

微积分

经济管理
数学基础



刘正根 丁京禹 刘丽 朱南 编著
西南财经大学出版社

责任编辑：左 强

封面设计：潘令宇

微 积 分

经济管理数学基础（一）

西南财经大学出版社出版 （成都市光华村）

四川省新华书店发行 郫县科技书刊印刷厂印刷

787×1092毫米 1/32 印张 17.8 字数 380千字

1988年1月第一版

1988年1月第一次印刷

印数：1—26 000

书号：ISBN7—81017—055—4/F·43

定价 3.95 元

出版前言

作为高等数学的入门科学——微积分，是一门基础理论科学。它来自实践，以客观世界中的空间形式和数量关系为研究对象。一般说来，那里有变量间的关系那里就有数学。每一门科学只有当它成功地运用了数学的时候，才能真正地达到完善的地步。因而，数学在各门经济学科中理应而且必须占有重要的地位。

本书是受四川省高等教育自学考试委员会的委托编写的经济管理类专业成人高等教育自考教材，是在原内部试用教材的基础上听取各方面的意见后重新编写的。全书共分九章，内容包括：函数，极限，连续，一元、多元函数微积分，无穷级数和常微分方程等。新编教材较原内部教材有很大的不同。书中部分概念的提法更为精炼而严谨，并增添了经济领域中的应用例题和习题。各章还增加了部分概念题，便于读者复习思考，加深理解和方法的掌握。教材中带有“*”号的内容可作一般了解。同时我们还编写了习题详解作为本教材的配套书另册发行。

本书为四川省高等教育经济管理专业类成人自学考试必读教材，亦可作为财经院校本科、专科、电大、函大、职大及经济类管理干部培训班的教材或参考书。

参加本书编写的有刘正根、丁京禹、刘丽、朱南等同志，由刘正根同志担任总纂和审定工作。

我们对给原内部教材提出宝贵意见和建议的热心读者、同仁以及为本书做了一定工作的史代敏同志表示感谢。

限于我们的水平和经验，错误在所难免，敬请读者批评指正，谨此致谢。

编 者

1987年7月于光华园

目 录

第一章 函数 极限 连续

§ 1.1	函数概念	1
§ 1.2	函数的简单性质	13
§ 1.3	反函数 复合函数	17
§ 1.4	初等函数	20
§ 1.5	数列的极限	28
§ 1.6	函数的极限	34
§ 1.7	无穷小量及其运算定理	43
§ 1.8	极限的运算法则	47
§ 1.9	极限存在准则 两个重要极限	53
§ 1.10	无穷小量的比较	61
§ 1.11	函数连续性概念	63
§ 1.12	闭区间上连续函数的基本性质	73

习题一

第二章 一元函数微分法

§ 2.1	引出导数概念的实例	83
§ 2.2	导数概念	85
§ 2.3	几个基本初等函数的导数	94
§ 2.4	导数的运算法则	100
§ 2.5	反函数的导数	105
§ 2.6	复合函数的导数	107
§ 2.7	导数基本公式表	113

§ 2.8	隐函数的求导法则	115
§ 2.9	高阶导数	117
§ 2.10	变化率在经济问题中的应用	119
§ 2.11	微分	123
§ 2.12	微分求法与微分形式不变性	127
§ 2.13	微分在近似计算中的应用	129

习题二

第三章 中值定理与导数的应用

§ 3.1	微分中值定理	141
§ 3.2	罗彼塔法则	146
§ 3.3	函数的单调增减性的判定	158
§ 3.4	函数的极值及其求法	161
§ 3.5	极值在最优化问题中的应用	169
§ 3.6	曲线的凹向与拐点	177
§ 3.7	曲线的渐近线	181
§ 3.8	函数图形的描绘	185

习题三

第四章 不定积分

§ 4.1	不定积分的概念	195
§ 4.2	不定积分的性质	200
§ 4.3	基本积分公式	201
§ 4.4	换元积分法	206
§ 4.5	分部积分法	222
§ 4.6	有理分式函数的积分	230

习题四

第五章 定积分

§ 5.1	定积分的概念	247
§ 5.2	定积分的性质 中值定理	252
§ 5.3	微积分基本公式	263
§ 5.4	定积分的换元法	270
§ 5.5	定积分的分部积分法	275
§ 5.6	广义积分 Γ -函数	281
§ 5.7	定积分的应用	292
§ 5.8	定积分的近似计算	309

习题五

第六章 无穷级数

§ 6.1	数项级数	325
§ 6.2	级数的基本性质	329
§ 6.3	正项级数及其敛散性的判别法	335
§ 6.4	任意项级数绝对收敛	341
§ 6.5	幂级数	346
§ 6.6	泰勒公式与泰勒级数	352
§ 6.7	一些初等函数的幂级数展开式	357
§ 6.8	应用幂级数进行近似计算	369

