J Y J C F F

经营决策方法

华东师范大学出版社

·张雪野 茆诗松 编著

·JINGYING JUECE FANGFA

·ZHANG XUEYE MAOSHISONG BIANZHU

·HUADONG SHIFAN DAXUE CHUBANSHE

前　言

管理的关键在经营，经营的中心是决策，这就是企业家的共识，因此经营决策在很大程度上关系到企业的兴衰和成败.

随着管理体制的改革和社会主义市场经济的建立，经营决策问题会愈来愈多，如技术引进，产品开发，原料购买，市场销售，资金去向，扩大生产等方面都会遇到各种各样的决策问题.

在企业的各种决策问题中，风险型决策问题在应用上是最为广泛的一类，在理论与方法上也是最为成熟的一类. 本书主要介绍风险型决策问题的理论与方法. 力求理论联系实际，阐述中重视各种决策方法的统计学原理. 全书共分七章，前三章叙述决策问题三要素，决策问题的分类，各种决策准则，效用函数和损失函数；第四、五章是研究如何利用抽样信息进行决策分析的理论与方法，其中第四章侧重在离散状态集，第五章侧重在连续状态集；第六章讲述多阶决策和序贯决策问题及其用决策树进行决策分析的方法；最后的第七章是介绍马尔可夫决策法，这就是把预测与决策融为一体的决策方法，此种方法思路别致，颇俱特色，特向读者推荐.

本书前身是一本同名的讲义，它已在华东师范大学数理统计系作为选修课的教材连续使用六届，并作多次修改补充. 在每章后都配置了一些习题. 这次正式出版，我们对此讲义又作了一次全面的修改与补充，使读者更易领会与掌握决策的基本思想与方法.

本书可作为大专院校有关经济管理、企业管理、工商管理、经济统计及其它有关专业本专科生和部分研究生的“经营决策”课程教材，同时也可作为各行各业经济工作人员学习现代化经济管理方法的参考书.

由于我们水平有限，错误难免，恳请读者批评指正.

编　者

1994.9.

目　　录

第一章　决策问题

§1.1　决策问题的三个基本要素

一、人与自然界（或社会）的博奕

我们首先从一个游戏例子谈起.

例 1.1　设甲乙两人进行一种游戏，甲手中有三张牌，标以 θ_1、θ_2、θ_3，乙手中也有三张牌，标以 a_1、a_2、a_3，游戏的规则是这样规定的，双方都不知道对方出什么牌，各自独立地出牌，然后按下表计算甲的得分和乙的失分

甲＼乙	a_1	a_2	a_3
θ_1	3	−4	1
θ_2	4	−1	−2
θ_3	0	2	−1

譬如，甲出 θ_1，乙出 a_1，那末甲得 3 分而乙失 3 分. 又如甲出 θ_3，乙出 a_3，那末甲失 1 分而乙得 1 分，如此等等. 这张表对甲来说是得分矩阵，其中负的得分就是失分，对乙来说是失分矩阵，其中负的失分就是得分，虽然双方都想获得高分，但谁也不能控制对方. 因此，在这种情况下各人该如何“理智”地进行这种游戏便不是一件很简单的事了. 假如甲与乙手中的牌更多一些，那么这种游戏就更复杂了.

这是一个典型的双人博奕（赌博）问题，不少实际问题可以归结为双人博奕问题. 如果把上例中的甲方设为是自然界（或社会），这就是人与自然界（或社会）的“双人”博奕问题，这类问题在人与自然界（或社会）之间是大量存在着的.

例 1.2　某作物有两个品种：产量高但抗旱能力弱的品种（记

为 a_1) 和抗旱能力强但产量低的品种 (记为 a_2). 在气候情况 (雨量多少) 不能准确预知的情况下, 农民应选播那一个品种可使每亩平均收益最大呢? 这也是一个"双人"博奕问题. 在这个博奕问题中, 一方是人, 另一方是自然界. 人手中有两张"牌": a_1 与 a_2. 自然界手中也有两张"牌": 雨水充足 (θ_1) 和雨水不充足 (θ_2). 大家都知道, 自然界是没有理智的, 它不会因人们去争高产而"理智"地去"出牌", 在这个问题中, 有理智的仅是人, 人可以观察自然界的一些现象, 收集自然界的各种信息. 如人们可以收集历年降雨量的资料, 也可根据当年种子和肥料的价格定出如下的 (对人的) 每亩收益矩阵 (单位: 元)

天气＼人	a_1	a_2
θ_1	200	100
θ_2	−30	80

然后人们再在 a_1 与 a_2 中选出一张"牌"打出去.

