

一阶逻辑与 一阶理论

● 叶 峰 编著

现代逻辑
丛书

YIJIE
LUOJI
YU
YIJIE
LILUN

现代逻辑丛书

●此项研究成果受国家社会科学基金资助●

一阶逻辑与一阶理论

叶 峰 编著

中国社会科学出版社

(京)新登字030号

责任编辑：李 辉

责任校对：吴 俊

封面设计：谭国民

版式设计：王丹丹

一阶逻辑与一阶理论

YIJIEUOJI YU YIJIELILUN

出版发行 中国社会科学出版社

(北京鼓楼西大街甲158号)

编码 100720 电话 441531

经 销 新华书店

印 刷 民族印刷厂

850×1168毫米 32开本 7.25 印张 2 插页 184千字

1994年1月第1版 1994年1月第1次印刷

印数1—1200册

ISBN 7-5004-1307-6/B·275 定价：10.00元

《现代逻辑丛书》出版说明

现代逻辑内容很丰富，特别是符号逻辑或称数理逻辑，包括几个分支，如：逻辑演算，集合论，模型论，递归论，证明论等。在古典逻辑演算以外，近年来模态逻辑有了很大的发展，它又被称作哲理逻辑。

符号逻辑不仅内容丰富，还和许多学科如哲学、数学、计算机科学、语言学及心理学等有联系，影响及于这些学科，有些影响甚至是带根本性的。

我国大学的逻辑专业，计算机专业，数学专业，哲学专业等，都开设和符号逻辑有关的课程。

但是，这方面介绍性的书籍和教材在国内还不多见。本丛书的目的是提供一批叙述简明易懂和不需要较多数学知识的入门性书籍和教材。

《现代逻辑丛书》被列入国家第七个五年计划期间重点研究课题，由北京大学哲学系逻辑教研室王宪钧教授主编，教研室及校外任课教员执笔编写。

09/65/01

前 言

本书的内容属数理逻辑的基础部分。前三章的主题是一阶逻辑：第一、二章分别讲述一阶语言的语法、语义；第三章介绍一个一阶推理系统，并证明了它的语义完全性。一阶逻辑是各种哲理逻辑（或称应用逻辑）的基础，它在计算机科学、人工智能等领域也有着广泛的应用。这三章完整地介绍了一阶逻辑的中心内容。本书第四章包含了关于一阶逻辑的一些其它论题，以及模型论的一些基础内容。我们以“一阶理论”这一概念为中心组织这些材料，它们与前三章一起，可作为继续学习数理逻辑中的“四论”的基础。

本书不假定读者具备数理逻辑的任何基础知识。有关数理逻辑的论述都是从最基本的概念开始的。除一些例子涉及代数学中的群、环、域等概念外，只需具备直观集合论的一些基本知识就足以阅读本书了。不过，本书的原稿是北京大学哲学系逻辑学专业本科生用的讲义。在学习这门课之前，学生们已学过了“逻辑演算”与“素朴集合论”两课程（它们的讲义都已列入这套《现代逻辑丛书》中）。其中的“逻辑演算”已包括了命题演算与纯谓词演算（不含函数符号及常量符号），只是讲述方式较为直观，适合于不具备集合论基础知识的初学者学习。因此，在本书中，我们不再单独介绍命题逻辑，而直接从一阶语言的语法开始讲述。同时，我们广泛运用了集合论的语言，使得有关的定义、证明更为精确、严密。所以，本书不同于普通的入门教材，它的目的是为学生继续学习各种哲理逻辑及数理逻辑各分支打好严密的基

础。

为满足更多读者的需要，为便于读者自学，在修改讲义而编成此书时，我们补充了一些例子与习题，并增加了一个较长的绪论。绪论的第一节介绍了逻辑学的一些基本常识，以及一阶逻辑的研究目的与方法及意义。未接触过逻辑学的读者可以从这里得到一些必要的背景知识。绪论的第二节说明了阅读本书所需的预备知识，以及书中采用的一些术语与记号。

国内外已出版的数理逻辑基础教材已有许多。在编写本书时，我们参考了一些同类书籍，以及逻辑学界前辈及同事的一些意见，并依据自己的一点教学经验，在材料的取舍、讲述的方式及侧重点等方面作了以下一些安排：

(1) 注重严密性，有关概念都有精确的定义，有关定理都有严格的证明。例如，关于定义公式的说明，有关代入的一些定义与结论都力求严格、准确。对语法歧义性的详细讨论，以及讲述语义时对合同引理与代入引理的强调，都是为此目的。

