

经济数学基础

林文锋 主编 高鸿桢 杨汉钊 副主编

厦门大学出版社

经济数学基础

林文锋 主编 高鸿慎 杨汉钊 副主编

*

厦门大学出版社出版发行
三明日报社印刷厂排版
福建省第二新华印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 17.25 印张 372千字
1990年4月第1版 1990年4月第1次印刷

印数 1—3000册

ISBN 7-5615-0258-3

O·16 定价:7.00元

前 言

随着经济科学的不断发展,用数学方法来描述经济现象已愈来愈普遍了。人们认识到在对经济现象作量的分析时,数学是不可缺少的工具。为满足近年来经济科、系学生学习数学的需要,我室编写了《经济数学基础——微积分与线性代数》一书。本书根据经济类学生的特点讲述了微积分和线性代数的基本理论和基本方法,包含了研究生考试大纲有关数学的全部内容。

本书的初稿曾作为我校经济学院本科生的数学教材进行过多次的教学实践,根据我们的经验,本书可供200学时教学,其中微积分135学时,线性代数65学时。现在我们对内容作了进一步充实调整,使本书适应面更广些,亦可供文科类本科生和各类专科学校(按实际需要选学)学习之用。为了便于教学和自学,各章都配备了基本练习题。

本书第一篇第一、二章由杨汉钊、第三章由吴碧英、第四章由陈亚贞、第五章由刘恭远、第六章由林群、第七章由曹振宗、第八章由高鸿楨、第九章由邹恒富、第二篇第一、二、五章与附

录 1 由林文锋、第三、四章由黄士略、附录 2 由潘建康分别编写，全书由林文锋、高鸿楦、杨汉钊总纂。

本书在编写过程中得到厦门大学经济学院和计统系领导的多方支持和指导。厦门大学数学系钟同德教授仔细地审阅了全书，并提出了许多指导性意见；厦门大学教务处陈叔瑾处长始终关心本书出版并对本书提出了许多宝贵意见。对此我们表示衷心感谢！

由于我们水平不高，错误缺点在所难免，敬请读者批评指正。

厦门大学经济学院
经济数学教研室
1989 年 7 月 1 日

目 录

第一篇 微积分

第一章 函数	(1)
第一节 区间与邻域	(1)
第二节 函数	(3)
第三节 初等函数	(11)
习题一	(14)
第二章 极限与连续	(17)
第一节 数列的极限	(17)
第二节 函数的极限	(20)
第三节 无穷大量与无穷小量	(23)
第四节 函数极限的性质及运算法则	(27)
第五节 极限存在准则、两个重要极限	(31)
第六节 无穷小的比较	(37)
第七节 函数的连续性与间断点	(39)
习题二	(46)
第三章 导数与微分	(50)
第一节 导数的概念	(50)
第二节 几个基本求导公式	(60)
第三节 函数和、差、积、商的导数	(63)
第四节 复合函数的导数	(67)
第五节 反函数的导数	(71)
第六节 高阶导数	(74)
第七节 隐函数的导数	(76)
第八节 函数的微分	(80)
第九节 导数概念的经济应用举例	(90)

习题三	(94)
第四章 微分学基本定理及其应用	(101)
第一节 中值定理	(101)
第二节 罗必塔法则	(107)
第三节 函数的单调性	(115)
第四节 函数的极值及其求法	(118)
第五节 函数的最大值、最小值及其应用	(125)
第六节 曲线的凹凸性及拐点	(130)
第七节 曲线的渐近线	(134)
第八节 描绘函数图象	(138)
习题四	(142)
第五章 不定积分	(149)
第一节 原函数与不定积分的概念	(149)
第二节 不定积分的性质	(153)
第三节 基本积分公式	(154)
第四节 换元积分法	(156)
第五节 分部积分法	(166)
第六节 几类函数积分举例	(171)
习题五	(176)
第六章 定积分	(180)
第一节 定积分的概念	(180)
第二节 定积分的基本性质	(184)
第三节 定积分与原函数	(187)
第四节 定积分的计算	(191)
第五节 广义积分	(196)
第六节 定积分的应用	(200)

