铁道部重点教材
TIEDAOBUZHONGDIANJIAOCAI

高等学校教材

运动稳定性

舒仲周 张继业 曹登庆 编著

中国铁道出版社

高 等 学 校 教 材

运 动 稳 定 性

舒仲周　张继业　曹登庆　编著

中 国 铁 道 出 版 社

2001年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书从基本概念开始，由浅入深地系统阐述了运动稳定性的基本理论，介绍了运动稳定性在力学、大系统、自动控制系统、生态系统、神经网络、碰撞振动系统和不确定系统等方面的应用，以及与稳定性有密切关系的分叉理论。书中大量反映了国内外研究者，包括作者本人的最新研究成果，能使初学者迅速进入学科前沿。本书取材精当，叙述详简得宜，颇多独到之处。全书分为上、下两篇，上篇介绍运动稳定性的理论基础，下篇介绍运动稳定性理论的应用与发展。每章后附有习题，便于读者复习和思考。

本书为高等院校力学、数学、自动控制、机械工程、航空航天、生物、管理学等专业的高年级大学生、研究生的教材，也可供有关技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

运动稳定性/舒仲周，张继业，曹登庆编著. —北京：中国铁道出版社，2001. 6
高等学校教材
ISBN 7-113-04000-4

Ⅰ. 运...　Ⅱ. ①舒...　②张...　③曹...　Ⅲ. 运动稳定性-高等学校-教材
Ⅳ. 0317

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 73714 号

书　　名：运动稳定性
作　　者：舒仲周　张继业　曹登庆
出版发行：中国铁道出版社（100054，北京市宣武区右安门西街 8 号）
责任编辑：李丽娟
封面设计：冯龙彬
印　　刷：北京市兴顺印刷厂
开　　本：787×1092　1/16　印张：17　字数：415 千
版　　本：2001 年 6 月第 1 版　　2001 年 6 月第 1 次印刷
印　　数：1～2000 册
书　　号：ISBN 7-113-04000-4/O・85
定　　价：25 30 元

序

随着现代科学技术的发展，有越来越多的问题需对其运动状态的稳定性作深入分析，从而也就需要越来越多的科技人员对运动稳定性的理论与研究方法有较深刻的了解。本书的出版将使这一需要得到满足。

长期以来，大批中外学者在这一学科领域开展了广泛而深入的研究工作，在理论与应用方面取得了极为丰硕的成果。在此情况下，要撰写一部教材，使之既能比较全面地反映这一学科的主要理论及当前研究现状，又易于为具有一般理工科院校数学和力学基础的读者所接受，是相当不容易的。如果没有对这一学科文献资料的充分掌握和深入系统的研究工作，以及长期的教学经验积累，本书是很难完成的。

本书最大的一个特点是起点较低但终点很高。开始先由读者熟知的例子来导出稳定与不稳定的直观概念，然后再过渡到严格的数学定义。这种生动的讲述方法使读者很容易入门。本书在引出新概念与理论时，总是从简要具体的问题出发，说明这种概念与理论产生的背景及其实际内涵，这就使得读者在学习时，不再感到它们是突入而来的抽象数学公式与符号，而是生动具体的东西。在讲到一些定理的推广时，也总是举例说明为什么要推广以及沿着什么思想来推广，从而使得读者既了解到问题的来龙去脉，又学到了如何发现问题和解决问题。此外，对于定理中某些过于抽象难以领会的条件限制，也往往给出正反两方面的例子，来说明这些条件限制的必要性，以使读者对其实质能有深刻理解。

本书的另一特点是理论与应用并重，这从目录中即可看得很清楚。在理论部分中包括了运动稳定性的基本概念和定理，并介绍了近年来一些基本定理的重要推广与发展。在应用部分中，不仅涉及面广，包括了力学、控制、生态、生物、神经网络、大系统等多个领域，而且材料新颖，包含了近年来运动稳定性研究中最为活跃的一些分支中的重要的新成果（包括作者本人的）。所有这些，不仅可以使读者更好地了解运动稳定性在实际应用中的广泛性与重要性，同时对扩大学术视野，活跃学术思想也很有好处。