(2) 用较多的篇幅讲述语义。第二章中先详细讨论了各种语义概念，并从语义的角度直接证明了一些常见的有效公式的有效性。对公式的等值替换、约束变元易字、前束范式等，也都先从语义的角度进行论述。这些都有助于学生加强对公式语义的直观把握。我们相信，对于学生来说，这比形式系统内的形式推导更为重要。

(3) 讲述一阶推理系统时，我们主要强调，构造推理系统的目的，是要达到语义完全性。因此，书中尽快地证明了演绎定理、反证法原理、重言式定理等有用的推演规则，一切以证明完全性定理为中心，不过多地作系统中的形式推演。书中采用的是逻辑教科书中较常见的系统，它的逻辑公理使得我们能很快地证明演绎定理、反证法原理等。另外，本书选择了不用概括规则的系统，这样可以简化演绎定理的表述及证明，且使得系统中有前提的公式推演更符合“从前提推出结论”的直观涵义。

(4) 突出语义概念与语法概念之间的对应关系, 如有效性、可满足性、语义后承与逻辑定理、一致性、可推演之间的对应。第二章的许多结论在第三章有对应的结论(有些是在习题中)。经常比较这些互相对应的概念与结论, 可以加深对有关内容的理解。

在编写本书的过程中, 编著者得到了许多逻辑学界前辈与同事的指导与帮助。王宪钧教授、晏成书教授、宋文坚教授始终关心本书的编写与出版, 提出了许多宝贵的指导意见。刘壮虎副教授、郭世铭副教授审阅了全书原稿, 指出了原稿中的缺漏与错误, 并提出了有益的修改建议。编者谨在此对他们表示衷心的感谢。

叶 峰

1992年7月于北京大学

目 录

绪论	1
§ 1 什么是一阶逻辑	1
§ 2 预备知识与记号的说明	19
第一章 一阶语言的语法	21
§ 1 符号表	21
§ 2 项	25
§ 3 公式	29
§ 4 归纳法	35
§ 5 语法歧义性	38
§ 6 归纳定义 子项 子公式	43
§ 7 定义公式	48
§ 8 自由变元 约束变元	53
§ 9 代入	57
第二章 一阶语言的语义	64
§ 1 结构与解释	64
§ 2 满足关系	68
§ 3 合同引理 代入引理	77
§ 4 语义后承	83
§ 5 有效性与可满足性	88
§ 6 一些重要的有效式	92
§ 7 等值替换 易字 范式	98
第三章 一阶推理系统	105

§ 1	一阶推演	105
§ 2	演绎定理	111
§ 3	重言式定理	115
§ 4	有关量词及等词的推演规则	121
§ 5	一致性	130
§ 6	完备性定理	138
§ 7	Herbrand定理	148
第四章	一阶理论	156
§ 1	定义及例子	156
§ 2	初等类 初等等价	161
§ 3	Löwenheim-Skolem定理	168
§ 4	同构	171
§ 5	范畴性与完备性	180
§ 6	定义扩张	185
§ 7	相对化 解释	193
§ 8	一阶算术	203
§ 9	公理集合论	210
参考书目	216
术语索引	217
符号索引	222

绪 论

§ 1 什么是一阶逻辑

逻辑学究竟研究些什么？它有哪些基本问题？它用什么方法解决这些问题？它的研究成果有什么意义？一阶逻辑又是指什么？在这绪论的第一节，我们将通俗地解答这些问题。这里的论述不可能是完全的，我们也不想面面俱到。我们只是希望为未接触过逻辑学的读者介绍一些逻辑学的基本常识，并且对全书的内容作一个直观的说明，以使得读者更易于理解正文中那些抽象的定义、定理等等。

让我们从逻辑学中一些最基本的概念开始。

1.1 句子与命题

这里所谓句子，是指有意义的陈述句。命题则指句子所表达的意义。

日常语言的陈述句中有时会出现一些代词，只有确定了它们所代表的事物、时间、地点等等，句子才有确定的意义，也才表达一个确定的命题。如“我是一个学生”、“昨天是星期天”、“那儿有枝笔”等都是这类句子。类似地，表达数学命题的陈述句中有时包含一些变元或符号，它们的意义可能也不确定。如句子“ f 是连续函数且 $f(x)=2$ ”、“ n 是偶数”等等。在实际的场合，这种句子当然总是在一定的前后文关系中出现，而整个论述总是有确定的意义。如句子“对任何自然数 n ，如果 n 是偶数，那么 n