例 1.3 一个投资者要决定是否购买颇具风险的 Z 债券. 如买, 成功的话, 到期可净赚 500元, 但也可能失败而亏损 1000元. 如果投资者把钱投入到一个"安全"的项目中, 经同样时间, 肯定净赚 300元, 这是一个人与社会间的博奕问题. 这里人 (投资者) 手中有两张"牌": 买 Z 债券 (a_1) 和投资"安全"项目 (a_2). 社会也有两张"牌": 成功 (θ_1) 和失败 (θ_2). 根据上述, 可写出投资者的收益矩阵

社会＼人	a_1	a_2
θ_1	500	300
θ_2	−1000	300

投资者将依据此收益矩阵决定他的资金投向何方.

这种人与自然界 (或社会) 间的博奕问题称为**决策问题**. 在决策问题中, 主要是寻求人对付自然界 (或社会) 的最优策略. 一般说

来，人们对自然界或社会了解得愈多愈仔细，人们的决策就会愈正确. 这就是我们今后要研究的问题.

从人与自然界 (或社会) 的博奕问题中可以看出，决策就是决策者 (人) 对所遇到的问题，利用各种信息，经过各种考虑和对比后，在可能采取的行动中作出选择. 可见决策实际上是一个过程，它可分为两部分，第一部分是把决策问题叙述清楚，第二部分是如何做决策使收益最大. 显然，第二部分是我们今后研究的重点，但不把第一部分弄清楚，就忙于研究如何做决策是十分不当的.

二、决策问题的三个基本要素

从前面讨论中可知，构成一个决策问题必有如下三个基本要素.

1. 状态集 $\Theta=\{\theta\}$，其中每个元素 θ 表示自然界 (或社会) 可能出现的一种状态，所有可能状态的全体组成 **状态集**.

在例 1.2 中，状态集是由两个状态组成，$\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$，其中 θ_1 和 θ_2 分别表示雨水充足和雨水不充足. 在例 1.3 中，状态集也是由两个状态组成，$\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$，其中 θ_1 和 θ_2 分别表示买 Z 债券成功和失败.

状态集 Θ 可以只含有限个状态，也可以含无穷多个状态. 例 1.2 和例 1.3 都只含有限个状态. 以后还会看到状态有无穷多个的状态集的例子.

在实际中常会遇到这样的决策问题，其自然界 (或社会) 所处的状态可用一个实数表示，这样的状态又称为 **状态参数**，简称为 **参数**. 其状态集 Θ 常由一些实数组成. 这样的状态集又称为 **参数空间**. 常见的参数空间是一个区间 (a,b)，这里 a，b 可以是两个实数，但也可以使 $a=-\infty$，或 $b=+\infty$. 譬如在例 1.2 中，若知该地区的年降雨量在 100mm到 1700mm之间，而人们用每一个年降雨量表示自然界所处的一个状态，那末年降雨量就是一个参数 (即状态)，它的状态集就是一个区间 $[100, 1700]$. 它含有无穷多个状态.

自然界 (或社会) 所处的状态不是自然界自己划分的，而是人

们根据对自然界 (或社会) 的认识和决策的方便而划分的. 譬如在例 1.2 中,该地区的年降雨量在 100mm到 1700mm之间, 若把状态集看作 $\Theta=\{\theta \mid 100 \leq \theta \leq 1700\}$, 由于状态有无穷多个, 会增加决策的困难; 如果提出一个界限, 年降雨量在 600mm以下者为干旱年 (θ_2), 年降雨量在 600mm以上者为雨水充足年 (θ_1), 这样人们就把自然界划分为两个状态; 假如从 100mm开始, 每隔 200mm为一个状态, 那人们就把 [100, 1700]划分成 8 个等长区间, 每个区间为一个状态, 共有 8 个状态, 其状态集就由 8 个元素组成.

2. *行动集* $\mathcal{A}=\{a\}$, *其中每个元素* a *表示人对自然界 (或社会) 可能采取的一个行动, 所有此种行动的全部就是* **行动集**.