习题六	(208)
第七章 多元函数	(212)
第一节 空间解析几何简介	(212)
第二节 多元函数	(218)
第三节 偏导数	(224)
第四节 全微分及其应用	(228)
第五节 复合函数和隐函数的微分法	(232)
第六节 偏导数的应用	(239)
第七节 二重积分	(247)
习题七	(267)
第八章 微分方程	(275)
第一节 微分方程的基本概念	(275)
第二节 一阶微分方程	(278)
第三节 特殊型二阶微分方程	(287)
第四节 二阶常系数线性微分方程	(290)
第五节 微分方程应用举例	(297)
习题八	(301)
第九章 无穷级数	(305)
第一节 常数项级数的概念	(305)
第二节 无穷级数的基本性质	(310)
第三节 正项级数	(313)
第四节 任意项级数	(320)
第五节 幂级数	(326)
第六节 泰勒级数与函数的幂级数展开	(336)
第七节 幂级数在近似计算中的应用	(349)
习题九	(351)

第二篇 线性代数

第一章 行列式	(356)
第一节 排列的逆序数	(356)
第二节 n 阶行列式	(358)
第三节 行列式的性质	(363)
第四节 行列式按行(列)展开	(370)
第五节 克莱姆法则	(377)
习题一	(380)
第二章 矩阵	(387)
第一节 矩阵的概念	(387)
第二节 矩阵的运算	(391)
第三节 常用的重要矩阵	(401)
第四节 逆矩阵	(405)
第五节 矩阵的分块	(409)
第六节 矩阵的初等变换	(417)
习题二	(125)
第三章 向量	(432)
第一节 n 维向量及其运算	(432)
第二节 向量的线性相关性	(435)
第三节 向量组的秩	(447)
第四节 矩阵的秩	(450)
习题三	(457)
第四章 线性方程组	(461)
第一节 线性方程组解的判定定理	(461)
第二节 线性方程组的求解	(465)

第三节	线性方程组解的结构	(472)
习题四		(482)
第五章	二次型、矩阵的特征值	(486)
第一节	二次型及其标准形	(486)
第二节	相似矩阵、矩阵的特征值	(494)
第三节	用正交变换化实二次型为标准形	(500)
第四节	正定二次型	(507)
习题五		(509)
附录 1	投入产出分析简介	(512)
附录 2	差分方程	(525)

第一篇 微积分

第一章 函 数

第一节 区间与邻域

一、绝对值

一个实数 x 的绝对值记为 $|x|$, 定义如下:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

由定义可知任何一个实数的绝对值是一个大于或等于零的实数。因此 $|x|$ 在数轴上表示点 x 到原点的距离, 不管 x 点是在原点之左还是原点之右。例如 $|x|=3$, 表示 x 点到原点的距离等于 3。如 x 点在原点之右, 即 $x > 0$, 由定义知 $x=3$, 如 x 点在原点之左, 即 $x < 0$, 由定义知 $x=-3$ 。

根据绝对值定义, 可知

$$-|x| \leq x \leq |x|,$$

因此, 当 $|x| \leq b (b > 0)$ 时, 又可表示成

$$-b \leq x \leq b,$$

反之也对, 而当 $|x| > b$ 时, 则 $x > b$ 或 $x < -b$, 反之也对。

下面列举绝对值的一些性质(证明留给读者)

- (1) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
- (2) $|x/y| = |x|/|y|, (y \neq 0)$;

$$(3) |x+y| \leq |x| + |y|;$$

$$(4) |x-y| \geq |x| - |y|.$$

二、区 间

设 a 与 b 是两个实数, 且 $a < b$, 那末, 满足不等式 $a < x < b$ 的一切实数 x 的全体叫开区间, 记为 (a, b) ; 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的一切实数 x 的全体叫做闭区间, 记为 $[a, b]$; 满足不等式 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 的一切实数 x 的全体叫半开区间, 分别记为 $[a, b)$ 或 $(a, b]$ 。在以上的各种情况中, a 和 b 叫做区间的端点, 而 $b-a$ 叫做区间的长度。

除了上述那些有限区间外, 还有一类区间叫做无限区间: $[a, +\infty)$ 表示不小于 a 的实数全体, 有时也写作 $a \leq x < +\infty$; $(-\infty, b)$ 表示小于 b 的实数全体, 有时也写作 $-\infty < x < b$; $(-\infty, +\infty)$ 表示实数全体, 或写作 $-\infty < x < +\infty$ 。

注意, $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作“正无穷大”与“负无穷大”, 它们不是数, 仅仅是记号。

三、邻 域

设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$, 满足不等式

$$|x-a| < \delta$$

的实数 x 全体叫做点 a 的 δ 邻域, 点 a 叫做这邻域的中心, δ 叫做邻域的半径。由上述的绝对值不等式可得:

$$a-\delta < x < a+\delta.$$

从而,满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的实数 x 的全体就是开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 。所以说,点 a 的 δ 邻域也就是以点 a 为中心,而以长度为 2δ 的开区间(图 1-1)。