+1是奇数”有确定的意义。但逻辑学研究要分析句子的结构，因此要考察这种复合句的分句，所以不得不将“ n 是偶数”也看作一个有意义的陈述句，只是说它的意义不确定。事实上，这种包含意义不确定的符号的句子，在逻辑学研究中扮演着更为重要的角色。因为逻辑学并不关心句子的特定意义，那是具体的各科学分支的任务。

一个命题要么为真，要么为假。同样，一个有确定意义的句子要么为真、要么为假。对于意义不确定的句子，我们说，它们的真、假也不确定，但可以指定其中的变元、符号所代表的对象，使它们为真、或为假。

数学公式也包含在这里所说的句子中，如“ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ”、“ $x+y \leq x \cdot y$ ”等等。

在数学中，有时又将含有符号的句子称作条件。例如，在集合论中，讨论偏序关系时，我们说：偏序关系 R 由如下两个条件定义：

(O₁) 对所有 x ，并非 xRx ；

(O₂) 对所有 x, y, z ，如 xRy 且 yRz ，则 xRz 。

对于条件，我们一般称满足或不满足它们。例如，我们说，当 R 代表自然数的顺序关系“小于”时，条件(O₁)、(O₂)都被满足。

数学语言中的一种情况要特别注意。句子“ $x+y \leq x \cdot y$ ”中含有变元，其意义不确定： x, y 代表数1时它为假； x, y 代表数3时它为真。在这个句子前加上短语“对所有自然数 x, y ”就得到“对所有自然数 $x, y, x+y \leq x \cdot y$ ”，这是个有确定意义的句子，它是假的。因此这里有两个不同的句子，但在实际的数学语言中，短语“对所有…”常常被省略掉。

1.2 推理、推理规则

一个推理由一些前提与一个结论组成，前提与结论都是句

子。以下是一个推理：

(1) 所有的人都会死。

苏格拉底是人。

所以，苏格拉底会死。

一个推理从逻辑的角度可视为一个推理规则实际应用的结果。推理规则说明从怎样的前提可以推出怎样的结论。例如，以下格式代表一个推理规则：

(2) 所有 M 是 P 。

a 是 M 。

所以， a 是 P 。

应用该规则时，用普通名词或形容词替换 M 与 P ，用专有名词替换 a ，就得到一个实际的推理。例如，用“人”替换 M ，“会死的”替换 P ，“苏格拉底”替换 a ，该规则就说明，从(1)的两个前提可推出它的结论。

推理规则的例子很多，如，以下格式也代表一个推理规则：

(3) 如果 A ，那么 B 。

并非 B 。

所以，并非 A 。

这里的 A 、 B 可代表句子。

假如用某个推理规则，从真的前提只能推出真的结论，就称它是正确的。上面的两个推理规则都是正确的，而以下的规则显然不正确：

有些 M 是 P 。

a 是 M 。

所以， a 是 P 。

较为常见的是，用一系列相继的推理，从一些总前提推出一结论。在这一系列的推理中，每个推理的前提可以是以前推理的结论，而其余的前提就组成了总前提。假如这一系列推理所用的规则都是正确的，那么显然，只要总前提都是真的，最后推出

的结论也必定是真的。

找出正确的推理规则当然是逻辑学的一项任务，不过现代逻辑学主要探讨一些更为深入的问题。

1.3 证明

这里考察的所谓证明，其典型的例子，是数学中的那些证明。通过分析这些证明，可以很自然地引出现代逻辑学的基本问题。

我们先看一个证明的目的是什么，它究竟要证明什么。

一个证明中一般也有一些前提和一个结论。我们说，证明的目的，是要使我们认识到，在这些前提和这个结论之间，存在着一种必然的联系。这种联系可描述为：只要这些前提都是真的，这个结论也必然为真。或者可描述为：这些前提的真必然地蕴涵结论为真。逻辑学中称这种联系为逻辑蕴涵关系，即这些前提逻辑地蕴涵该结论。有时也称之为：该结论是这些前提的逻辑后承。