总之，无论对于初涉运动稳定性的读者，还是对运动稳定性已有相当研究的学者，本书都是一本极有价值的著作。它的出版对于推进运动稳定性研究工作的进一步开展，将会起到良好的促进作用。

李骊

2000 年 11 月

前　　言

运动稳定性理论起源于力学，它最早研究物体在平衡位置的稳定或失稳问题，后来逐步发展到研究运动的稳定性。而运动不仅局限于物体的运动，任何事物的变化都可视为一种运动，都存在是否稳定的问题。运动稳定性理论因此超出了力学的范围，进入到多种领域。

运动稳定性的创始人是俄国学者李雅普诺夫（Ляпунов A. M. 1857—1919）。他首次给出了稳定性的精确定义，建立了运动稳定性的一整套严密的理论体系。在此后的一百多年中，运动稳定性研究取得了长足进展。在理论上，已经从原来的常微分方程发展到偏微分方程、泛函微分方程、随机微分方程，从有限维空间发展到无穷维空间，从离散系统发展到连续介质系统，从单一的稳定性问题发展到分叉、混沌理论。在应用上，则从力学领域发展到自控、机械、航空航天、电力、化工、生态、经济、管理、神经网络和系统工程等多种技术领域。

李雅普诺夫创立了两种基本研究方法。其中第二方法（又称直接法）不需求解系统微分方程，只利用一个函数（称为李雅普诺夫函数），即可直接判定运动的稳定性，因而价值最大，发展最快，是运动稳定性理论的主流。本书主要介绍直接法理论。

运动稳定性是一门理论严谨、应用广泛、而且发展迅速的学科。为了体现它的这些特点，本书力求在理论上构成一个严密完整的体系，并且用大量篇幅介绍国内外研究者在不同领域的最新成果。

全书分为上、下两篇，各八章。上篇为基础理论，包括运动稳定性的基本概念（第一章），定常系统的稳定性理论（第二～四章），非定常系统的稳定性理论基础（第五、六章），稳定性基本定理的推广及发展（第七、八章）等。下篇为运动稳定性专题，每章一题，互相独立，分别介绍运动稳定性理论在力学系统（第九章）、控制系统（第十章）、大系统（第十一章）、生态系统（第十二章）、神经网络系统（第十三章）、碰撞振动系统（第十五章）和不确定系统（第十六章）的发展和应用，以及和运动稳定性密切相关的分叉理论（第十四章）。

本书只要求读者具备常微分方程和线性代数的基本知识。为使初学者能够循序渐进地学习，我们在上篇中一般采用“从特殊到一般”的叙述方法，即先定常后非定常，先古典后近世，先单一稳定后多样稳定的逐步深入方法。随着深度的增加，处理方法有所不同，以适应不同读者的需要。本书总是从简单的实际问题出发引出新理论、新概念，并且尽力揭露新理论之所以能产生的个中奥秘。有不少实例是从如何建立数学模型开始，直到稳定性问题的解决，形成了一个完整的过程。我们希望这样做有益于读者触类旁通，开拓思维。运动稳定性的许多定义和概念初看起来并不复杂，但是含义深刻，一不小心就会弄错。为此我们不厌其烦地对定义和定理加以诠释，并时时在难点和疑惑处加以点拨，以期能澄清我们惯见的许多错误。一些反例和习题也是为理清概念设计的。

下篇在取材上“避全求新”，不求在每个专题上覆盖全面，而是突出反映研究热点，特别是我国学者比较关注的一些分支中的新成果。一般每章只就一两个主题展开讨论，由基础直达前沿领域。在文献择取上，我们力求从宏观上着眼，尽量在相关材料中过滤出比较成熟的（未必是最新的）成果，以使读者在较少篇幅内得到较大收益。为使编选的材料在体系上保持一致，有时也考虑到必要的改进，我们对一些原始文献的定理作了改写和补充。

