凸輪几何学

赵国文　安承业　著

机械工业出版社

内 容 提 要

《凸轮几何学》是《凸轮机构运动综合》的同义语。

本书从有关的数学-力学原理出发，对凸轮机构运动综合中的凸轮廓线、压力角、曲率半径和最小尺寸的计算原理及方法进行了系统论述，并力图揭示各种计算原理和方法之间的联系与区别。

本书可供机械设计与制造方面的科研人员、设计人员、研究生和大学教师参考。

凸轮几何学

赵国文　安承业　著

*

责任编辑：陈祖燕

封面设计：范德成

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

吉林科技大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本850×1168 1/32·印张6.8·字数 170千字

1989年6月北京第一版·1989年6月第一次印刷

印数0001—1000　·定价：5.60元

*

ISBN 7-111-02103-7/TH·349(X)

前　言

凸轮机构的运动综合，一直是凸轮机构研究中相当活跃的领域之一。国内外学者就此发表了大量的论著。但是，迄今国内外尚未出版一本全面系统地总结概括这一领域研究成果的专著。虽然有关论著浩如瀚海，但彼此之间缺乏内在联系，因而妨碍了对这一领域的深入研究和开拓。

基于上述考虑，著者从运动几何学和微分几何学的基本原理出发，总结了包括本书著者发表的和尚未发表的研究成果在内的有关大量资料写成此书，定名为《凸轮几何学》。

本书用多种理论和方法论述了凸轮理论廓线、实际廓线、压力角、曲率半径和最小尺寸的计算问题。而且力图揭示这些计算理论和方法之间的联系与区别。其中有相当数量的计算方法尚未见著于有关资料和文献，而是著者依据运动几何学和微分几何学的有关原理，结合凸轮机构的实际问题提出来的。

为使本书更具理论性并节省篇幅起见，将常用的或不常用但有助于揭示问题本质的有关运动几何学知识，集中在第一章里予以介绍。其他预备知识则分散在有关章节之中。

本书的另一特点是竭力把凸轮几何学问题转化为相应的数学问题，而后利用数学方法求得相应的结果。从这个意义上说，本书也是凸轮机构运动综合方面的数学模型库。这对于利用电子计算机进行凸轮机构的运动综合时，选择有助于节约机时的数学模型，精化程序，无疑具有实用价值。

对于解决同一个问题所用的多种方法，为了相互区别和便于掌握，著者多以所用的数学原理予以命名（例如包络线法、渐缩线法、反垂足线法、复数矢量法…），也有相当数目的方法则以所用的力学原理加以命名（例如瞬心法、一类类加速度法、二类

类加速度法…），还有个别方法是以提出该法的学者的名字命名的（例如欧拉-沙瓦里法）。这些方法的命名，虽经著者的反复推敲，但亦难免存在不妥之处。

此外，应当指出的是，本书所用的某些原理和方法，亦可用来解决共轭曲线机构运动设计的类似问题。

本书的撰写大纲由赵国文拟订。全书由赵国文（前言、一、三、五、六章）和安承业（二、四章）共同执笔。最后由赵国文统稿和定稿。

由于著作者学术水平的限制，书中谬误之处在所难免，敬请读者不吝指教。

著　者

1988.6.24.

于吉林职业师范学院机械工程系

常用符号及简要说明

t—时间

ω—凸轮转动角速度(常量)

φ—凸轮转角（变量，规定恒为正角）

α—凸轮压力角（变量）

α_{max}—凸轮最大压力角

$[\alpha]$—推程许用压力角

$[\alpha']$—回程许用压力角

e—移动从动件导路对凸轮转轴的偏移距离，简称偏距（常量）

r—滚子从动件滚子半径（常量）

r_O—滚子从动件盘形凸轮理论线的基圆半径；其他盘形凸轮(实际)廓线的基圆半径；圆柱凸轮廓面的平均半径或称中径(均为常量)

