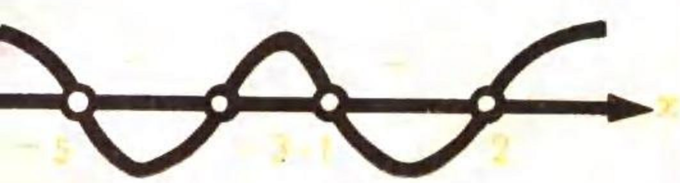
高中代数例题

精讲与解法

北京师大二附中数学教研组编

主　编　古永喜

副主编　张自文　张鸿菊



北京教育出版社

高中代数例题精讲与解法

北京师大二附中数学教研组　编

主　编　陈俊辉

副主编　于广兴

北京教育出版社

(京)新登字202号

高中代数例题精讲与解法

GAOZHONG DAISHU LITI JINGJIANG YU JIEFA

北京师大二附中数学教研组　编
主　编　陈俊辉
副主编　于广兴

*

北京教育出版社出版
(北京北三环中路6号)
邮政编码：100011
北 京 出 版 社 总 发 行
新华书店北京发行所经销
北京朝阳展望印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　12.75印张　190000字
1994年2月第1版　　1994年2月第1次印刷
印数　1—6000
ISBN 7-5303-0523-9

G·497　定　价：6.20元

前　言

《高中代数例题精讲与解法》一书，是我组全体高中教师集体智慧的结晶．是为帮助高中学生学好数学知识、提高分析和解决问题的能力，特别是为希望在高考中取得较好数学成绩的同学而编写的．

高中数学知识庞杂，数学题浩如烟海且高考要求又比教科书所能达到的要求高出一层，故高中学生迫切需要一本好的课外学习读物，特别是既能覆盖高考所需要的各知识点，又能在重点处有所突出且选材少而精的参考书．

这本书就是在我组教师多年教学和指导高考复习的经验基础之上，精选了高中数学代数部分的典型例题，给出精练的解答．对解题思路中的一些疑难之处，用“分析”或“说明”的形式加以导引，以求举一反三，触类旁通．

本书按高考复习的需要分章编排．每章题目分“基本题型”和“综合题型”两部分．“基本题型”是用本章知识来解的一些题型，用以帮助同学熟练地应用基础知识和基本技能．“综合题型”主要是以本章知识为主，结合其他部分知识来解的综合题，用以提高综合运用数学知识解决问题的能力．大部分章末附有一自测题，供同学们了解自己的学习水平．书后有自测题答案，供学习参考．

我们特别邀请了北京市特级教师、我校副校长陈俊辉老

师参加本书的编写工作.

参加本书编写工作的老师有：陈俊辉、于广兴、邓三惠、李文英、蒋人凤、王江慈、金宝铮、张程.

书中不足之处，欢迎读者批评、指正.

北京师大二附中数学教研组

1993.6.

目　录

第一章　函数

一、函数是中学数学中最重要的基本概念之一．初中阶段已用运动变化的观点来考察变量之间的相互依赖的关系和自变量、因变量之间的对应关系，初步探讨了函数的概念及函数关系的表示方法，并研究了正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数等最简单的函数．高中阶段运用集合、对应的思想即“映射”概括了函数的一般定义，加深对函数概念的理解，并研究了幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等基本初等函数(三角函数和反三角函数在后面单列章复习)．

二、函数及其图象在中学数学中地位重要，应用广泛，且与高等数学之间有很强的衔接性．它涉及的数学方法、数学思想对今后继续学习和实践非常重要．所以必须充分重视本章复习，为今后学习打下良好基础．

三、本章复习的重点和难点．

1．复习重点：映射、函数与反函数的概念，以及二次函数、幂函数、指数函数、对数函数的概念、图象与性质．

2．复习难点：(1)映射的有关概念；(2)反函数的概念；(3)对函数符号f的理解；(4)一些比较抽象的代数命题的证明．

四、复习中应注意渗透数学思想和方法，培养学生的能

力.