本书除了下篇互相独立外，第四章(定常系统李雅普诺夫函数的构造)也与其后各章无关，而下篇一般只讨论定常系统，仅第十章(大系统的稳定性)略涉及非定常系统基本概念，读者可以根据需要选择阅读。例如，对于仅仅需要了解一下运动稳定性最基本内容的读者，可以只学习前三章，对于大学高年级学生，除学习前三章外，还可以结合本专业学习下篇一些章节。研究生宜加学第五、六章甚或第十四章。

本书脱稿于第一作者舒仲周的《运动稳定性》。这次应中国铁道出版社之约出版，对原稿各章作了大量补充和改写，并增加了许多新内容，包括近十年的研究成果。撰写工作由三人基本完成，舒仲周主写第一～十章、第十五章，张继业主写第十一～十四章，曹登庆主写第十六章。全书最后由舒仲周统一修改定稿。

作者在写作过程中得到了西南交通大学应用力学与工程系和牵引动力国家重点实验室的关心和支持，并得到了西南交通大学出版基金的资助。北京工业大学的李骊教授为本书撰序，舒煌博士承担了部分收尾工作。对于以上单位和个人以及所有关心本书写作和出版的同志，作者敬致衷心的谢意。

作者

2000 年 11 月

目　录

上篇　运动稳定性的理论基础

下篇　运动稳定性理论的应用与发展

上 篇

运动稳定性的理论基础

上篇共八章，分为四部分：

(1) 运动稳定性的基本概念（第一章）；

(2) 定常系统的稳定性理论基础（第二～四章）；

(3) 非定常系统的稳定性理论基础（第五～六章）；

(4) 稳定性基本定理的推广与发展（第七、八章）。

定常系统是微分方程不显含时间 t 的系统，非定常系统显含时间 t。

本篇一般采取“由特殊到一般”的逐步深入方法介绍运动稳定性的理论基础，包括研究对象的先定常后非定常，叙述方式的先实例后理论，先古典（第二～六章）后现代（第七、八章），稳定类别的先单一（第一～七章）后多样（第八章）。但因本篇阐述的是理论体系，为了便于论述合理与顺当，也采取“一般—特殊—一般”的反复深入方式，例如第一部分没有区别对象的定常与非定常，而第二、第三部分的章次安排就是遵循这一反复深入原则的。

原书空白

第一章　运动稳定性的基本概念

运动稳定性的概念是平衡稳定性概念的推广。我们先从比较简单的平衡稳定性谈起。这一概念早在 17 世纪 Torricelli 时期就已形成，但首先给出严格定义的是 A. M. 李雅普诺夫[1~3]。这些定义表面看来并不复杂，但含义深刻，初学者一不小心就会产生误会，不可不慎。本章从实际例子引出平衡稳定性的初步概念，然后给出李雅普诺夫稳定性的严格定义，并对其中难点作出详细解释，在此基础上仍然通过实际例子引出运动稳定的概念，给出运动稳定性的定义。最后粗略介绍李雅普诺夫提出的解决运动稳定性的有效方法——直接法，本书的全部篇幅介绍的就是这个方法。

§1.1　平衡稳定性的初步概念

图 1.1.1(a)与(b)表示两个单摆，(a)为下垂摆，(b)为倒立摆。它们是一条长为 l 的刚杆，其一端和质量为 m 的重球固结，另一端用圆柱形铰链和支座联结，并设刚杆质量不计，铰链是足够光滑的。

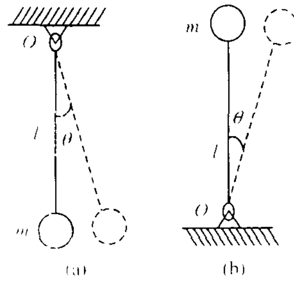


图　1.1.1

下垂摆有一个平衡位置，就是下垂的最低点，这时刚杆处于铅垂线上，重球所受的合力为零。如果重球初速度为零，它将停留在这个位置上。这一现象是我们能经常观察到的。倒立摆也有一个平衡位置，即重球的最高点，这时刚杆也处于铅垂线上，重球所受的合力为零。从理论上说，如果重球初速度为零，也将停留在这个位置上。但这一现象一般是观察不到的，这是为什么呢？