r_C—滚子从动件盘形凸轮实际廓线的基圆半径（常量）

S—移动从动件的（线）位移（变量），用凸轮转角 φ 的函数 $S=S(\varphi)$ 的形式给定

S_O—移动从动件的初始（线）位移（常量）

v—移动从动件的（线）速度（变量）

a—移动从动件的（线）加速度（变量）；摆动从动件盘形凸轮机构的中心距（常量）

Ψ—摆动从动件的角位移或称转角（变量），以凸轮转角 φ 的函数 $\Psi=\psi(\varphi)$ 的形式给定

Ψ_O—摆动从动件的初始位置角（常量）

ω_{AB}—摆动从动件的角速度（变量）

l—滚子摆动从动件的长度（常量），其大小为从动件的转轴到滚子圆心的距离

R—滚子从动件盘形凸轮极坐标理论廓线的极径；其他盘形凸轮（实际）廓线极坐标极径（均为变量）

R_C—滚子从动件盘形凸轮极坐标实际廓线的极径(变量)

θ—滚子从动件盘形凸轮极坐标理论廓线极角，其他盘形凸轮极坐标（实际）廓线的极角（均为变量）

θ_C—滚子从动件盘形凸轮极坐标实际廓线的极角(变量)

P—凸轮和从动件的相对速度瞬时中心，简称瞬心，当凸轮压力角达到最大值时凸轮机构某些量的下标

nn—曲线（包括凸轮廓线）的法线

tt—曲线（包括凸轮廓线）的切线

ρ—滚子从动件盘形凸轮和平板移动凸轮理论廓线的曲率半径，其他盘形凸轮和平板移动凸轮（实际）廓线的曲率半径（均为变量）

ρ_C—滚子从动件盘形凸轮和平板移动凸轮实际廓线的曲率半径

目　录

第一章　运动几何学的有关知识…………………………（1）
§1-1　单参数平面运动…………………………（1）
§1-2　一般旋轮线及其滚线和底曲线…………………………（3）
§1-3　包络线…………………………（7）
§1-4　一般旋轮线的法线定理…………………………（9）
§1-5　包络线的法线定理…………………………（14）
§1-6　欧拉-沙瓦里方程…………………………（16）
§1-7　垂足线和反垂足线…………………………（20）
第二章　凸轮理论廓线…………………………（24）
§2-1　直角坐标方程…………………………（24）
§2-2　极坐标方程…………………………（33）
第三章　凸轮实际廓线…………………………（38）
§3-1　积分法…………………………（38）
§3-2　等距曲线法…………………………（46）
§3-3　包络线法…………………………（54）
§3-4　法线法…………………………（61）
§3-5　啮合线法…………………………（70）
§3-6　矢量法…………………………（84）
§3-7　复数矢量法…………………………（91）
§3-8　极坐标方程…………………………（99）
§3-9　反垂足线法…………………………（105）
第四章　凸轮压力角…………………………（112）
§4-1　瞬心法…………………………（113）
§4-2　直角坐标法…………………………（132）
§4-3　极坐标法…………………………（146）
第五章　凸轮曲率半径…………………………（153）
§5-1　欧拉-沙瓦里法…………………………（153）

§5-2 反垂足线法……………………………………………………(162)
§5-3 渐缩线法……………………………………………………(164)
§5-4 包路线法……………………………………………………(171)
§5-5 矢量法……………………………………………………(176)
§5-6 复数矢量法……………………………………………………(182)
§5-7 折线法……………………………………………………(185)
§5-8 数学惯用法……………………………………………………(186)
第六章 凸轮机构最小尺寸……………………………………(188)
§6-1 一类类加速度法……………………………………………(188)
§6-2 二类类加速度法……………………………………………(192)
§6-3 包络线法……………………………………………………(201)
§6-4 按曲率半径确定最小尺寸的方法…………………………(206)
参考文献 ……………………………………………………………(209)

第一章　运动几何学的有关知识

§1-1　单参数平面运动

一个刚体作平面运动时，利用该刚体上与运动参考平面相平行的一个平面图形的运动，可以完全代表这个刚体的运动，而平面图形的运动，又可以利用其上的任意一条直线所完全代表。因此，我们考察一个刚体作平面运动的情形，只考察其上一条与参考平面相平行的直线的运动就可以了。今后，如果不加特殊说明的话，纸面就代表运动参考平面。又由于它是不动的，所以也叫做定平面。而运动着的平面图形或者其上的一条直线所在的平面叫做动平面。

