(\lambda)P_{1j}(-\varphi)P_{1j}=B(\lambda)$$

这时$B(\lambda)\simeq A(\lambda)$，$B(\lambda)$左上角元素$b_{11}(\lambda)=b(\lambda)\neq 0$，且$\deg[b_{11}(\lambda)]<\deg[a_{11}(\lambda)]$。

（2）在第一列有某元素$a_{i1}(\lambda)$不能被$a_{11}(\lambda)$除尽，可仿照（1）证明之。

（3）$A(\lambda)$中有某元素$a_{ij}(\lambda)$（$i\geqslant 2$，$j\geqslant 2$）不能被$a_{11}(\lambda)$除尽，但$a_{11}(\lambda)|a_{1j}(\lambda)$（$j=1,2,\cdots,n$），$a_{11}(\lambda)|a_{i1}(\lambda)$（$i=1,2,\cdots,m$），不妨设第一列第$i$个元素$a_{i1}(\lambda)$有

$$a_{i1}(\lambda)=a_{11}(\lambda)\psi(x)$$

这时对$A(\lambda)$作以下初等变换：

$$A(\lambda)\xrightarrow{[i+1(-\psi)],[1+i(1)]}\widehat{A}(\lambda)$$

那么，就有m×m的初等矩阵$P_{i1}(-\psi)$，$P_{1i}(1)$，使得

$$P_{1i}(1)P_{i1}(-\psi)A(\lambda)=\widehat{A}(\lambda),$$

这时$\widehat{A}(\lambda)=(\widehat{a}_{ij}(\lambda))$ 的元素

$$\widehat{a}_{11}(\lambda)=a_{11}(\lambda)$$

$$\widehat{a}_{1j}(\lambda)=a_{ij}(\lambda)+[1-\psi(\lambda)]a_{1j}(\lambda)$$

显然$\widehat{a}_{11}(\lambda)$不能除尽$\widehat{A}(\lambda)$ 的第一行第 j 列元素$\widehat{a}_{1j}(\lambda)$，这就归结为情形（1）

由引理的证明过程可知，$B(\lambda)$的左上角的元素 $b_{11}(\lambda)$ 总可以表示为 $A(\lambda)$ 的元素的组合。如情形（1）就有

$$b_{11}(\lambda)=b(\lambda)=a_{1j}(\lambda)-\varphi(\lambda)a_{11}(\lambda)$$

下面要用到这一结论。

定理1.2.1 设$A(\lambda)$是m×n的非零多项式矩阵，则

$$A(\lambda)\simeq\begin{pmatrix}S(\lambda) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

其中 $S(\lambda)=\mathrm{diag}[d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)]$，$r\geqslant1$，$d_i(\lambda)$是首一多项式，且$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$（注）$(i=1,2,\cdots,r-1)$。

证明 因为$A(\lambda)\neq0$，所以总可以经过行、列交换使$A(\lambda)$的左上角元素不为零，不妨设$a_{11}(\lambda)\neq0$，如果$a_{11}(\lambda)$不能除尽$A(\lambda)$的全部元素，根据引理，存在$B_1(\lambda)\simeq A(\lambda)$，$B_1(\lambda)$左上角元素$b_1(\lambda)\neq0$，且$\deg[b_1(\lambda)]<\deg[a_{11}(\lambda)]$。如果$b_1(\lambda)$ 还不能除尽$B_1(\lambda)$ 的全部元素，再据引理，存在 $B_2(\lambda)\simeq B_1(\lambda)$，$B_2(\lambda)$ 左上角元素 $b_2(\lambda)\neq0$，且$\deg[b_2(\lambda)]<\deg[b_1(\lambda)]$。如此继续下去，就得到

$$A(\lambda)\simeq B_1(\lambda)\simeq B_2(\lambda)\simeq\cdots$$

（注） $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$ 表示$d_i(\lambda)$能整除$d_{i+1}(\lambda)$