设刚杆偏离平衡位置的角度为 θ(图 1.1.1)，所谓平衡位置是满足

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{\theta}=0,\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dot{\theta}=0$$

两个条件的位置。在这里就是 $\theta=0$，$\dot{\theta}=0$ 的位置。对于倒立摆来说，要人为地实现这两个条件，一般是不可能的，即总有微小的偏离

$$\theta_0\neq 0,\quad \dot{\theta}_0\neq 0$$

存在，它们叫做**初扰动**(θ_0 是位置的初扰动，$\dot{\theta}_0$ 是角速度的初扰动)。即使偶尔做到没有初扰动，在外界干扰下(这是不可避免)又会重新出现，这时作用于重球的合力不为零，这个合力将使倒立摆对平衡位置的偏离 θ 和 $\dot{\theta}$(叫做扰动)越来越大以致倾倒。因此一般观察不到倒立摆立于最高位置的现象。

下垂摆则不然。虽然初扰动也难以避免而使重球所受合力不为零，但这个合力使下垂摆作微幅摆动。如果再考虑到实际存在的铰链摩擦和空气阻力，摆幅将逐渐减小，最后停留在平衡位置上，因此我们能观察到这种现象。

为了进一步分析这个原因，下面分别写出它们的运动微分方程，即对平衡位置的扰动的微分方程，这个方程称为**扰动运动微分方程**。

1. 无阻尼的下垂摆

它的扰动运动微分方程是

$$ml^2\ddot{\theta}=-mgl\sin\theta \quad \text{或} \quad \ddot{\theta}+k^2\sin\theta=0 \tag{1.1.1}$$

这里 $k^2=g/l,k>0$。

这个系统的总能量 E 是它的动能和势能之和，即

$$E=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl(1-\cos\theta)=ml^2\left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2+k^2(1-\cos\theta)\right]$$

我们知道这个系统的总能量是守恒的，即

$$E=C,\ (C\text{ 为常数})$$

如果取 $C>0$充分小，并使 $|\cos\theta|<1$，则 $E=C$ 是相平面（在这里是以 θ 和 $\dot{\theta}$为坐标轴的平面）上的一族封闭曲线[图1.1.2(a)]，其中任一条曲线都是方程(1.1.1)的由某个初始点$(\theta_0,\dot{\theta}_0)$出发的解在相平面上的轨线。从图(a)中显然看出，只要初扰动$|\theta_0|$和$|\dot{\theta}_0|$充分小，摆的幅度就是很小的。我们把这种情况叫做系统的平衡是**稳定的**。

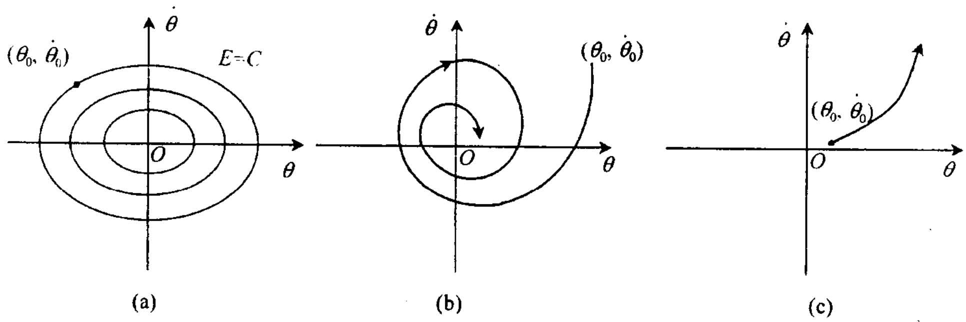


图 1.1.2

2. 有阻尼的下垂摆

假设阻尼和 $\dot{\theta}$成正比，则得扰动运动微分方程

$$\ddot{\theta}+2\mu\dot{\theta}+k^2\sin\theta=0 \tag{1.1.2}$$

式中 μ 是阻尼系数，$0<\mu<k$。

这个系统的总能量仍如前一种情况一样，但由于阻尼的存在，E 是随时间而减小的，最后减为零，即摆停留在平衡位置上。这表明方程(1.1.2)的一切解在相平面上的轨线是向原点（平衡位置）趋近的[图1.1.2(b)]。