我们来考察线段AB的运动。如图1-1所示，线段AB由位置A_1B_1运动到位置A_2B_2时，可以看成是线段A_1B_1绕P点转动到A_2B_2的。P点叫做转动极点，它是线段A_1A_2和B_1B_2的中垂线ap和bp的交点。不难证明$\angle A_1PA_2=\angle B_1PB_2=\angle A_1CA_2==\varphi$，这表明线段$AB$由$A_1B_1$运动到$A_2B_2$时，绕转动极点$P$点转过$\varphi$角。可见仅用一个运动参数$\varphi$就完全描述了线段$AB$从位置$A_1B_1$到达位置$A_2B_2$的运动情形。

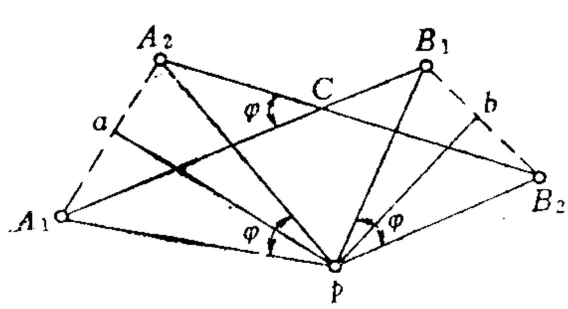

图1-1

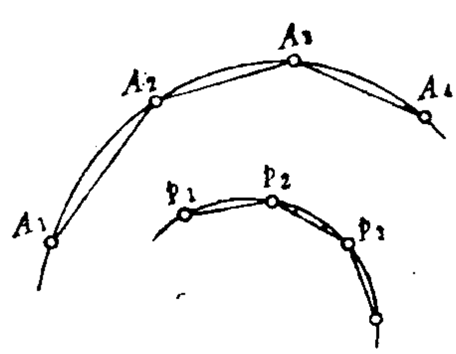

图1-2

一般地说，转动极点和瞬时转动中心（简称瞬心）是不同的。假如线段AB在运动过程中依次占据位置A_1B_1，A_2B_2，A_3B_3，A_4B_4……，那么该线段的两端点A和B分别依次占据位置A_1，A_2，A_3，A_4……和B_1，B_2，B_3，B_4……。图1-2示出A端各位置构成的折线A_1、A_2、A_3、A_4……，并示出了线段AB相应的转动极点P_1，P_2，P_3，P_4……，以及它们构成的折线P_1、P_2、P_3、P_4……，如果折线A_1、A_2、A_3、A_4……的段数无限增多，线段的长度无限缩短，那么该折线就被曲线$A_1A_2A_3A_4$……所取代。同理，转动极点折线P_1、P_2、P_3、P_4……亦被曲线$P_1P_2P_3P_4$……所取代。曲线上的P_1、P_2、P_3、P_4……各点就是瞬时转动中心了。因此可以这样说，在极限情况下转动极点才是瞬心。

至此已不难理解，平面图形的一系列瞬时运动（一系列位移无限小的运动）可以看做是它绕一系列相应的瞬心的转动。这每一个瞬时转动，都可由运动参数φ的无限小的增量$d\varphi$表征。我们把平面图形一系列瞬时运动的集合的极限称为单参数平面运动。

图1-3示出了单参数平面运动实现方法。曲线C是不动的瞬心线，简称定瞬心线，曲线K是运动的瞬心线，简称动瞬心线。当动瞬心线沿定瞬心线作纯滚动时，与动瞬心线相固连的线LM（代表一个平面图形或一个刚体）的运动，就是单参数平面运动。动瞬心线相对于定瞬心线的转动由φ角表示，相对移动由S表示，由于两者作纯滚动，故有$S=f(\varphi)$，即只有一个独立运动参数φ。

