

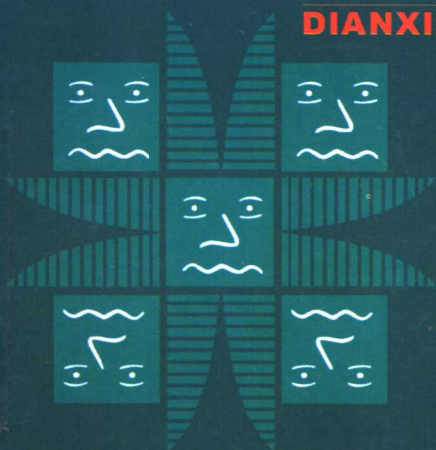
高等学校数学学习辅导教材

# 高等数学 典型题精讲

同济大学·高等数学第四版  
人民大学·微积分修订版

韩云瑞/主编

GAODENG SHUXUE  
DIANXINGTI JINGJIANG



大连理工大学出版社

高等学校数学学习辅导教材

# 高等数学典型题精讲

主 编 韩云瑞

编 者 王燕来 黎传琦 刘庆华

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型题精讲/韩云瑞主编. —大连:大连理工大学出版社,2001.9(2001.11重印)

(高等学校数学学习辅导教材)

ISBN 7-5611-1948-8

I. 高… II. 韩… III. 高等数学-解题 IV. O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第050332号

大连理工大学出版社出版发行

大连市凌水河 邮政编码 116024

电话:0411-4708842 传真:0411-4701466

E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn

URL:<http://www.dutp.com.cn>

大连理工印刷有限公司印刷

---

开本:850毫米×1168毫米 1/32 字数:670千字 印张:20.5

印数:20001—40000册

2001年9月第1版

2001年11月第3次印刷

---

责任编辑:刘杰

责任校对:王强源

封面设计:王福刚

---

定价:23.50元

---

## 前 言

本书是大学理工科非数学各专业《高等数学》(微积分)课程的教学辅导书。编写本书的目的是指导大学一年级学生理解掌握高等数学的原理,帮助他们学会基本的解题方法,提高分析、解决问题的能力。本书参照了原国家教委审定的高等工科院校《高等数学课程教学基本要求》和教育部 2001 年新审定的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(数学卷 1 和卷 2),对于高等数学这门大学数学最重要的基础课程,既注重基础训练,又注意与硕士研究生入学统一考试的要求衔接。因此本书是一本融学习指导和考研辅导为一体的参考书。为了适合于更多的读者作为教学同步辅导用书,本书的章节编排,内容深度和广度主要参照目前国内教材中使用量较大的同济大学《高等数学》(四版),因此本书特别适合于采用同济大学《高等数学》(四版)以及同类教科书为教材的高等数学教学的同步学习指导。同时,本书也适合于准备参加全国硕士研究生入学统一考试的读者系统复习高等数学,提高解题能力,进行应考准备。另外,对于《高等数学》(微积分)教学第一线的教师,本书也是一本有用的参考资料。

本书的内容包括典型题精讲(客观题与非客观题),解题能力训练,模拟考场以及附录。典型题精讲中不仅给出问题的解答,还尽量地通过解题思路分析,对于重点和难点的注释和点评,帮助读者加深对于微积分基本概念和基本方法的理解,学会解题方法,并且尽可能避免常见错误。在典型题之后,精选了少量习题,供读者通过自己亲自动手,寻找解题思路和技巧,对于学过的知识进行复

习巩固。解题能力训练后附有参考答案和必要的提示,供读者参照。每一章的最后都精心设计了一份或两份测验题,本书称之为“模拟考场”。“模拟考场”为读者设置如亲临考场的某种氛围。读者可以通过自测,并对照参考解答测试自己对于本章知识的掌握程度,了解自己的不足,有针对性地进行复习。

每一章典型题的最后有若干综合例题,这些例题取材于清华大学微积分课程教材《微积分教程》中各章的补充习题。这些题目难度较大,但颇有特色,因此许多读者从全国各地不断地来信或发电子邮件向编者索取答案。编者在为众多读者的钻研精神受到鼓舞的同时,也为难于满足所有读者的要求而感到不安。因此借本书出版的机会,将这些题目作为例题放在本书之中,供读者参考。相信这些问题对提高读者的解题能力会有帮助。但是这些题目不属于基本要求,仅供有兴趣并有余力的读者参考。