系统在这一情况当然是稳定的，但比无阻尼的情况有更强的性质，我们把它叫做系统的平衡是**渐近稳定**的。

3. 倒立摆（不计阻尼）

它的扰动运动微分方程是

$$\ddot{\theta}-k^2\sin\theta=0,\quad (k>0) \tag{1.1.3}$$

当$0<\theta<\pi$ 时，$\ddot{\theta}>0$，因此角速度 $\dot{\theta}$ 随 θ 而增加，设 $\theta_0>0,\dot{\theta}_0>0$，无论初扰动 θ_0、$\dot{\theta}_0$ 多么小，在摆达到最低点以前，方程(1.1.3)的解在相平面上的轨线是离开平衡位置的[图1.1.2(c)]。这

种情况叫做系统在平衡位置是**不稳定**的。

上述三种情况不但包含稳定性的粗略概念，而且暗含着解决稳定性的简便方法。我们将在以后进一步说明这点，并在第二章通过例2.4.1、例2.5.2或例2.6.3以及例2.7.3严格判定这三种情况的稳定性。

§1.2 平衡的扰动运动微分方程

1. 微分方程的范式

单摆的扰动运动微分方程是一个二阶方程，我们可以把它化成两个一阶微分方程。只要令 $x_1=\theta, x_2=\dot{\theta}$，方程 (1.1.1) ～(1.1.3)就化为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k^2\sin x_1\end{cases},\quad \begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k^2\sin x_1 - 2\mu x_2\end{cases},\quad \begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = k^2\sin x_1\end{cases} \tag{1.2.1}$$

原点(0,0)是平衡位置(由 $\dot{x}_1=\dot{x}_2=0$求得)，x_1与 x_2是对它的扰动。

任意高阶微分方程组，如能将所含的最高阶导数解出来，都能化为一阶微分方程组：

$$\dot{x}_s = X_s(t;x_1,\cdots,x_n),\ (s=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.2}$$

这里 n 不限于为偶数，而且 $X_s(t;0,\cdots,0)$一般不为零，即原点一般不为平衡点。

方程(1.2.2)叫做微分方程的**范式**。

例1.2.1 n 阶线性微分方程的一般形式是

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_ny = F(t) \tag{1.2.3}$$

式中，$y^{(n)}=\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}y,(n\geqslant1)$，试把它写成范式。

解 令 $x_1=y, x_2=\dot{y},\cdots,x_n=y^{(n-1)}$，即得

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_nx_1 - a_{n-1}x_2 - \cdots - a_1x_n + F(t)\end{cases}$$

易知原点 $x_1=\cdots=x_n=0$不是平衡点。

点$(x_1,\cdots,x_n)$形成的空间叫做**相空间**(或**状态空间**)，它是 n 维欧几里得空间，以 $\mathbf{R}^n$ 表示。$I=\{t\geqslant0\}$，即非负 t 的集合，则 $I\times\mathbf{R}^n$ 叫做**增广空间**。

为了使记号简单，我们把坐标为$(x_1,\cdots,x_n)$的点记为 x，并把它写成列阵

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} = [x_1,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$$

这里 T 表示转置。也可以把 $\boldsymbol{x}$ 看成由原点到点$(x_1,\cdots,x_n)$的矢径(图1.2.1)。

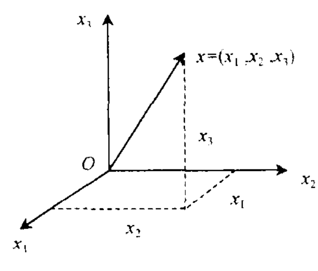


图 1.2.1

同理，用 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 表示$(\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_n)^{\mathrm{T}}$，即

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_n\end{bmatrix}$$

于是方程(1.2.2)可以写成矩阵(或矢量)形式：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{x}) \tag{1.2.4}$$