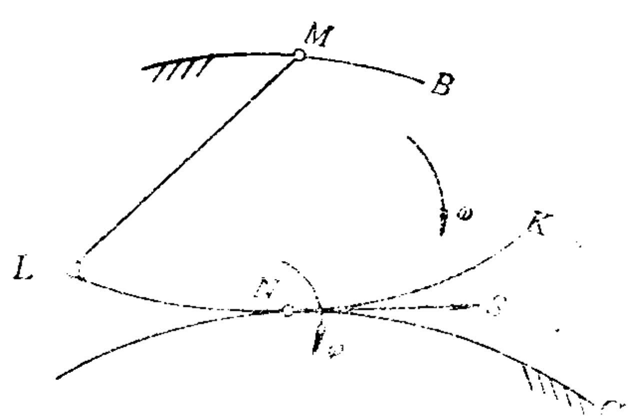

图1-3

K—动瞬心线　C—定瞬心线

§1-2 一般旋轮线及其滚线和底曲线

一、一般旋轮线及其方程

如图1-3所示，当动瞬心线K沿定瞬心线C作纯滚动时，与动瞬心线K相固连的任意一条直线LM上的任一点的轨迹B就称为一般旋轮线。

我们有时也把动瞬心线叫做滚线，把定瞬心线叫做底曲线。

现在来建立一般旋轮线的方程式。为此引入图1-4。直角坐标系$\xi 0' \eta$与滚线固连，即代表动平面的动坐标系；直角坐标系$x0y$与底曲线固连，即为代表定平面的定坐标系。动坐标系$\xi 0' \eta$的原点$0'$，在定坐标系内的坐标分别用$a(\varphi)$和$b(\varphi)$表示，它们是动坐标系转角φ的函数，从定坐标系x轴量起，逆时针时φ角为正，顺时针时φ角为负。一般旋轮线上任意点M在动坐标系和定坐标系中的坐标分别为

$$M\begin{cases}(\xi, \ \eta)\\(x, \ y)\end{cases}$$

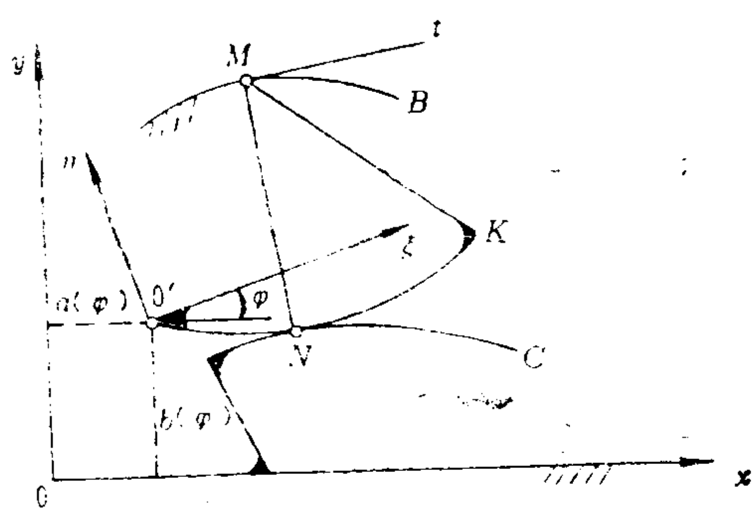

图1-4

B—一般旋轮线　*K*—动瞬心线或滚线　*C*—定瞬心线或底曲线

与描出M点相对应的滚线与底曲线的接触点N在两个座标系中的坐标分别为

$$N\begin{cases}(\xi_0,\ \eta_0)\\(x_0,\ y_0)\end{cases}$$

可见所谓一般旋轮线，乃是动平面（$\xi 0'\eta$）内的定点$M(\xi,\eta)$在定平面（$x0y$）内的轨迹。这轨迹的流动坐标即为x和y，即M点在定平面内的坐标。

所谓建立一般旋轮线的方程式，就是在已知M点在动坐标系里的坐标（ξ，η）的情况下，求M点在定坐标系内的坐标（x，y）。显然，这是个坐标变换问题：

$$\left.\begin{aligned}x&=\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi+a(\varphi)\\y&=\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi+b(\varphi)\end{aligned}\right\}\tag{1-1}$$