习题六

第七章 多元函数的微分法及其应用

§ 7.1	空间解析几何简介	381
§ 7.2	多元函数的概念	392

§ 7.3	二元函数的几何意义	395
§ 7.4	二元函数的极限和连续	400
§ 7.5	偏导数	406
§ 7.6	高阶偏导数	411
§ 7.7	全微分及其应用	414
§ 7.8	复合函数的求导法则	419
§ 7.9	隐函数求导公式	426
§ 7.10	二元函数的极值	430
§ 7.11	条件极值及其在最优化问题中的应用	439
§ 7.12	最小二乘法	444

习题七

第八章 重积分及其应用

§ 8.1	二重积分的概念及性质	458
§ 8.2	利用直角坐标计算二重积分	465
§ 8.3	利用极坐标计算二重积分 广义二重积分	478

习题八

第九章 微分方程简介

§ 9.1	微分方程的一般概念	494
§ 9.2	可分离变量的一阶微分方程	497
§ 9.3	可化为可分离变量的微分方程	502
§ 9.4	一阶线性微分方程	510
§ 9.5	二阶微分方程的几种简单形式	516
§ 9.6	二阶常系数线性微分方程	519

习题九

附录	概念题	534
----	-----	-----

第一章 函数 极限 连续

函数、极限、连续是高等数学中几个最重要、最基本的概念。函数是微积分研究的对象；极限则是揭示变量之间的变化趋势的工具，而且又是建立其它基本概念的基础；与极限概念密切相关的就是函数的连续性，它反映了函数的重要性态。

这一章，我们将分12节介绍上述内容：§1.1—§1.4（函数），§1.5—§1.10（极限），§1.11—§1.12（连续）。

§1.1 函数概念

函数是高等数学中最重要的基本概念之一，是微积分学研究的对象。在经济领域中涉及的大量数量关系从理论上讲，都可以用函数关系来表达。因此，作为经济工作者熟悉和掌握这个概念是很重要的。我们将从本节开始到§1.4在初等数学的基础上进一步讨论函数的概念及其性质，并结合经济问题举一些函数关系的实例。

1. 实数的绝对值

设 a 为一实数， a 的绝对值就是指：当 a 为正数时， a 的绝对值就是它本身；当 a 为负数时， a 的绝对值就是与它相反的正数 $-a$ ；零的绝对值就是零。 a 的绝对值用记号

$|a|$ 表示, 即

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{当 } a \geq 0; \\ -a, & \text{当 } a < 0. \end{cases}$$

很明显, 对任意实数 a 有关系式

$$-|a| \leq a \leq |a|.$$

事实上, 如果 $a \geq 0$, 显然有 $-|a| \leq a = |a|$; 如果 $a < 0$, 则有 $-|a| = a < |a|$, 所以无论 a 是怎样的实数都有

$$-|a| \leq a \leq |a|.$$

由此, 可得不等式 $|a| \leq k$ ($k \geq 0$) 与不等式 $-k \leq a \leq k$ 等价.

关于绝对值有如下基本性质:

1° 和的绝对值不大于各项绝对值的和, 即

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

因为 $-|a| \leq a \leq |a|$, $-|b| \leq b \leq |b|$

把两不等式相加得

$$-(|a| + |b|) \leq a+b \leq |a| + |b|.$$

这个不等式是与不等式 $|a+b| \leq |a| + |b|$ 等价的.

一般对任意有限项和的绝对值有如下不等式成立

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k|$$

(k 为正整数)

2° 差的绝对值不小于绝对值的差, 即

$$|a-b| \geq |a| - |b|.$$

因为 $|a| = |(a-b) + b| \leq |a-b| + |b|$

移项得 $|a-b| \geq |a| - |b|.$

3° 乘积的绝对值等于各项绝对值的乘积, 即

$$|ab| = |a| \cdot |b|.$$

一般有 $|a_1 a_2 \cdots a_k| = |a_1| \cdot |a_2| \cdots |a_k|$

4° 商的绝对值等于绝对值的商，即

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

2. 区间 邻域

我们研究函数时，常常是限制在一部分实数范围内去考虑，这部分实数往往是介于两个实数之间的一切实数。为此，我们引入区间的概念。

区间 介于某两个实数 a 与 b ($a < b$) 之间的全体实数称为区间。而把实数 a 与 b 叫做区间的端点。

称满足不等式

$$a < x < b$$

的一切实数 x 的全体为开区间，记为 (a, b) ；满足不等式

$$a \leq x \leq b$$

的一切实数 x 的全体为闭区间，记为 $[a, b]$ ；满足不等式

$$a \leq x < b \text{ 或 } a < x \leq b$$

的一切实数 x 的全体为半开区间，记为 $[a, b)$ 或 $(a, b]$ 。

在数轴上，区间表示介于两点之间的线段上的点的全体，而这两点为区间的端点，两点间线段的长度 $b - a$ 称为区间的长度。

除了有限区间外，还有无穷区间。

$(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数, 或记为 $-\infty < x < +\infty$.