(1) 集合与映射的思想;

(2) 数形结合的思想;

(3) 转化的思想;

(4) 配方法、换元法、待定系数法等等;

(5) 抽象思维能力和逻辑推理能力.

一 基本题型

例1 解答下列选择题.

(1) 设集合$X=\{0, 1, 2, 4, 5, 7\}$,$Y=\{1, 3, 6, 8, 9\}$, $Z=\{3, 7, 9\}$, 那么集合$(X\cap Y)\cup Z$是

(A)$\{0, 1, 2, 6, 8\}$.

(B)$\{3, 7, 8\}$.　　(C)$\{1, 3, 7, 9\}$

(D)$\{1, 3, 6, 7, 8\}$.

(2) 已知全集$I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A=\{3, 4, 5\}$, $B=\{1, 3, 6\}$, 那么集合$\{2, 7, 8\}$是

(A)$A\cup B$　(B)$A\cap B$　(C)$\overline{A}\cup\overline{B}$　(D)$\overline{A}\cap\overline{B}$

(3) 设全集$I=\{(x,y)\mid x, y\in R\}$, 集合$M=\{(x, y)\mid \frac{y-3}{x-2}=1\}$, $N=\{(x, y)\mid y\neq x+1\}$, 那么集合$\overline{M}\cap\overline{N}$等于

(A)$\varnothing$　(B)$\{(2, 3)\}$　(C)$(2, 3)$

(D)$\{(x, y)\mid y=x+1\}$

解 (1) $\because$ $x\cap y=\{1\}$, $z=\{3, 7, 9\}$,

$\therefore$ $(X\cap Y)\cup Z=\{1, 3, 7, 9\}$,故选(C).

(2) $\because$ $A\cup B=\{1, 3, 4, 5, 6\}$, $A\cap B=\{3\}$,

$\therefore$ (A)、(B)均被排除.

又$\because$ $\overline{A}=\{1, 2, 6, 7, 8\}$,

$\overline{B}=\{2, 4, 5, 7, 8\}$,

$\therefore$ $\overline{A}\cup\overline{B}=\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

而$\overline{A}\cap\overline{B}=\{2, 7, 8\}$,

$\therefore$ 集合$\{2, 7, 8\}$是$\overline{A}\cap\overline{B}$.故选(D).

(3) $\because$ $\overline{M}=\{(x, y)\mid y\neq 1+x\}\cup\{(2, 3)\}$,

$\overline{N}=\{(x, y)\mid y=1+x\}$,

$\therefore$ $\overline{M}\cap\overline{N}=\{(2, 3)\}$.故选(B).

例2 已知全集$I=R$,$A=\{x\mid 2x^2-5x<0\}$, $B=\{x\mid 6x^2-x-2\geqslant 0\}$,求$A\cup B$,$\overline{A}$,$A\cap\overline{B}$以及$(A\cap B)\cap\overline{B}$.

分析:先把已知集合的条件变成显式,再利用数轴根据题目要求寻找答案.

解 由已知, $A=\{x\mid 2x^2-5x<0\}$

$$=\{x\mid x(2x-5)<0\}=\left(0, \frac{5}{2}\right),$$

$$B=\{x\mid 6x^2-x-2\geqslant 0\}=\{x\mid (3x-2)(2x+1)\geqslant 0\}$$

$$=\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{2}{3}, +\infty\right),$$

如图1-1所示,

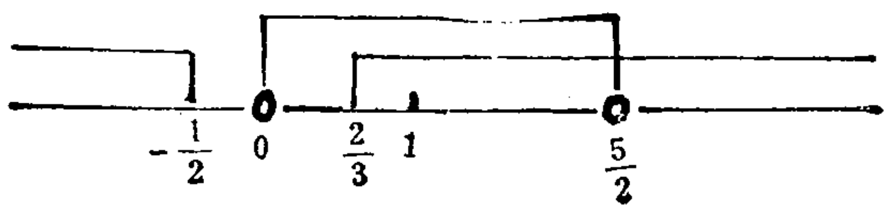


图 1-1

$\therefore A\cup B=\{x\mid x\leqslant -\frac{1}{2}或x>0\}$

$$=\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right]\cup(0,\ +\infty)$$