在例 1.2 中, 农民可以采取两个行动, 一个是播种产量高但抗旱能力弱的种子 (a_1), 一个是播种抗旱能力强但产量低的种子 (a_2) . 所以农民的行动集是由两个行动组成, $\mathcal{A}=\{a_1, a_2\}$. 类似地, 在例 1.3 中, 投资者的行动集也是由两个行动组成.

一般行动集至少含有两个行动, 供人们决策之用. 假如行动集中只有一个行动, 那人们就不需选择, 从而也就形成不了一个决策问题. 行动集 $\mathcal{A}$中每一个行动都是人类对付自然界 (或社会) 的一种措施 (或对策) , 它是人类智慧的结晶. 假如有两个行动 a_1和 a_2, 无论对自然界 (或社会) 的那一个状态出现, a_1总是比 a_2 收益高, 那么 a_2 就没有存在之必要, 故要把这种行动从行动集中除去, 使留在行动集中的行动总有“可取之处”.

3 . **收益函数** $Q(\theta, a)$. *其中* θ *可以是状态集* Θ *中任一个状态,* a *可以是行动集* $\mathcal{A}$ *中任一个行动, 函数值* $Q(\theta_i, a_j)=Q_{ij}$ *表示当自然界 (或社会) 处于状态* θ_i, *而人们选取行动* a_j *时所得到 (经济上) 的收益大小.*

收益函数的值可正可负, 其正值表示盈利, 负值表示亏损. 收益函数的单位常用货币单位, 但有时也用其它容易比较好坏的单位, 如产量、销售量等. 收益函数是今后用来评价人们选取的行动是好还是坏的基础. 收益函数的建立不是一件容易的事, 往往要化大力

气，要对所研究的决策问题有比较全面的了解后才能建立起来.

当状态集和行动集都仅含有限个元素时，如$\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\}$，$\mathcal{A}=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，收益函数也只能取 nm 个值 $Q(\theta_i,a_j)=Q_{ij}$，这 nm 个值可以有规律地排成一个矩阵

$$Q=\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{array} & \\ \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1m} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nm} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{array} \end{array}$$

这个矩阵称为**收益矩阵**. 例 1.2 和例 1.3 中的矩阵都是收益矩阵. 收益矩阵是收益函数的一种特殊形式，其作用与收益函数一样，但它有“一目了然”的优点.

状态集 Θ、行动集 $\mathcal{A}$ 和收益函数 $Q(\theta,a)$ 是构造一个决策问题必不可少的三个基本要素. 一个决策问题是否弄清楚了，就看能否把这三个要素明确地写出来. 这三个要素中一个有变化，如状态集中少一个元素，或行动集中增加了一个行动，或收益函数改变了，都会导致决策问题的改变，形成另一个决策问题，因此结论也会不一样. 今后讲一个决策问题就意味着它的 Θ，$\mathcal{A}$ 和 $Q(\theta,a)$ 这三个要素全都给定了.

例 1.4 某食品公司从外地采购新鲜百合到当地销售. 外地百合购进价是 0.5元/公斤，运费是 225元/吨，估计运输损耗率是 5%. 而当地销售价要看市场情况，若百合在市场上畅销，则全部百合可按 1.4元/公斤售出；若百合在市场上销售一般，则全部百合的 20%可按 1.4元/公斤售出，60%可按 1.1元/公斤售出，其余只能按 0.7元/公斤售出；若百合在市场滞销，则 20%按 1.1元/公斤售出，50%按 0.7元/公斤售出，其余则变质，只能作损耗记帐. 面对此种情况，该公司仍决定采购新鲜百合，但采购多少尚未定，想在采购 15000公斤，10000公斤和 5000公斤中选择一个，以使收益最大.

这是一个人与市场间的一局博奕，也是一个决策问题. 在这个决策问题中，市场的状态集为 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$，其中 θ_1、θ_2、θ_3 依次表示百合在市场是畅销、一般、滞销; 其行动集为 $\mathcal{A}=\{a_1,a_2,a_3\}$，其中 a_1、a_2、a_3 依次表示欲采购百合 15000 公斤、10000 公斤、5000 公斤.