在数学中常遇到“假设……，求证……”这类问题。这就是要求给出一个证明，以表明“假设”后面的那些前提逻辑地蕴涵“求证”后面的那个结论。

在特殊的情形，一个证明中可能没有前提，它是直接证明一个结论。这与前面所说的一般情形并没有实质性的区别。例如，要直接证明一个形如“如果A，那么B”的结论，也就相当于证明前提A逻辑地蕴涵结论B。没有前提而直接证明一个结论，就是要证明这个结论是必然地真的。

这里对“逻辑地蕴涵”这一概念的定义还不够清晰、严密。对“只要前提真，结论也必然真”中的“只要……，也必然……”这种词的意义，以及对“前提真必然地蕴涵结论真”中的“必然地蕴涵”这种词的意义，都还需作更明确的解释。这里所说的必然，当然应指逻辑上的必然。但究竟何谓逻辑上的必然，也还需

进一步的解释。这些都留待稍后完成。这里只需说明逻辑蕴涵关系的一个重要特征。

逻辑蕴涵关系，是句子之间在意义上的一种联系，是完全客观的，与我们能否证明存在着这种联系无关。说一些前提逻辑地蕴涵一个结论，与说我们可以实际地证明存在着这种逻辑蕴涵关系，是完全不同的两件事。这类似于如下一种观念：一个命题非真即假，是完全客观的，与我们能否证明它为真或证明它为假无关。因此，也许有一些真命题我们永远也无法证明。同样地，或许会有一些前提，在客观上确实逻辑地蕴涵某个结论，但我们却永远无法证明这一点。

以上说明了证明的目的。下面再看一个证明的构成，看其中如何证实前提是逻辑地蕴涵结论。

一个简单的证明由一系列推理组成，一系列推理直接从前提出推出结论。假如这些推理所用的规则都已知为正确的，那么显然，只要这些前提真，结论也必定真，因此前提逻辑地蕴涵结论。事实上，假如用一个明显地正确的推理规则，从一些前提推出一个结论，那么，这些前提与该结论之间的逻辑蕴涵关系也是十分显然的。因此，假如在一系列推理中，每一步所用的规则都是明显地正确的，那么，这一系列推理，就是将一个较复杂的、不易认识到的逻辑蕴涵关系，分解成了一系列较简单的、明显的逻辑蕴涵关系，以此来证实一个复杂的逻辑蕴涵关系的存在性。

在证明中，除了一些推理之外，可能还用到一些证明方法。例如，要证明一些前提逻辑蕴涵一个结论“如果**A**，那么**B**”，可以将**A**作为一个新的前提，而证明它们蕴涵**B**。这是条件证明法。又如，要证明一些前提逻辑蕴涵**B**，可以将“并非**B**”作为一个新前提，而从中推出矛盾。这是所谓反证法。此外还有归谬法等等。

归纳起来，我们说，一个证明是用一些推理规则与证明方法构造起来的。假如可用一些推理规则与证明方法，构造出一个以

句子 A_1, \dots, A_n 为前提, 句子 B 为结论的证明, 一般也称可用这些规则与方法从前提 A_1, \dots, A_n 推出结论 B 。

1.4 逻辑学的基本问题

前面的分析得出了与证明有关的两方面的概念。一是逻辑蕴涵关系。这是句子间在意义上的一种联系, 是客观的。证明的目的就是要表明它的前提与结论之间存在这种联系。另一方面是推理规则与证明方法, 这是构造证明的工具。

每个熟悉数学证明的人都知道, 我们可以将一个数学证明写得十分详细, 将每一步稍复杂的推理都尽量地分解为多步较简单的推理, 从而使证明中的每一步都极其简单。事实上, 逻辑学家可以列出所有这些最简单的推理规则及证明方法。数学证明的技巧, 在于巧妙地应用这些简单的推理规则及证明方法, 构造一个长长的证明, 以证明所需的结论。日常生活, 以及其它科学研究领域中的证明, 也是一样的。于是, 一个很自然的问题是, 用这些规则和方法, 能否证明所有的逻辑蕴涵关系? 是否可能有些真实的逻辑蕴涵关系, 用已知的证明工具是无法证明的? 这就是逻辑学要回答的基本问题。我们将它更明确地表达如下:

逻辑学基本问题: 找出一些推理规则及证明方法, 使得对一定范围内的任意一些句子 A_1, \dots, A_n, B , 假如 A_1, \dots, A_n 作为前提逻辑地蕴涵结论 B , 那么, 一定可以用这些推理规则及证明方法, 从前提 A_1, \dots, A_n 实际地推出结论 B 。