$$\overline{A}=\{x|x\leqslant0\text{或}x\geqslant\frac{5}{2}\}=(-\infty,\ 0]\cup[\frac{5}{2},\ +\infty).$$

$$\overline{B}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right)$$

$$A\cap\overline{B}=\left(0,\ \frac{2}{3}\right)$$

又∵ $A\cap B=\{x|\frac{2}{3}\leqslant x<\frac{5}{2}\}=\left[\frac{2}{3},\ \frac{5}{2}\right)$,

∴ $(A\cap B)\cap\overline{B}=\varnothing$.

说明 研究集合的计算问题，应注意：

(1) 熟练掌握一元一次方程、一元一次不等式和一元二次不等式的解法.

(2) 注意数轴的使用，把开区间、闭区间；$>$、$<$、$\geqslant$、$\leqslant$、$\neq$以及在数轴上用点还是用圈搞清楚，并能把三者对应起来.

例3 解答下列各题.

(1) 已知集合$A=\{(x,\ y)|x-y=0\}$，集合$B=\{(x,y)|x-y=m,\ m\in R\}$，求$A\cap B$和$A\cup B$.

(2) 已知集合$A=\{(x,\ y)|x^2+y^2=16\}$，集合$B=\{(x,y)|x-y=m,\ m\in R\}$，若$A\cap B=\varnothing$，求$m$的取值范围.

解 (1) 当$m=0$时，$A\cap B=A\cup B=A=B$；当$m\neq0$时，$A\cap B=\varnothing$. $A\cup B=\{(xz)|x-z=0\text{或}x-z=m\}$.

(2) ∵ 集合A表示以坐标原点为圆心，4为半径的圆，

集合B表示直线束$x-y=m$，$A\cap B=\varnothing$，说明圆心(0，0)到直线$x-y=m$的距离大于4，即$\frac{|-m|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|m|}{\sqrt{2}}>4$，所以$|m|>4\sqrt{2}$即$m<-4\sqrt{2}$或$m>4\sqrt{2}$.故$m\in(-\infty,-4\sqrt{2})\cup(4\sqrt{2},+\infty)$.

说明 (1)题的解法说明在解决集合的有关交集、并集等问题时，要注意运用有关概念，并注意对参数的讨论.

(2)题的解法说明，用集合中元素满足的方程或不等式的几何意义，可把集合问题转化为解析几何问题.

例4 已知集合$A=\{y|y=x^2+2x+4,x\in R\}$，集合$B=\{z|z=ax^2-2x+4a,x\in R\}$，若$A=B$，求实数$a$的值.

分析 集合A表示二次函数$y=x^2+2x+4$的值域，集合B表示二次函数$z=ax^2-2x+4a$的值域.两个集合相等，说明两个函数的值域相等即抛物线的开口方向相同且顶点的纵坐标值相等.根据以上条件可以求出实数a的值.

解 $\because$ $A=\{y|y=x^2+2x+4,x\in R\}$

$=\{y|y=(x+1)^2+3,x\in R\}$,

$B=\{z|z=ax^2-2x+4a,x\in R\}$

$=\{z|z=a\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+4a-\frac{1}{a},x\in R\}$,

$\because$ $A=B$,

$$\therefore\quad \begin{cases}a>0\\4a-\frac{1}{a}=3.\end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}a>0\\a=1,\ a=-\frac{1}{4}.\end{cases}$$

$\therefore \quad a=1.$

说明 要求两个二次函数值域相等，并不要求两个二次函数完全相同.