由于 Θ 和 $\mathcal{A}$ 都是有限集，故其收益函数可用 3×3 阶的收益矩阵表示，如百合在市场是畅销 (θ_1)，而决定采购 15000 公斤百合时的收益为

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= Q(\theta_1,a_1)\\
&= 15000\times 0.95\times 1.4-(15000\times 0.5+15\times 225)\\
&= 9075(\text{元}).
\end{aligned}$$

类似可算其它 8 个收益值 Q_{ij}. 全部计算结果依次排列在如下的 3×3 阶收益矩阵上

$$Q=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccc}
9075 & 6050 & 3025\\
4515 & 3010 & 1505\\
-2753 & -1835 & -917.5
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{c} \\ \theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3 \end{array}$$

当我们写出 Θ, $\mathcal{A}$ 和 Q 这三样东西后，才可以说我们对此决策问题弄清楚了.

例 1.5 某水果商店准备购进一批水果投放市场，购进价格 (包括运费) 为每斤 0.65 元，售出价格为每斤 1.10 元. 水果在购销过程中将损耗 10%，如果购进数量超过市场需求量，超出部分就必须以每斤 0.30 元的价格处理. 在市场需求量一时无法弄清的情况下，该商店经理应作如何决策?

这里我们先描述这个经营决策问题.

在这个经营决策问题中，市场需求量 θ 是状态参数. 它可取任

一个非负实数, 即其参数空间 $\Theta=[0,\infty)$. 这里 $\theta=\infty$是一种合理的夸大, 因为我们不知道市场最大的需求量是多少, 当然可以用一个很大的数, 如 100 亿斤, 去限制它. 但在人们的概念中, 100 亿斤水果与 ∞ 已无本质差别. 相应地, 为了适应市场需求, 经理可采取的行动 a (购进的水果斤数) 也应是任一个非负实数. 所以行动集 $\mathcal{A}=\Theta=[0,\infty)$.

最后, 我们来讨论收益函数 $Q(\theta,a)$, 它表示市场需求量为 θ, 而经理购进水果 a 斤时商店的收益值. 这要分两种情况处理. 当实际销售量 $0.9a$ 不超过市场需求量 θ 时, 商店收益为 $(1.10-0.65)\times 0.9a-0.65\times 0.1a$; 当实际销售量 $0.9a$ 超过市场需求量 θ 时, 商店收益为 $(1.10-0.65)\theta+(0.30-0.65)(0.9a-\theta)-0.65\times 0.1a$. 化简上式, 可写出该商店的收益函数为 (单位: 元)

$$Q(\theta,a)=\begin{cases} 0.34a, & \text{当 } 0.9a\leq\theta, \\ 0.8\theta-0.38a, & \text{当 } 0.9a>\theta. \end{cases}$$

三、经营决策问题

决策问题在人们的日常生活和工作中会经常遇到. 对工商企业来说, 随着经济体制改革的不断深入, 社会主义市场经济的逐步完善和全民所有制工业企业转换经营机制条例的贯彻落实, 企业的自主权将越来越大. 作为企业的法人和管理干部要用好这些权力, 必须提高企业的经营管理水平, 其中心问题就是适时地作出正确的决策. 因此, 决策问题将随着改革的深入, 会在企业中得到广泛的应用. 如在产品开发、技术引进、原料购买、市场销售、资金运用、效益提高……等方面都会遇到各种决策问题. 所以研究有关经营决策的理论和方法对提高工商企业的决策能力、应变能力、竞争能力, 提高企业的经济效益都具有重大的现实意义. 本书将着重讨论经营决策方法, 特别是经营决策中的统计方法. 因为经营管理中遇到的大部分问题是要用统计方法来解决的.

§ 1.2 损失函数

一、从收益到损失

决策问题的三个要素中收益函数是最重要的，它是度量状态为 θ 时，人们采用行动 a 所得的收益；它是把决策与经济效益联系在一起的桥梁. 有了它决策才能进入定量分析阶段. 但此种桥梁不仅限于收益函数，实际还可用亏损函数、成本函数、损失函数、支付函数等代替. 凡是能度量状态为 θ 时采用行动 a 而产生经济效益的都可以作这种桥梁. 所以本节将介绍在收益不便估算的情况下，常用估算它的损失来代替的方法，也就是用损失函数代替收益函数，用损失矩阵代替收益矩阵. 特别在状态集 Θ 是一个区间时，更常用损失函数. 使用损失函数还有一个好处是可以提高决策意识.