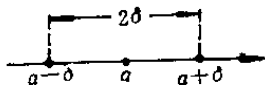


图 1-1

第二节 函数

一、常量与变量

在考察各种自然现象或生产过程中,常常会遇到各种各样的量,如体积、温度、压力、浓度、产量、价格、时间、距离以及速度等等,其中有些量在某个过程中不断地变化着,而有些量却保持不变。例如,物体在自由下落的过程中,它的速度和所经历的路程随时间不断地变化,而重力加速度则保持不变。

我们把在某一过程中可以取各种不同数值的量称为变量,而把在某一过程中数值保持不变的量称为常量。

常量和变量的划分是相对的,要根据具体过程进行分析,同一个量在某一过程中可能是常量,而在另一过程中则可能是变量。例如水的沸点在一般情况下可以看作是常量,但是,在必须考虑到大气压力变化的情况时,它又是随气压而变化的变量了。

二、函数概念

我们先从几个简单例子来看变量之间相互依存的关系，然后再给出函数的准确定义。

例 1 真空中自由落体下落的路程 S 和时间 t 之间满足关系式

$$S = \frac{1}{2}gt^2,$$

它反映 S 在下落过程 S 对时间 t 的依赖关系。

例 2 为了了解气温的变化情况，气象台经常用温度自动记录仪记下一昼夜温度变化的曲线，如图 1-2 所示，图中横坐标是时间 t ，纵坐标是温度 T ，曲线形象地反映出在时间区间 $0 \leq t \leq 24$ 内，温度 T 随时间 t 变化而变化的规律。

曲线上任意一点 $p(a, b)$ ，就表示在时间 $t=a$ 时，测得的气温 $T=b$ 。所以，在 $0 \leq t \leq 24$ 内，对于每一个确定的时间 t ，都有一个确定的温度 T 和它相对应。

以上的例子都是研究在特定过程中有关变量之间的相互依赖关系，即其中一个

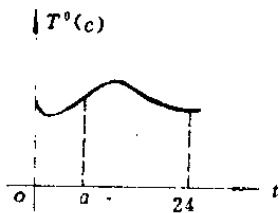


图 1-2

变量在一定范围内可以任意取值，它一旦取定了某一个确定的值后，另一个变量按给定的对应法则而取确定的相应值。由变量之间这种依赖关系我们抽象出函数的定义。

定义 1 设在一个变化过程中有两个变量 x 和 y ，若对于 x 的取值范围内的每一个值，按照某一个法则， y 有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x)$$

变量 x 称为自变量, 变量 y 称为因变量。自变量 x 的取值范围称为函数 $y=f(x)$ 的定义域。

常用的函数表示方法有如下三种。在例 1 中路程 S 是时间 t 的函数, 函数的定义域是闭区间 $[0, T]$, 对应关系用式子表出。象这样用数学式子表示自变量与函数间的对应关系的方法叫做公式法。例 2 中, 温度是时间 t 的函数, 定义域是 $[0, 24]$, 函数值可由曲线纵坐标上读出。这种表示函数的方法叫做图示法。此外, 在实际应用中, 常将一系列的自变量值与对应的函数值列成表格, 如平方表、对数表等, 这种方法称为表格法。

在用公式法表示函数时, 对于自变量的一切值, 函数与自变量间的对应法则不一定用一个式子表示, 可能有这种情况: 对于自变量的某一个部分数值, 对应法则用某一式子表示, 而对另一部分数值则用另一个式子表示。此时不能把它理解为是几个函数, 而应该理解为由几个式子所表示的一个函数。例如:

例 3 某运输公司规定货物的吨公里运价为: 在 a 公里以内, 每公里 k 元, 若超过 a 公里, 每增加一公里总运费增加 $\frac{4}{5}k$ 元。这时运价 m 和里程 S 之间的函数关系用公式表示出来为:

$$m = \begin{cases} kS, & 0 \leq S \leq a \\ ka + \frac{4}{5}k(S-a), & a < S. \end{cases}$$

这里运价 m 和里程 S 的函数是由两个式子表示的一个函数, 这种函数称为分段函数。

y 是 x 的函数, 常用 $y=f(x)$ 或 $y=y(x)$ 表示, 例 1 中就可
用 $S=f(t)$ 或 $S=S(t)$ 表示, 或写为 $S(t)=\frac{1}{2}gt^2$, 在同一个问题
里, 如遇到两个或两个以上的函数时, 要用不同的函数符号,
如 $f(x), F(x), \varphi(x), \dots$ 等等。