本书并不是例题、习题和试题的简单堆积。为了对于读者学习高等数学起到有价值的指导作用,除了在典型题的讲解过程中尽可能地启发思路,提醒初学者避免常见错误之外,本书主编专门为大学一年级学生撰写了探讨大学数学学习方法的文章。主编在清华大学多年执教微积分课程,每年都要面对新入学的大学生,在教学的同时进行必要的学习方法指导,这篇文章是根据主编多年的经验体会整理而写成的。

本书首先是一本与《高等数学》教学同步的辅导书,所以需要照顾不同学校、不同水平的大多数学生,注重体现高等数学的基本要求,起点不能太高。另一方面,为了使读者开阔视野,提高水平,编者将近十年以来几乎所有的全国硕士研究生入学统一考试的微积分试题有机地穿插在本书的例题、习题和试题之中,可以使读者在大学低年级学习《高等数学》这门课程的阶段就可以了解研究生入学考试的要求,在提高解题能力的同时,为将来参加全国硕士研究生入学统一考试奠定扎实的基础。本书中凡是带有五位数字

编号的题目都是某年的考研题目。例如,(96103)说明本题是1996年试卷1的一道3分题;(00206)说明本题是2000年试卷2的一道6分题。在附录2中还为读者提供了国内五所著名大学《高等数学》(微积分)的期末试题,供读者参考和演练。透过这些试题,读者可以从一个侧面了解国内高校的高等数学教学的水平和特点,进一步开拓自己的视野。

王天亮、权爽先生对本书原稿进行认真的审阅,孙宏昌教授,李思泽教授和张云凤老师对本书编写提供了有力的支持,编者在此向他(她)们表示诚挚的谢意。

本书编者应大连理工大学出版社教材开发部第一工作室刘杰主任的盛情之约,努力为尽可能多的读者学习高等数学(微积分)并准备将来参加全国硕士研究生入学统一考试作必要的准备提供一本有价值、有特色的辅导书。但是由于编者水平有限,加之时间比较仓促,缺点和错误在所难免,敬请读者批评指正。

**编 者**

2001.5 于清华大学

---

## 清华大学韩云瑞教授

### 与新同学谈谈怎样学习高等数学

对于刚刚走进大学的新同学,学习环境发生了很大的变化。在学习高等数学(微积分)的过程中许多同学会遇到各种困难。借此机会,就学习心态和学习方法问题和新同学一起进行简单的探讨。

#### 一、调整学习心态,尽快适应大学学习环境是学好大学数学的前提

第一,是用兴趣推动学习,而不是用任务观点强迫自己被动地学习数学。

兴趣是学好数学的一个非常重要的条件,因此应当理性地、主动地培养这种兴趣,新时代的科学工作者需要扎实的数学基础,这种需要应当成为学习数学的强大的动力。其次,在学习过程中扎实认真地对待每一堂课,以做对每一个习题,为自己通过钻研解决任何一个难题而自豪,对于数学的兴趣会在不知不觉中逐渐浓厚起来,和老师、与同学多开展讨论也是培养兴趣的一个有效方法。另外,如果稍微了解微积分的历史,就会被笛卡尔、阿基米德和牛顿等一个个名垂青史的伟大的科学家的事业和精神所感染,激发你的兴趣和钻研精神。

第二个问题是要努力摆脱对于教师和对于课堂的完全依赖心理。

教师在有限的课堂教学时间中,只能讲思路,讲重点,讲难点。不要指望教师对所有知识都讲细讲透,要学会自学,更多地依靠自学,在自学中培养学习能力,理解能力和创造能力。

第三个问题是:不仅要勤学还要好问,要不耻下问。有一部分学生在学习中不爱提问,不爱讨论。其中一个原因是怕自己提的问题太简单,怕别人认为自己水平低,怕麻烦老师等。学习中问题逐渐积累会使得你在学习中的困难越来越大,甚至造成一种非常被动的局面,正确的心态应当是不耻下问,不怕麻烦老师,有问题随时问老师或者与同学讨论,直到彻底弄清为止。

第四个问题是学习要扎扎实实,切忌不求甚解。

简单的证明和运算往往包含了最基本的方法和原理,只有认真地对待这些简单的问题,扎扎实实地完成这些基本的练习,才能真正体会,进而掌握基本的解题方法。才有能力去分析解决那些复杂的问题,有些人不会分析解决

比较复杂的问题,归根结底是对基本的原理解得不深入,对基本的解题方法不熟练。

## 二、改进学习方法,提高学习效果

### 1. 学会听课

对于教师在课堂上讲的知识;最重要的是获得整体的认识,而不是拘泥于每个细节是否清楚。在教师证明定理与推导公式时,重要的是要理解其中的思路。只要掌握了主要思路,即使某些细节没有听清楚,也没有关系。你自己完全能够在这个思路的引导下将全部细节补足,最后推出结论。