$[a, +\infty)$ 表示不小于 a 的实数的全体, 或记为 $a \leq x < +\infty$.

$(-\infty, b]$ 表示不大于 b 的实数的全体, 或记为 $-\infty < x \leq b$.

应该注意, 这里引用的符号 “ $-\infty$ ”、“ $+\infty$ ” 不能看作通常的数.

上面已就区间的概念作了介绍, 下面再介绍邻域的概念.

邻域 设 a 与 $\delta (\delta > 0)$ 为两个实数, 称满足不等式 $|x - a| < \delta$ 的一切实数 x 的全体为以点 a 为中心, δ 为半径的 δ -邻域, 记为 $\delta(a)$.

由于不等式 $|x - a| < \delta$ 等价于不等式

$$-\delta < x - a < \delta.$$

亦即

$$a - \delta < x < a + \delta.$$

而满足这个不等式的一切实数 x 的全体就是开区间 $(a - \delta, a + \delta)$, 所以, 点 a 的 δ -邻域 $\delta(a)$ 就是以点 a 为中心, 长度为 2δ 的开区间 (图1.1).

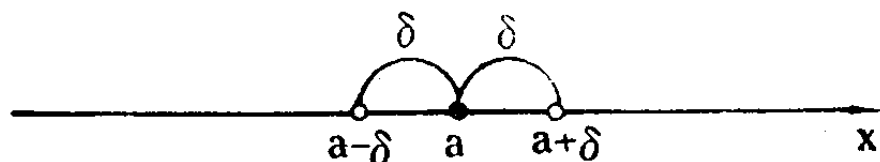


图 1.1

3. 常量 变量

在观察自然现象、社会现象或技术过程时，我们常常会遇到各种不同的量，其中有的量在一定过程中始终保持不变的数值，这种量为常量；有的量在过程进行中可取不同的数值，这种量称为变量。例如，某种商品的价格在一定时期内是相对稳定的，因此，可以把它看作常量，而其销售量和销售额通常则是变量。

必须指出，常量与变量的概念是相对的，即一个量在这一过程中是常量而在另一过程中可能是变量，这就要求我们对常量和变量的理解不能绝对化，必须把它和具体的过程联系起来加以考虑。

常量通常以字母 $a, b, c, \dots$ 表示；变量则以字母 $x, y, z, \dots$ 表示。量 x 的每一个值都可用实数轴上的一个点来代表。如果 x 是常量，则用数轴上的一个定点来表示；如果 x 是变量，则用数轴上的动点表示。

4. 函数的定义

在自然科学、技术管理或经济管理中，所遇到的实际问题往往有几个变量同时都在变化，这些变量并不是彼此孤立的改变，而是相互联系、相互制约并按一定规律在变化。在这里我们先就两个变量之间的相依关系的简单情形加以讨论（两个变量以上的情形将在第七章讨论）。首先考察几个实例。

例 1 设某商品的单位成本为5元，现在企业已售出100件，问企业可获利润多少？

很明显，在这个问题中单位成本是常量，单价与利润是变量，单价高，利润多；单价低，利润少。若设 P 表单价， L 表总利润，则 L 与 P 之间有 关系

$$L=100(P-5),$$

上述式子表明了利润 L 与价格 P 之间的相依关系及其内在的变化规律，只要价格 P 确定，利润 L 就随之确定。

例 2 圆的半径 r 和它的面积 S 之间有关系

$$S=\pi r^2$$

其中 π 是常量， r 和 S 是变量。只要 r 取定为某一正数值，面积 S 就有一个确定的值与之对应。所以公式表明了变量 r 和 S 的相依关系及其内在规律。

例 3 工厂中的工资总额、职工人数和工资平均水平之间一般具有关系

$$y=ax$$

式中 y 表示工资总额， x 表示职工人数， a 表示工资平均水平。

类似上面的例子在实际中是很多的，它们虽然代表不同的具体问题，但都具有一个共同的特点，那就是它们都反映了两个变量同时变化的相依关系。这种相依关系，实质上给出了两个变量间的一种相互制约的对应规律（或法则），当其中一个变量在某一范围内取定一数值时，按照这种规律，另一个变量就有确定的值与之对应。抽去上面各问题中的具体意义（个性）而只研究它们的共性，这就形成了数学上的函数概念。