当自变量 $x=x_0$ 时, 因变量 y 的对应值常用 $f(x_0)$ 表示,
要注意 $f(x_0)$ 与 $f(x)$ 的区别, 前者是一个固定值, 后者一般地
说是变量。

例 4 设 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$

(i) 求 $f(\frac{1}{\pi}), f(\frac{2}{\pi}), f(\frac{1}{x})$

(ii) 证明 $f(x)=f(-x)$ 。

解 (i) $f(\frac{1}{\pi})=\frac{1}{\frac{1}{\pi}}\sin\frac{1}{\frac{1}{\pi}}=\pi\sin\pi=0$

$f(\frac{2}{\pi})=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}, f(\frac{1}{x})=x\sin x。$

(ii) 因为 $f(-x)=\frac{1}{-x}\sin\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}=f(x)。$

例 5 设一个分段函数

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x \geq 0, \\ x^2+4, & x < 0, \end{cases}$$

求 $f(-1), f(1), f(x-1)$ 。

解 $\because -1 < 0, \therefore f(-1) = (-1)^2 + 4 = 5。$

$\because 1 > 0, \therefore f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3。$

$\therefore f(x-1) = \begin{cases} 2(x-1)+1, & x-1 \geq 0 \\ (x-1)^2+4, & x-1 < 0 \end{cases}$

$\therefore f(x-1) = \begin{cases} 2x-1, & x \geq 1, \\ x^2-2x+5, & x < 1. \end{cases}$

例6 求 $y = \sqrt{2x+3}$ 的定义域。

解 函数是开平方, 所以必须 $2x+3 \geq 0$, 即 $x \geq -\frac{3}{2}$,

故函数的定义域为 $[-\frac{3}{2}, +\infty)$ 。

例7 求 $\ln(3-x)$ 求定义域。

解 $3-x > 0$, 即 $x < 3$, 故定义域为 $(-\infty, 3)$ 。

例8 求 $y = \frac{1}{x^2-1} + \sqrt{x+2}$ 的定义域。

解 从第一项可知 $x \neq \pm 1$ 。从第二项得 $x \geq -2$, 取其公共部分, 可得函数的定义域为

$[-2, -1), (-1, 1)$ 和 $(1, \infty)$ 。

三、函数的几个特性

1、函数的奇偶性 如果函数 $f(x)$ 对于定义域内任意 x 都满足 $f(-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 叫做偶函数。如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 叫做奇函数。

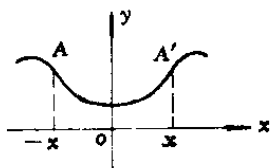


图 1-3

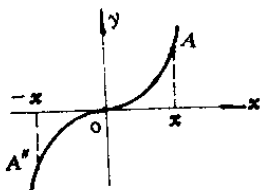


图 1-4

例如, $f(x) = x^2$ 是偶函数, 因为 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$;

$f(x) = x^3$ 是奇函数, 因为 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ 。

偶函数的图形是对称于 y 轴的, 因为设 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(-x) = f(x)$, 所以如果 $A(x, f(x))$ 是图形上的点, 则和它对称于 y 轴的点 $A'(-x, f(x))$ 也在图形上(图 1-3)。

奇函数的图形是对称于原点的。因为设 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(-x) = -f(x)$, 所以如果 $A(x, f(x))$ 是图形上的点, 则和它对称于原点的点 $A'(-x, -f(x))$ 也在图形上(图 1-4)。

2、函数的单调性 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 增大而增大, 即对于 (a, b) 内任两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则函数 $f(x)$ 叫做在区间 (a, b) 内是单调增加的(图 1-5)。如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 增大而减小, 即对于 (a, b) 内任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则函数 $f(x)$ 叫做在区间 (a, b) 内是单调减少的(图 1-6)

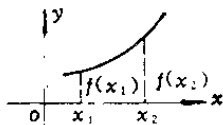


图 1-5

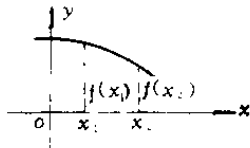


图 1-6

3、函数的周期性 对于函数 $y = f(x)$, 如果存在正的常数 a , 使 $f(x) = f(x+a)$ 成立, 则称此函数为周期函数。满足这个等式的最小正数 a , 称为此函数的周期。

例如, $y = \sin x$ 就是周期函数, 周期为 2π 。