式（1-1）就是一般旋轮线方程，也叫做单参数平面运动方程。

二、滚线方程

前已述及，因为一般旋轮线上的M点是动平面内的任意一点，那么它也可以位于滚线上。而滚线是动瞬心线，其上与定瞬心线相接触的点的速度为零，即

$$v=0$$

亦即

$$\begin{aligned}v&=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\\&=\omega\sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\\&=0\end{aligned}$$

显然，滚线的滚动角速度不可能等于零，即$\omega\neq0$，因此必有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}=0$$

又因为凡是在动平面内的点，其轨迹都是一般旋轮线，**故均**应满足方程式（1-1），即有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}=-\xi\sin\varphi-\eta\cos\varphi+a'(\varphi)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}=\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi+b'(\varphi)=0$$

式中$a'(\varphi)$和$b'(\varphi)$代表$a(\varphi)$和$b(\varphi)$对φ的一阶导数。

既然点M是动平面上的任意一点，那么就可以取点M合于N点，这样一来，以上两式变为

$$-\xi_0\sin\varphi-\eta_0\cos\varphi+a'(\varphi)=0 \tag{1-2}$$

$$\xi_0\cos\varphi-\eta_0\sin\varphi+b'(\varphi)=0 \tag{1-3}$$

把式（1-2）和式（1-3）两式联立求解，就得到滚线方程

$$\left.\begin{aligned}\xi_0&=a'(\varphi)\sin\varphi-b'(\varphi)\cos\varphi\\ \eta_0&=a'(\varphi)\cos\varphi+b'(\varphi)\sin\varphi\end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

三、底曲线方程

由式（1-4）已求出滚线上的N点在动坐标系$\xi 0'\eta$中的坐标（ξ_0，η_0），若能求出底曲线上的N点在定坐标系里的坐标（x_0，y_0），这坐标的表达式即为底曲线方程式。

显然，上述问题也是一个坐标变换问题

$$\left.\begin{aligned}x_0&=\xi_0\cos\varphi-\eta_0\sin\varphi+a(\varphi)\\ y_0&=\xi_0\sin\varphi+\eta_0\cos\varphi+b(\varphi)\end{aligned}\right\} \tag{1-5}$$

把式（1-4）代入式（1-5）经过整理最后得到

$$\left.\begin{aligned}x_0&=a(\varphi)-b'(\varphi)\\ y_0&=a'(\varphi)+b(\varphi)\end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