成功的课堂教学不在于是否讲细讲透,不是课堂完全解决问题。课堂教学应当把主要思路,重点与难点交待清楚,而将部分细节留给学生。课堂教学要为学生留下值得思考的问题,学生在课堂上听课时,也应当把主要精力集中在教师的证明思路和对于难点的分析上。如果有某些细节没有听明白,不要影响你继续听其他内容。

作为面向 21 世纪的大学生,肩负知识创新使命的未来科学技术人才,应当在学习的各个环节培养自己的主动精神和自学能力,摆脱对教师与课堂的过分依赖。这不仅是今天学习的需要,而且是培养创造能力的需要。

### 2. 怎样预习和复习?

适当的预习是必要的,如果时间不多,你可以浏览一下教师将要讲的主要内容,获得一个大概的印象,这可以在一定程度上帮助你在课堂上跟上教师的思路,如果时间比较充裕,除了浏览之外,还可以进一步细致地阅读部分内容,并且准备好问题,看一下自己的理解与教师讲解的有什么区别,有哪些问题需要与教师讨论。如果能够做到这些,那么你的学习就会变得比较主动、深入,会取得比较好的效果。

复习不是简单的重复,应当用自己的表达方式再现所学的知识,例如对某个定理的复习,不是再读一遍书或课堂笔记,而是离开书本和笔记,回忆有关内容,不清楚之处再对照教材或者笔记。另外,复习时的思路不应当是教师讲课或者教科书叙述的翻版,一个可供参考的方法是采用倒叙式。从定理的结论倒推,为了得到定理的结论,是怎样进行推理的,定理的条件用在何处。这样倒置思维方式,更加接近于这个定理的发现的思路,是一种创造性的思维活动。

如何复习概念?首先,对于重要的定义,要求大家能够用自己的语言正确地进行复述。这是理解和应用它们的前提条件。其次,尽可能用具体形象的例



子解释或者表现抽象的数学概念,你能举出越多的实际例子说明某个概念,那么你对这个概念的理解就越加生动和深入。

一般来说,学习数学不能死记硬背,这无疑是正确的。但是在某些情况下,背诵定理的证明,对于理解和掌握证明的思想方法也确实是有用的。其奥妙在于通过反复背诵定理,深切地体会,进而掌握了定理的证明思想,这种方法对于某些数学课程是有效的。

### 3. 怎样解题

学生在学习高等数学过程中,更多的困难来自于习题。

首先,大家要重视基本概念和基本原理的理解和掌握,不要一头扎进题海中去。上面已经提及,提高解题能力重要途径之一是掌握好基本概念和基本方法。另一方面,因为高等数学题型变化多样,解题技巧丰富多彩,许多类型的题目并不是只要掌握好基本概念和基本方法就能会做的。需要看一些例题,或者需要教师的指点。不要因为某些题目一时找不到思路而失去信心。

至于如何解题,教师很难总结出几个适用于所有题目的通用的方法。怎样提高自己的解题能力?我认为,除了天生的智力因素之外,解题能力首先取决于基本概念和基本原理的理解与掌握程度。所以,多下功夫掌握基本概念和基本原理,尽可能地多做题目,是提高解题能力的重要途径。另外,做题要善于总结,特别是从不同的题目中提炼出一些有代表性的思想与方法。

### 4. 怎样看参考书

尽可能多地参考一些书籍会使你开阔眼界,增长知识,加深理解。看参考书有两种方式,其一是通读某一本书,不过大家往往没有太多的时间去通读教材之外的书。所以我建议大家采用第二种方法:以问题为中心,有选择地读参考书,具体地说就是:如果你对微积分中的某一部分,或者某个问题有兴趣,希望多了解一些,作比较深入的研究,那么可以查阅几本书,看一看其他书上对于这个问题是怎样论述的,在学习的基础上,自己可以做一个小结,这是自学的一个重要方式。

好的辅导书对于帮助自己学习高等数学也是有用的,但是使用辅导书要注意方法,不要仅仅停留于逐个地看例题,看得懂不等于会做,想到思路不等于做得完全正确。如果你想扎扎实实地提高解题能力,就要认真地、独立地解题,通过自己动脑动手体会解题的思路、方法和技巧。