例5 已知集合$A=\{1, 2, 3\}$，集合$B=\{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$.(1)写出集合A的所有子集；(2)若集合C满足$A\subset C\subseteq B$，这样的集合C有多少个？(3)若集合B中任意两个元素之积组成集合D的元素，集合D有多少个元素？子集有多少个？

解 (1)由集合$A=\{1, 2, 3\}$知，集合A的子集有$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1, 2\}$，$\{2, 3\}$，$\{1, 3\}$和$\{1, 2, 3\}$.共8个.

(2) 若$A\subset C\subseteq B$，即C中至少有一个元素不在A中但所有元素都在B中.这样，满足条件的集合C有$C_3^1+C_3^2+C_3^3=7$个.

(3) 集合B共有6个元素，任意两个元素之积的个数为$C_6^2=15$，所以集合D有15个元素.子集个数为$C_{15}^0+C_{15}^1+C_{15}^2+\cdots+C_{15}^{14}+C_{15}^{15}=2^{15}$.

说明 本例(2)中，集合C的个数等于从5，7，8这3个元素中依次取出1，2，3个不同元素的组合种数之和. 类似(2)、(3)这类求满足某条件的集合个数问题，可以转化为排列组合问题.下面的例4用排列组合知识求解也是方便的.

例6 设$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，$B=\{b_1, b_2, b_3\}$，问从A到B的映射共有多少个？

分析 映射可以是一对一或多对一的对应.在一对一的对应中，$a_i(i=1,2, 3, 4)$的象有3种不同的情况，对应3个映射：(a_i, b_1)、(a_i, b_2)、(a_i, b_3)；在二对一的对应中，不妨设$i=4$，则含a_i的原像生成的映射有：$[(a_i, a_1), b_1]$，

$[(a_i, a_2), b_2]$，$[(a_i, a_3), b_3]$也是 3 个映射；在三对一的对应中，不妨仍令$i=4$，则含a_i的原像生成的映射是：$[(a_i, a_1, a_2), b_1]$，$[(a_i, a_1, a_3], b_2]$，$[(a_i, a_2, a_3), b_3]$，仍是3个. 在四对一的对应中，含a_i的原像生成的映射同上可知也是 3 个. 因此，a_i可对应 3 种映射. 同理，$a_j(j=1, 2, 3, 4, i\neq j)$也可以对应 3 种映射.

解 从A到B的映射共有$3\times3\times3\times3=3^4$个.

说明 (1)一般地说，如果A是n元集，B是m元集，则A中任一元素对应的像有m种，所以共有映射数为

$$\underbrace{m\times m\times\cdots\times m}_{n个}=m^n.$$

(2) 如果考虑从A到A的映射，且A是n元集，则共有映射数为$n\times n\times\cdots\times n=n^n$.

特别地，如果进一步研究从A到A 的一一映射，则应有$P_n^n=n!$个.

例7 若集合$P=\{2, 4, a^3-2a^2-a+7\}$，$M=\{1, a+1, a^2-2a+2, -\frac{1}{2}(a^2-3a-8), a^3+a^2+3a+7\}$，且$P\cap M=\{2, 5\}$，求$a$的值.

解 $\because$ $P\cap M=\{2, 5\}$，$\therefore$ $5\in P$.

$\therefore$ $a^3-2a^2-a+7=5$.

即 $a^3-2a^2-a+2=0$.

$(a+1)(a-1)(a-2)=0$.

$\therefore$ $a=\pm1, 2$.

当$a=1$时，在集合M中，$a^2-2a+2=1$，因此1与a^2-2a+a相同，这与集合中元素互异矛盾，故$a\neq1$.

当$a=-1$时，$P=\{2,4,5\}$，$M=\{1,0,5,2,4\}$，$P\cap M=\{2,4,5\}$，与已知不符，故$a\neq -1$；

当$a=2$时，$P=\{2,4,5\}$，$M=\{1,3,2,5,25\}$，$P\cap M=\{2,5\}$，这与已知条件相符.

$\therefore\quad a=2$.

说明 (1) 本题利用交集和元素与集合关系的概念，把求a的值转化为解方程$a^3-2a^2-a+2=0$，这是解决集合问题的一种重要方法.