式（1-6）就是底曲线方程。

例1-1 如图1-5所示，已知半径为 r 的圆沿 x 轴作纯滚动，试求圆周上0点的轨迹。

解 由图1-5可知，当圆处于初始位置（实线圆）时，圆周上的0点合于定坐标系 $x0y$ 的原点，该圆滚动到任意位置由虚线圆表示，此时圆周上的0点处于0′点。

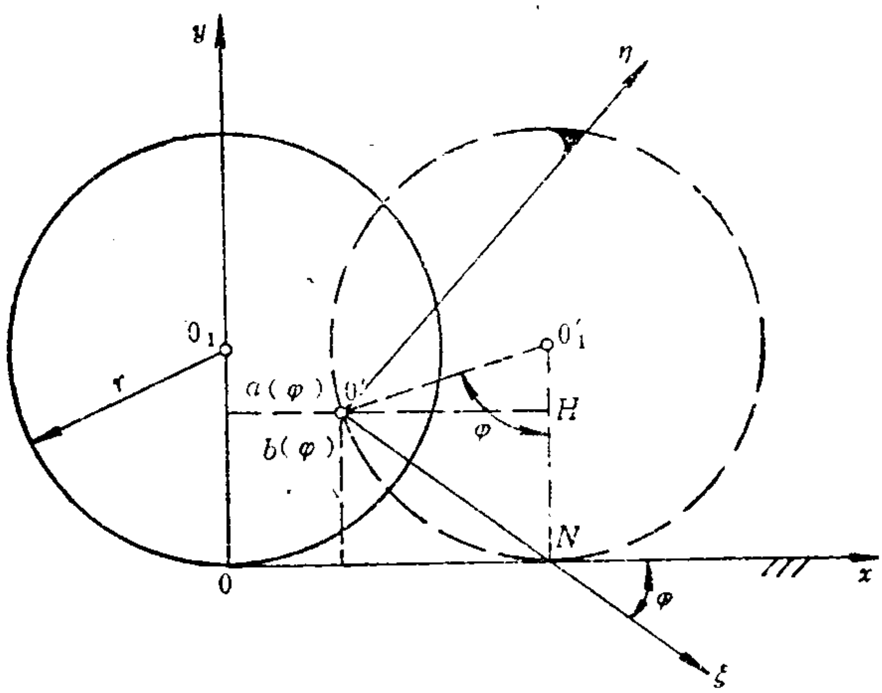

图1-5

按题设条件和坐标系位置，显然有

$$\left.\begin{aligned}\xi&=0\\ \eta&=0\end{aligned}\right\}\qquad ①$$

而

$$\left.\begin{aligned}a(\varphi)&=ON-O'H=r\varphi-r\sin\varphi=r(\varphi-\sin\varphi)\\ b(\varphi)&=O_1'N-O_1'H=r-r\cos\varphi=r(1-\cos\varphi)\end{aligned}\right\}\qquad ②$$

把式①和②两式代入式（1-1），得到圆周上0点的轨迹方程

$$\left.\begin{aligned}x&=r(\varphi-\sin\varphi)\\ y&=r(1-\cos\varphi)\end{aligned}\right\}\qquad ③$$

显然，式③是以φ 为参变量的旋轮线参数方程。

§1-3 包 络 线

设曲线族的方程式为

$$f(x,\ y,\ \varphi)=0 \tag{1-7}$$

当参数φ每取一定值时，如图1-6所示，就有一条曲线 L_1，L_1'，L_1''……如果有一条曲线L_2与曲线族中每一条曲线 L_1，L_1'，L_1''……都相切，切点依次为M，M'，M''……那么曲线 L_2 就叫做曲线族（L_1、L_1'、L_1''……）的包络线。

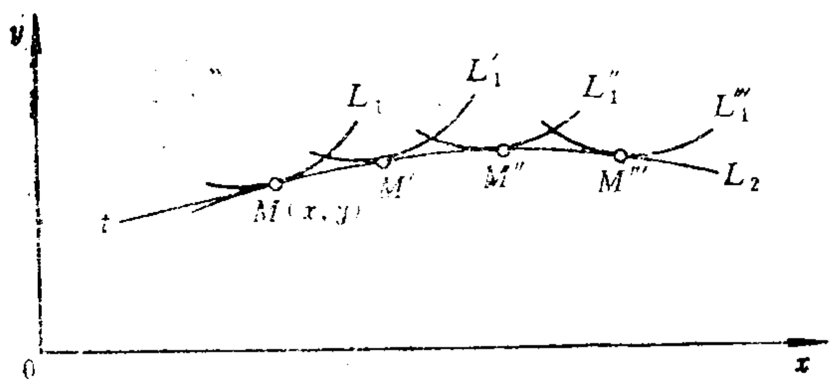

图1-6

已知曲线族f（x，y，φ）$=0$时，求其包络线的方法是：把曲线族方程式（1-7）对参数φ求偏导数得到

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}f(x,\ y,\ \varphi)=0 \tag{1-8}$$

然后把式（1-7）和式（1-8）两式联立解出

$$\left.\begin{aligned}x&=f_1(\varphi)\\y&=f_2(\varphi)\end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

就是包络线的参数方程。

下面我们来证明上述求包络线的方法的科学性。显然，如果包络线L_2与曲线族（L_1，L_1'，L_1''……）中任意一条曲线的切点$M(x,\ y)$同时满足式（1-7）和式（1-8），那么问题就得到了

证明。

$M(x, y)$本来就是曲线族$f(x, y, \varphi)=0$上的点，它当然满足式（1-7）。因此，只要证明$M(x, y)$满足式（1-8），即点M是包络线上的点，就可以了。为此，首先把式（1-7）对参数φ求全微分，为简化书写形式，令$f(x, y, \varphi)=f$，故有