## 三、有关几个问题的对话

下面是许多学生经常向教师提出的一些问题,借此机会,以对话方式和

大家进行简短的讨论。

### 1. 我学得不好,但是又提不出问题,怎么办?

我曾经向这些学生推荐过几个方法,帮助他们学会提问题。第一个方法是学会自己向自己提出问题,在进行课后复习时,不要看书,不要看课堂笔记,自己回忆或背诵定理和定理证明过程等内容。这样做的好处是,一方面有助于你发现不明白的问题,另一方面也能提高你的复习效果;第二是热心与别人开展讨论,积极地思考并试着回答别人提出的问题。有的同学在教学答疑时间经常去听听别人提的问题,也逐步学会了自己提问题;第三,尽可能多做一些不同类型的习题,从中发现问题,并与别人讨论,做题要善于比较和总结,既随时提出和解决问题,又能不断积累经验;第四,是自己学习教师没有讲过的内容,发现问题及时请教。

总之,自己不会提问题的主要原因,大概是学习没有深入,或者在学习中长期是顺着别人的思路进行思维。解决这些问题,需要大家在学习过程中多动脑子,经常离开课本或笔记,多问些为什么。

### 2. 前一段学得不好,现在以补习以前学的知识为主,还是以学好现在为主? 还能不能赶上?

首先,微积分的知识结构系统性和连续性很强,前面的知识学的不扎实,肯定要影响后面知识的学习。所以适当的补习是必要的,但是在补习前面知识的时候要注意两点:第一,一定要以现在学的内容为主,不能脱离现在的学习去系统地复习,否则又会造成新的损失,问题越积越多,造成更大的被动。其次,边学习,边补习不一定全面复习,应当着重复习那些与现在学习密切相关的,最基本,最必要的概念和原理,如果自己不是很清楚,可以请教师指导,要有信心,只要方法得当,你能够摆脱一时的被动局面。但是,如果你的问题拖得太久,太多,被动局面就难以扭转了。

### 3. 做题没有思路怎么办?

基本的计算题和简单的证明题不会没有思路,但是对于初学者来说,比较复杂,技巧性很强的题目一时找不到思路并不奇怪。思路从何而来?第一是理解好基本原理和例题中的基本解题方法;第二是多看、多做一些例题,学习各种新的思路和技巧;第三是善于总结各种解题思路和方法,并且运用你掌握的思路和技巧去探索新的问题。如果老的方法不能完全解决新的问题,多想想,怎样修改思路和技巧才能适用于新的情况。另外,经常和同学开展讨论,多向教师请教会使自己受到启发,使思路更加开阔。

#### 4. 考试题我都会,但总是出错

许多同学都把做错习题和考试出错归咎于自己粗心,实际上,这里更重要的原因是基本功不够扎实,平时马马虎虎、不求甚解的后果不仅是容易犯小错误,久而久之,会对于基本概念和基本运算的理解掌握不扎实,这是经常出错的根本原因。所以,学习要踏踏实实,务求甚解,即使是简单的、计算性的题目,也要认真、准确地做好。只有认真才能理解掌握基本运算和基本的证明方法,只有踏实的学风和一丝不苟的精神才能使你少犯错误。

学习数学要有科学的方法。笛卡儿强调说:“没有正确的方法,即使是有眼睛的博学者也只会像瞎子一样盲目探索。”同时学习数学也必须扎扎实实,切忌浮躁。任何方法都要以勤奋踏实的学习态度为基础,学习数学就像攀登泰山,如果你总是盯着高耸入云的顶峰,就总是觉得自己非常渺小,就容易产生畏难心理;反之,如果你尽力走好脚下的每一步,将自己迈出的每一步都作为一个成绩,为自己登上的每一个高度感到自豪,你就能不断地登上新的高峰。正如马克思教导的那样:在崎岖道路上不断攀登的人,才有希望登上光辉的顶峰。近代数学的重要奠基人、数学史上影响最大的数学家之一高斯说过:“假如别人和我一样深刻和持续地思考数学真理,他会作出同样的发现。”因此,只要有信心,你一定能学好数学。

2001.7 于清华大学

---

# 目 录

## 前言

清华大学韩云瑞教授与新同学谈谈怎样学习高等数学

<b>第一章 函数与极限</b> .....	1
典型题精讲.....	1
客观题.....	1
非客观题.....	8
综合题.....	45
典型题型归纳.....	51
解题能力训练.....	52
参考答案与提示.....	57
模拟考场一.....	58
参考答案与提示.....	60
模拟考场二.....	61
参考答案与提示.....	63
<b>第二章 导数与微分</b> .....	65
典型题精讲.....	65
客观题.....	65
非客观题.....	77
综合题.....	110
典型题型归纳.....	112
解题能力训练.....	112
参考答案与提示.....	113