有人把损失看作是负的收益. 譬如某商店这个月经营收益为 −1000元，即亏 1000元. 这是对成本而言. 在这里我们不称其为损失，而称其为亏损. 我们这里所讲的损失是指“可赚而没有赚到的钱”或是“不该亏而亏损了的钱”. 譬如说商店本可赚 2000元，由于决策失误而亏损了 1000元，那我们说，该商店损失了 3000元. 此类损失带有“遗憾”之意，有的书上亦称“悔惜”. 这对提高决策意识是有好处的. 为了说明这一点，我们先看一个例子.

例 1.6 某公司购进某种货物可以分为大批、中批、小批三种方式 (即三种行动，分别记为 a_1、a_2、a_3). 未来市场需求量可分为高、中、低三种状态 (分别记为 θ_1、θ_2、θ_3). 这三种行动在不同市场状态下获得的利润如下 (单位：千元)：

$$
Q = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} & \\
\begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2.7 & -0.8 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{array}
\end{array}
$$

这是一个用收益矩阵来描述的决策问题. 现我们把它改写成一

个用损失矩阵来描述的决策问题. 为了简化语言的叙述, 用 θ 表示市场的状态, 用 a 表示经理所采取的行动. 于是"$\theta = \theta_1$"表示市场需求量高, "$a = a_2$"表示经理决定购买此种货物的数量是中批, 其余类同.

在这个例子中, 当 $\theta = \theta_1$ 时, 从其收益矩阵 Q 的第一行可以看出, 这时最优行动是 a_1, 可收益 10000元. 但由于经理事先并不了解市场行情, 可能会错误地采取了其它行动, 比如, 经理采取行动 a_2, 这时收益仅为 5000元, 与最优行动 a_1 的收益相比, 要少得 10000-5000 = 5000元, 这 5000元为公司"可赚而未赚到的钱". 所以这 5000元称为 $\theta = \theta_1$, $a = a_2$ 时经理的 **损失值** (或称 **悔惜值**). 类似地, 当 $\theta = \theta_1$, $a = a_3$ 时, 经理的损失值为 10000-2000 = 8000元. 当 $\theta = \theta_1$, $a = a_1$ 时, 经理的损失值为 0 (即无损失). 因为当状态 θ_1 发生时, 经理所采取的是最优行动. 用同样方法可得到在 $\theta = \theta_2$, $a = a_1$ 时, 经理的损失值为 1000元. 类似地可算出 θ 与 a 在不同情况下的一切损失值. 假如把这些损失值按原来次序排成一个矩阵 (单位: 千元)

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\
L = & \left(\begin{array}{ccc} 0 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3.7 & 1.8 & 0 \end{array}\right)
\end{array}
\quad
\begin{array}{c} \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{array}
$$

这个矩阵称为经理的 **损失矩阵** (或称为 **悔惜矩阵**). 由收益矩阵转换到损失矩阵的过程中可以看出, 损失值是指经理本可赚而未赚到的金额, 有懊悔之意. 从损失矩阵中可以看到, 市场处在各种状态下, 经理采取每个行动可能引起的损失. 所以经理在做决策时, 要尽力避免大损失, 而追求无损失. 只有经理的决策为最优时, 损失才会为零.

二、损失函数

在一般情况下, 当状态集 Θ 和行动集 $\mathcal{A}$ 不是有限集时, 损失矩

阵应以更一般的损失函数所代替. 它可以由收益函数获得. 设在某一个决策问题中, 其收益函数为 $Q(\theta, a)$, 那末当自然界 (或社会) 处于某个状态 θ_1 时, 最大的收益记为 $\max\limits_{a \in \mathcal{A}} Q(\theta_1, a)$. 则人们采取行动 a_1 时的损失值为

$$L(\theta_1, a_1) = \max_{a \in \mathcal{A}} Q(\theta_1, a) - Q(\theta_1, a_1).$$

当 θ 在状态集 Θ 中变化, 而 a 在行动集 $\mathcal{A}$ 中变化时, 我们就得到损失函数

$$L(\theta, a) = \max_{a \in \mathcal{A}} Q(\theta, a) - Q(\theta, a).$$

特别, 在 Θ 和 $\mathcal{A}$ 皆为有限集时, 损失函数又可用损失矩阵表示. 若记 $Q = (Q_{ij})_{n \times m}$ 为收益矩阵, 其中 n 是状态个数, m 是行动个数. 那末相应的损失矩阵也是 $n \times m$ 阶矩阵. 记为 $L = (L_{ij})_{n \times m}$, 其中

$$L_{ij} = \max_{1 \le k \le m} Q_{ik} - Q_{ij}.$$

从上述获得损失函数的过程中可以看出, 损失函数总是非负的, 即 $L(\theta, a) \ge 0$. 因而损失矩阵中无负值元素. 这一点与收益函数不同. 但损失函数与收益函数在决策问题中的地位相同. 用损失函数, 状态集和行动集同样可描述一个决策问题. 至于什么场合用损失函数, 什么场合用收益函数, 一般要根据实际情况决定, 以方便为好. 在下面的例子中选用损失函数为好.