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi=0 \tag{1-10}$$

因为$d\varphi$为任意数，即$d\varphi\neq0$，所示式（1-9）成立的条件是

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0 \tag{1-11}$$

为了证明式（1-11）成立，我们过点$M(x, y)$作切线Mt同时切于曲线族中的一条曲线L_1和包络线L_2，那么

$$Mt\begin{cases}\text{切于 } L_1 \text{ 时的斜率为} -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} & \text{〔据式（1-7）〕}\\[2ex] \text{切于 } L_2 \text{ 时的斜率为} \dfrac{dy}{dx} & \text{〔据式（1-9）〕}\end{cases}$$

显然有

$$-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}=\frac{dy}{dx}$$

由此得

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

即式（1-11）成立。至此，问题已经得到证明。

例1-2 求圆族$(x-a)^2+y^2-r^2=0$的包络线。

解

$$f(x, y, a)=(x-a)^2+y^2-r^2=0 \tag{①}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}=-2(x-a) \tag{②}$$

由式②得 $x=a$，代入式①得到圆族包络线方程为

$$y=\begin{cases}+r & \text{（上包络线）}\\ -r & \text{（下包络线）}\end{cases}$$

这两条包络线示于图1-7

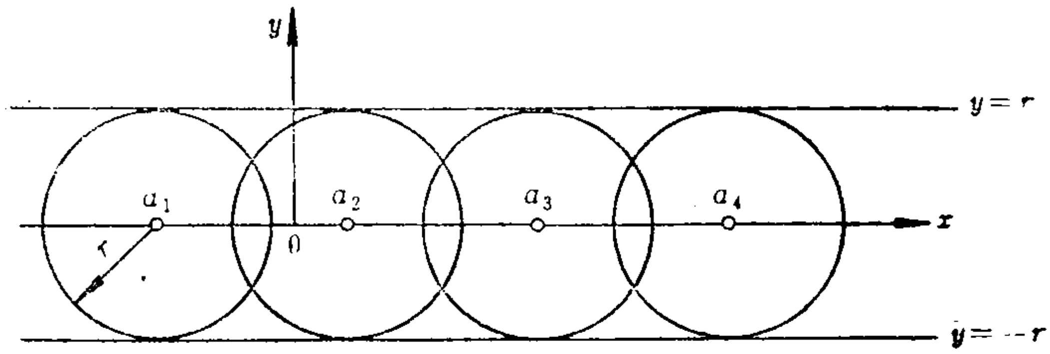

图1-7

§1-4　一般旋轮线的法线定理

一般旋轮线的法线定理——连接一般旋轮线上的一点和与之相对应的瞬时中心的直线，是一般旋轮线在该点的法线。

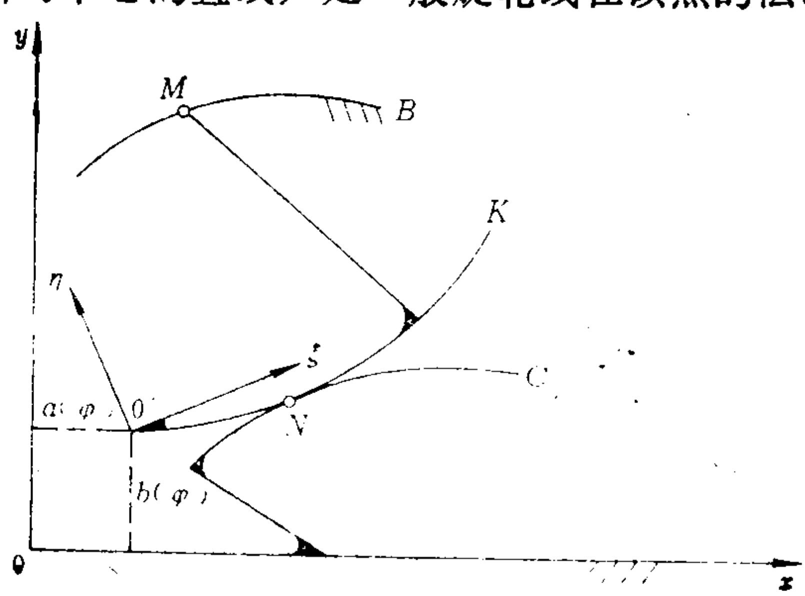

图1-8

B——一般旋轮线　*K*—滚线　*C*—底曲线