如果 $\boldsymbol{X}$ 在 $I\times\mathbf{R}^n$ 上有定义，则记之为 $(t,\boldsymbol{x})\in I\times\mathbf{R}^n$。

点 $\boldsymbol{x}$ 到原点的距离以其范数(或模) $\|\boldsymbol{x}\|$ 表示。通常采用

$$\|\boldsymbol{x}\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

任取常数 $r>0$，不等式 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant r$ 表示以原点为球心，以 r 为半径的球形区域，称为原点的球邻域。

本书更多地采用所有 x_i 的绝对值中的最大值表示 $\|\boldsymbol{x}\|$，即 $\|\boldsymbol{x}\|=\max\{|x_1|,\cdots,|x_n|\}$。任取常数 $r>0$，原点邻域 $B_r=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n:\|\boldsymbol{x}\|<r\}$，闭包 $\overline{B}_r$ 是以 $b_r=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n:\|\boldsymbol{x}\|=r\}$ 为边界的 n 维正方体。如果 $n=2$，则为正方形，如图1.2.2所示。

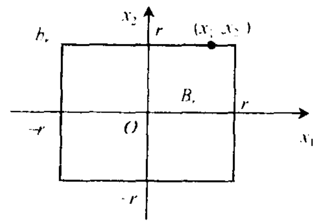


图 1.2.2

2. 扰动运动微分方程

现对范式矩阵方程(1.2.4)作以下假设：

(A) $\boldsymbol{X}(t,0)\equiv 0$，即原点是平衡位置；

(B) $\boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{x})$ 在闭区域

$$I\times\overline{B}_H,\ (0\in B_H\subset\mathbf{R}^n, H>0) \tag{1.2.5}$$

上连续，而且使方程(1.2.4)的解满足惟一性条件。

先说明何为惟一性。设方程(1.2.4)于初始时刻 t_0 从初始位置 $\boldsymbol{x}^0$ 出发的解为 $\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}^0)$，或简单表示为 $\boldsymbol{x}(t)$。由于 $\boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{x})$ 连续，根据微分方程理论，$\boldsymbol{x}(t)$ 是连续的，设它在域 $\overline{B}_H$ 内存在的最大时间区间为 $J^+=J^-(t_0,\boldsymbol{x}^0)$。$\boldsymbol{x}(t)$ 在域 $\overline{B}_H$ 内形成的轨线称为**相轨线**(简称**轨线**)，而在域(1.2.5)内形成的轨线称为**积分曲线**。粗略地说，如果对于给定的初始点 $(t_0,\boldsymbol{x}^0)$，从此点出发的积分曲线只有一条，则称解满足惟一性。严格地说，解的惟一性指的是，如果 $\boldsymbol{x}(t)$ 与 $\boldsymbol{y}(t)$ 都是式(1.2.4)的解，而且 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{y}(t_0)=\boldsymbol{x}^0$，则对一切 $t\in J^+$，$\boldsymbol{x}(t)\equiv\boldsymbol{y}(t)$。这里需要注意，解的惟一性并不意味相轨线也是惟一的。因为相轨线是积分曲线在域 $\overline{B}_H$ 上的投影，一条积分曲线的投影是可以相交的，即可以在不同的时刻通过同一点 $\boldsymbol{x}$，除非 $\boldsymbol{X}$ 不显含时间 t。这点将在§2.1详加讨论。

解的惟一性条件如何确定?根据常微分方程理论，如果对任意点 $\boldsymbol{x}\in B_H$，存在一个邻域 $N(\boldsymbol{x})\subset B_H$，对任何点 $\boldsymbol{y}\in N(\boldsymbol{x})$，对任何 $t\in I$，存在常数 $L>0$，使得

$$\|\boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{y})\| \leqslant L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \tag{1.2.6}$$

则方程(1.2.4)的任意解 $\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}^0)$ 是惟一的。