(2) 如果本题以选择题形式给出，答案有(A)±1，2；(B)2；(C)1，-2；(D)1，3.则简捷的解法是验证、淘汰法.把$a=1$代入集合M中知$a\neq1$，于是(A)、(C)、(D)都不正确，故选(B).

例8 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$；　　(2) $y=\log_2(1+2x-3x^2)$；

(3) $y=\log_a[\log_a(\log_a x)]$.

解 (1) 根据函数的意义得出不等式组

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant0,\\x-1\neq0.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant2\\x\neq1.\end{cases}$

$\therefore$ 不等式组的解为$-2\leqslant x\leqslant2$且$x\neq1$.

因此，原函数的定义域为$\{x|-2\leqslant x<1\}\cup\{x|1<x\leqslant2\}$(或写成$[-2,1)\cup(1,2]$).

(2) 由函数定义，得$1+2x-3x^2>0$，即$3x^2-2x-1<0$.

故不等式的解为$-\frac{1}{3}<x<1$.

因此，原函数的定义域为$\left(-\frac{1}{3},1\right)$或答$\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{3}<x<1\right\}$.

(3) 由函数定义，得$\log_a(\log_a x)>0$.

当$a>1$时，$\log_a x>1\Longrightarrow x>a$.

当$0<a<1$时，$0<\log_a x<1\Longrightarrow a<x<1$.

$\therefore$ 当$a>1$时,$\log_a[\log_a(\log_a x)]$的定义域为$(a,+\infty)$；当$0<a<1$时，定义域为$(a, 1)$.

说明 (1) 函数定义域是函数概念的基本要素之一．求用解析式表示的函数定义域时，如果没有附加条件，应从解析式所含运算可以施行为准则出发，转化为解不等式或不等式组.

(2) 对于含参数的函数的定义域,应分情况讨论.如本例(3).分$a>1$和$0<a<1$两种情况求解.

例9 设$f(x)$的定义域是$[0, 1]$,求下列函数的定义域.

(1) $y=f(x^2)$； (2) $y=f(2x)+f(x+m)$. $(m>0)$

解 (1) $\because$ $0\leqslant x^2\leqslant 1$, $\therefore$ $-1\leqslant x\leqslant 1$

$\therefore$ 函数$y=f(x^2)$的定义域是$[-1, 1]$.

(2) $\because$ $\begin{cases}0\leqslant 2x\leqslant 1\\ 0\leqslant x+m\leqslant 1.\end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\\ -m\leqslant x\leqslant 1-m.\end{cases}$

当$\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant 1$时，定义域为$[0, 1-m]$；

当 $0<m<\frac{1}{2}$时，定义域为$\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

说明 本题是关于抽象函数定义域求法的例子.若 $f(x)$ 的定义域为$\{x|a<x<b\}$，则$f[g(x)]$的定义域为$D=\{x|a<g(x)<b\}$，然后，解不等式化简D，得到最后结果.如果有其它参数，要注意进行讨论.

例10 将一根长120cm的铁条，弯成矩形框架，试以矩形长为自变量，列出矩形面积的函数式，并求这个函数的定义域.

解 设这个矩形的长为$x$cm，则它的宽为$\frac{120-2x}{2}$cm.

因此面积为

$$S=x(60-x)=-x^2+60x.$$

$\because\ x>0,\ 60-x>0,$

$\therefore\ 0<x<60.$

于是，所求的函数关系为

$$S=-x^2+60x.$$

其定义域为$\{x|0<x<60\}$.

说明 (1) 实际问题中求函数定义域，必须根据变量的实际意义确定其定义域.

(2) 在求函数定义域时要注意，函数变形过程中可能引起定义域的改变.如函数$y=\frac{x^2-1}{x-1}$与函数$y=x+1$定义域不同.

例11 已知$f(2x-1)=x^2$，$(x\in R)$，求$f(x)$的解析式.

分析 问题的关键是搞清对于“x”而言，“f”是怎样的对