模拟考场一·····	114
参考答案与提示·····	115
模拟考场二·····	117
参考答案与提示·····	118
<b>第三章 导数应用</b> ·····	<b>120</b>
典型题精讲·····	120
客观题·····	120
非客观题·····	130
综合题·····	165
典型题型归纳·····	172
解题能力训练·····	172
参考答案与提示·····	175
模拟考场一·····	178
参考答案与提示·····	180
模拟考场二·····	183
参考答案与提示·····	185
<b>第四章 不定积分</b> ·····	<b>187</b>
典型题精讲·····	187
客观题·····	187
非客观题·····	192
典型题型归纳·····	210
解题能力训练·····	211
参考答案与提示·····	212
模拟考场一·····	213
参考答案与提示·····	215
<b>第五章 定积分及其应用</b> ·····	<b>216</b>
典型题精讲·····	216

客观题·····	216
非客观题·····	225
综合题·····	271
典型题型归纳·····	277
解题能力训练·····	277
参考答案与提示·····	279
模拟考场一·····	280
参考答案与提示·····	281
模拟考场二·····	284
参考答案与提示·····	285
<b>第六章 空间解析几何与向量代数</b> ·····	<b>288</b>
典型题精讲·····	288
客观题·····	288
非客观题·····	291
典型题型归纳·····	312
解题能力训练·····	313
参考答案与提示·····	314
模拟考场一·····	315
参考答案与提示·····	316
<b>第七章 多元函数微分法及其应用</b> ·····	<b>317</b>
典型题精讲·····	317
客观题·····	317
非客观题·····	321
综合题·····	367
典型题型归纳·····	370
解题能力训练·····	371
参考答案与提示·····	373

模拟考场一	374
参考答案与提示	376
<b>第八章 重积分</b>	377
典型题精讲	377
客观题	377
非客观题	382
综合题	416
典型题型归纳	418
解题能力训练	418
参考答案与提示	419
模拟考场一	422
参考答案与提示	423
模拟考场二	424
参考答案与提示	425
<b>第九章 曲线积分与曲面积分</b>	428
典型题精讲	428
客观题	428
非客观题	433
综合题	465
典型题型归纳	470
解题能力训练	471
参考答案与提示	472
模拟考场一	473
参考答案与提示	474
<b>第十章 级数</b>	476
典型题精讲	476
客观题	476

---

非客观题·····	483
综合题·····	512
典型题型归纳·····	516
解题能力训练·····	516
参考答案与提示·····	520
模拟考场一·····	521
参考答案与提示·····	523
模拟考场二·····	525
参考答案与提示·····	527
<b>第十一章 微分方程</b> ·····	<b>529</b>
典型题精讲·····	529
客观题·····	529
非客观题·····	534
典型题型归纳·····	566
解题能力训练·····	567
参考答案与提示·····	570
模拟考场一·····	571
参考答案与提示·····	573
模拟考场二·····	577
参考答案与提示·····	579
<b>附录 1 五所重点大学高等数学试题选编</b> ·····	<b>582</b>
西安交通大学 2000 年高等数学(上)期末试题·····	582
参考答案与提示·····	583
西安交通大学 2000 年高等数学(下)期末试题·····	585
参考答案与提示·····	587
上海交通大学 1999 年高等数学(上)期末试题·····	590
参考答案与提示·····	592



上海交通大学 1999 年高等数学(下)期末试题 .....	594
参考答案与提示 .....	596
清华大学 2001 年微积分(上)期末试题 .....	599
参考答案与提示 .....	601
清华大学 2001 年微积分(下)期末试题 .....	603
参考答案与提示 .....	605
北方交通大学 2000 年高等数学(上)期末考试试卷 .....	609
参考答案与提示 .....	611
北方交通大学 2001 年高等数学(下)期末考试试卷 .....	612
参考答案与提示 .....	615
同济大学 2000 年微积分(上)期终考试试卷 .....	617
参考答案与提示 .....	619
同济大学 2000 年微积分(下)期终考试试卷 .....	620
参考答案与提示 .....	622
<b>附录 2 2001 年全国攻读硕士学位研究生入学考试</b>	
<b>数学试题</b> .....	623
<b>试卷一</b> .....	623
<b>参考答案与提示</b> .....	626
<b>试卷二</b> .....	631
<b>参考答案与提示</b> .....	633