条件式(1.2.6)称为**局部 Lipschitz 条件**(或称为**局部李氏的**)，L 称为 Lipschitz 常数(对一切 $t\in I$ 保持为常数)。应用这一条件，无需求出常微分方程的解即可判别解是否惟一，所以它很有价值。遗憾地要具体验证这个条件是否满足，一般也不容易。因此常用较为特殊的条件代替它。我们将在第二章谈它。

符合条件(A)与(B)的方程(1.2.4)称为平衡的**扰动运动微分方程**。原点 $\boldsymbol{x}^0=0$ 是平衡点，其他点 $\boldsymbol{x}^0\neq 0$ 是对原点的初扰动。根据解的惟一性，任何扰动运动永远到不了原点这个平衡点。

原点也叫做方程(1.2.4)的**零解**。

§1.3 平衡稳定性的严格定义

1. 定义

§1.1节介绍的稳定性概念只是粗略的，稳定性的严格定义是李雅普诺夫(1892)给出的，这是他建立稳定性理论的前提，十分重要。

定义1.3.1 任取正数 ε(满足$0<\varepsilon\leqslant H$，而且无论如何小)和初始时刻 $t_0\geqslant 0$，如果存在正数 $\delta(t_0,\varepsilon)$(δ 由 t_0和 ε 确定，满足$0<\delta\leqslant\varepsilon$)，对于任何初扰动 $\boldsymbol{x}^0$，只要$\|\boldsymbol{x}^0\|<\delta$，就对一切 $t\geqslant t_0$有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon \tag{1.3.1}$$

则称系统(1.2.4)的平衡是**稳定**的。

定义1.3.2 如果平衡是稳定的，且存在 $\delta'(t_0)>0$(δ'只与 t_0有关)，任取 $\boldsymbol{x}^0$，只要$\|\boldsymbol{x}^0\|<\delta'$，就有

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t) = 0 \tag{1.3.2}$$

则称平衡是**渐近稳定**的。

区域 $B_{\delta'}$($\|x\|<\delta'$)称为**渐近稳定区域**。

定义1.3.3 如果存在 $\varepsilon>0$，存在 $t_0\geqslant 0$，任取 $\delta>0$(无论如何小)，存在 $\boldsymbol{x}^0$满足$\|\boldsymbol{x}^0\|<\delta$，存在 $t\geqslant t_1$，使得

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| > \varepsilon \tag{1.3.3}$$

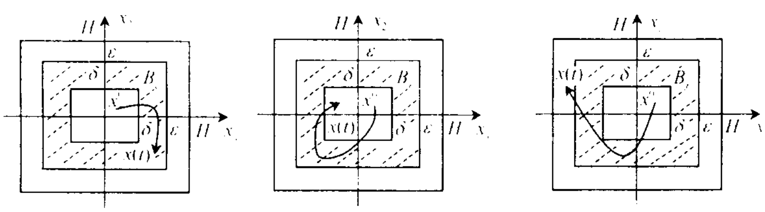
则称平衡是**不稳定**的。

系统(1.2.4)的平衡稳定性有时也叫做零解的稳定性或原点的稳定性。

2. 对定义的解释

对上述三个定义理解是否正确，直接影响到后面稳定性理论的学习。而对初学者来说，这一点又是不容易做到的，因此有必要进行详细的说明。

我们先看图1.3.1(a)、(b)和(c)($n=2$)，它们分别对应于定义1.3.1(稳定)、1.3.2(渐近稳定)和1.3.3(不稳定)。每个图只画出一条作为代表的轨线 $\boldsymbol{x}(t)$。对于图1.3.1(a)，一切满足$\|\boldsymbol{x}^0\|<\delta$的轨线都在开区域 B_ε 内；对于图1.3.1(b)，一切满足$\|\boldsymbol{x}^0\|<\delta'$的轨线不但在 B_ε 内，而且向原点逼近；对于图1.3.1(c)，在代表轨线的近旁有一束轨线($\|\boldsymbol{x}^0\|$可以任意小)要走出 B_ε。



(a)　　(b)　　(c)

图 1.3.1

现在着重解释以下几点：

(1) 对于稳定定义1.3.1[图1.3.1(a)]，我们要特别注意 ε 是可以任意选取的正数，而且