定义 1 设 x 与 y 是两个变量，如果变量 x 在某一范围内每取一值时，按照一定规则，变量 y 就有确定的值与之对应，则变量 y 叫做变量 x 的（一元）函数，记为

$$y=f(x)$$

其中 x 叫做自变量， y 叫做函数或因变量，字母“ f ”表示变量之间的对应规律。

我们从函数的定义中可以看到函数包含有两个要素，即：

1° 两个变量之间的对应规律；

2° 自变量的取值范围。

应当注意的是，函数式中的符号 $f(x)$ 是一个整体，它不表示 f 乘 x ，字母“ f ”应理解为变量 x 与 y 之间对应的确定性规律。

自变量 x 取值范围的全体称为函数的定义域（记为 D ），也就是说函数的定义域就是使函数 y 有意义的自变量 x 的全体。我们只有在定义域范围内来讨论函数才有实际意义。函数的定义域，一般用区间或集合的形式表示。

函数 y 的取值范围称为函数的值域。

在函数的定义中，只讲了变量 x 每取定一值时，变量 y 按照对应规律总有确定的值与之对应，但到底有一个还是有几个确定的值与之对应，没有说明。

若当 x 取一个值时，函数 y 只有一个值与之对应，我们称函数 y 为 x 的单值函数；若当 x 取一个值时，函数 y 有两个或两个以上的值与之对应，我们称 y 为 x 的多值函数。今后如果不加说明，我们研究的函数都是指单值函数。

同一函数关系式 $y=f(x)$ ，其定义域要随 $y=f(x)$ 代表具体问题还是不代表具体问题而有所不同。当 $y=f(x)$ 代表某一具体问题时，其定义域要根据其实际意义来定；当 $y=f(x)$ 只是一般的函数关系时，则其定义域就是使 y 有意

义的自变量 x 的全体。

例4 讨论函数 $L=100(P-5)$ 的定义域。

若公式代表例1中总利润 L 和单价 P 之间的关系，这是一个实际问题，因此单价 P 必须大于5而小于或等于某一正数 M ，即 $5 < P \leq M$ ，否则利润无意义。故这时定义域为 $D=(5, M]$ ，或记为 $D=\{P \mid 5 < P \leq M\}$ 。

若公式只反映变量 P 与 L 之间的一般函数关系，则 $L=100(P-5)$ 的定义域是 $D=(-\infty, +\infty)$ ，又记为 $D=\{P \mid P \text{取全体实数}\}$ ，或 $D=\{P \mid -\infty < P < +\infty\}$ 。

例5 求函数 $y=x^2$ 的定义域。

解 由于 x 可取一切实数，

所以， $y=x^2$ 的定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$ 。

例9 求函数 $y=\frac{1}{x^2-1}$ 的定义域。

解 要使 y 有意义，必须分母不等于零，即

$$x \neq \pm 1,$$

所以 $y=\frac{1}{x^2-1}$ 的定义域为

$$D=(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

例7 求函数 $y=\sqrt{2x-3}$ 的定义域。

解 要使 y 有确定值，必须 $2x-3 \geq 0$ ，即 $x \geq \frac{3}{2}$ ，所以

$y=\sqrt{2x-3}$ 的定义域为 $D=[\frac{3}{2}, +\infty)$ ，又记为

$$D=\{x \mid \frac{3}{2} \leq x < +\infty\}.$$

例8 求函数 $y=\lg(x^2-3x+2)$ 的定义域。

解 因负数、零没有对数，所以只有

$x^2 - 3x + 2 > 0$ 时， y 才有意义。

由 $(x-2)(x-1) > 0$

得

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \quad \text{解得 } x > 2;$$

或

$$\begin{cases} x-2 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \quad \text{解得 } x < 1.$$

因此，函数 $y = \lg(x^2 - 3x + 2)$ 的定义域为：

$$D = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty).$$

对于自变量 x 取定值 x_0 时，函数 $y = f(x)$ 的对应值 $f(x_0)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 当 $x = x_0$ 时的函数值。一般求函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 的函数值 $f(x_0)$ 时，只须将 x_0 代入函数式中计算便得。

例 9 设 $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ 求 $f(0), f(2), f(-1)$ 。

解 当 $x = 0$ 时， $f(0) = 1$ ；

当 $x = 2$ 时， $f(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 9$ ；

当 $x = -1$ 时， $f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = 6$

还应该注意，在同一问题中，对于不同的函数关系，应采用不同的函数符号，如 f 、 F 、 G 等。

5. 函数的表示法

函数的表示法一般有三种：表格法、图示法和公式法。

1° 表格法 表格法就是将自变量 x 的一系列的取值与对应的函数值列成表格，如对数表、三角函数表、平方根表