如一些推理规则及证明方法满足了上述要求, 则称这些规则及方法组成了一个**完备(或完全)**的推理系统。所谓完备(或完全), 是指: 仅用这些规则及方法, 就足以证明所有的逻辑蕴涵关系, 即它们作为证明的工具是完备的。

以上对逻辑学基本问题的描述中包含了“对一定范围内的任意一些句子”这种限制。这是因为, 句子的种类很多, 而且日常语言中的很多句子, 其语义很难严格、准确地描述。不能精确地

描述句子的意义，也就不能精确地描述句子间的逻辑蕴涵关系，由此也就无法解决逻辑学基本问题。因此，要对所有的句子提出一个完备的推理系统，几乎是不可能的。在逻辑学中，我们一般只考虑一定范围内的句子，先设法严密、精确地描述这些句子之间的逻辑蕴涵关系，然后提出一些推理规则及证明方法，并设法证明它们组成了一个完备的推理系统。事实上，各个逻辑学分支分别考虑一些不同类的句子。

一阶逻辑就是这些逻辑分支之一。与其它逻辑分支相比，一阶逻辑所考虑的句子是最简单的。这些句子最重要的特征是，它们之间的逻辑蕴涵关系可以用数学语言精确地定义。其它逻辑学分支，如模态逻辑、道义逻辑、认知逻辑等等，它们所考虑的句子范围，都比一阶逻辑的要大些，是在一阶逻辑的基础上，再考虑一些其它类型的句子。因此，一阶逻辑是其它一些逻辑分支的基础。

目前我们还不能明确地描述一阶逻辑所考虑的句子范围。但可以指出，它实际上包括了所有那些可精确地表达数学或自然科学命题的句子，也包括了日常语言中那些纯描述性的句子，如前面§1.2中例举的推理(1)中的前提与结论。另一方面，它不包括断定什么是可能的，或什么是必然的这种类型的句子，也不包括涉及“允许”、“必须”(或“应该”)等伦理、道义概念的句子，还有涉及“知道”这种认知概念的句子，以及带时态的句子，带虚拟语气的句子，等等。在数学语言中不会出现这类句子。而且，在象物理学那样的精确科学的语言中，总能够避免使用这类句子。研究这类句子的逻辑蕴涵关系及推理、证明等等，分别是模态逻辑、道义逻辑、认知逻辑、时态逻辑、以及虚拟式条件句逻辑等逻辑分支的任务。

1.5 逻辑蕴涵

显然，不清晰、严密地定义逻辑蕴涵关系，也就谈不上解决

逻辑学基本问题。这里，我们将在一阶逻辑所考虑的句子范围内，更精确地描述“逻辑地蕴涵”的涵义。

先看一个日常语言中的例子。显然，从直观上可以说，只要两个前提

(1) 所有人都会死。

(2) 苏格拉底是人。

都是真的，以下结论也必定为真：

(3) 苏格拉底会死。

同时，我们也说，单个前提(1)不能逻辑地蕴涵结论(3)，因为，当一个人从句子(1)得出句子(3)时，他实际上隐含地假设了另一前提(2)。

如何更精确地表达这种意思？分析这些句子可以发现，其中出现的词可分成两类。第一类是那些指称个体、性质、类等对象的词，如“苏格拉底”、“会死的”、“人”。这种词都有特定的内容，要理解它们的意义，就要了解它们所指称的对象。余下的第二类词我们称作逻辑常项。如以上例句中的“是”、“所有的”。常见的逻辑常项还有“或者”、“而且”、“并非”、“如……，则……”、“当且仅当”、“有些”等这类词。逻辑常项与前述第一类词显然很不相同。它们不指称什么对象。它们或是系词、联结词，是用来构成句子的；或是所谓量词，如“所有的”、“有些”，是用来限定对第一类词的断定范围的。对逻辑常项的意义的理解，也不依赖于我们对句子所描述的客观世界的理解。我们说，逻辑常项只有纯逻辑上的意义。

区分了句子中的第一类词与逻辑常项，就可以更清楚地解释“逻辑地蕴涵”的涵义。我们说，我们知道前提(1)、(2)逻辑地蕴涵结论(3)，是因为，即使对句子中第一类词的意义毫无了解，即使不知道“苏格拉底”、“人”、以及“会死的”指的是什么，仅仅凭我们对逻辑常项的意义的理解，就能从(1)、(2)为真，得出(3)为真。另一方面，单从(1)为真，就不能这样得出(3)为