例 1.7 某制药厂试制成一种新的止痛剂. 为了决定此新药是否投放市场, 投放多少, 价格如何等问题, 需要了解此种新的止痛剂在所有止痛剂中能够占领市场的比率 θ 是多少. 这是一个经营决策问题.

在这个问题中, 新止痛剂在市场的状态就是上述比率 θ, 所以状态集就是 $\Theta = \{\theta \mid 0 \le \theta \le 1\} = [0,1]$. 而决策者所要采取的行动只不过是选一个数 a 作为 θ 的估计值. 这个值当然也在 $[0,1]$ 之间, 所以行动集 $\mathcal{A} = [0,1]$. 顺便指出, 这里的状态 θ 可用一个实数

表示, 故又称为参数. 如今要估计 θ, 那就是参数估计问题. 在参数估计问题中常有 $\mathcal{A}=\Theta$.

在这个决策问题中, 要估计收益较为困难, 我们改用估算损失. 大家知道, 偏低估计 θ 或偏高估计 θ 都会给工厂带来损失. 如偏低估计 θ 将会导致供不应求, 能赚到的钱没有赚到, 造成工厂损失. 而偏高估计 θ 又会导致药物供过于求, 会给工厂造成更大损失. 因为供不应求只损失应得到的利润; 而供过于求将会造成库存增加, 资金积压, 原材料和设备浪费, 影响再生产. 厂长认为供过于求给工厂带来的损失要比供不应求的损失高一倍, 即偏高估计 $(a>\theta)$ 要比偏低估计 $\theta(a<\theta)$ 给工厂带来的损失高一倍. 假如损失与 $|\theta-a|$ 成正比, 那么厂长决定采用如下损失函数:

$$L(\theta,a)=\begin{cases}\theta-a, & \text{当 } a\le\theta\le 1\text{时},\\ 2(a-\theta), & \text{当 } 0\le\theta<a\text{时}.\end{cases}$$

有了这个损失函数, 加上状态集 $\Theta=[0,1]$和行动集 $\mathcal{A}=[0,1]$, 就描述了这个新的止痛剂投放市场的决策问题.

在做决策和评价决策时, 应该像上例所述的那样认真地确定损失函数. 在收益函数已知时也可求得损失函数.

例 1.8 某公司购进一批货物投放市场, 购进数量为 a 公斤, 市场需求量为 θ 公斤, 以利润为收益 (单位: 万元), 收益函数为

$$Q(\theta,a)=\begin{cases}15a, & a\le\theta,\\ 50\theta-35a, & a>\theta.\end{cases}$$

设货物在购销过程中无损耗, 则购进数量即为实际销售量. 当实际销售量 a 等于市场需求量 θ 时, $Q(\theta,a)$达到最大值, 故这时 $a=\theta$ 为最优行动, 最大收益为 $Q(\theta,\theta)=15\theta$. 因此, 当 $a\le\theta$ 时, 损失函数为

$$\begin{aligned}L(\theta,a)&=Q(\theta,\theta)-Q(\theta,a)\\&=15(\theta-a);\end{aligned}$$

当 $a>\theta$ 时, 类似地, 可得到损失函数为

$$L(\theta,a)=35(a-\theta).$$

从而得损失函数为

$$L(\theta,a)=\begin{cases}15(\theta-a), & a\le\theta,\\ 35(a-\theta), & a>\theta.\end{cases}$$

在做决策问题时, 大量是用收益表示行动结果. 但有时用亏损表示行动结果更方便. 如果 $Q(\theta,a)$ 表示亏损函数, 那么当 θ 在状态集 Θ 中变化而 a 在行动集中变化时, 我们得到的损失函数为

$$L(\theta,a)=Q(\theta,a)-\min_{a\in\mathcal{A}}Q(\theta,a).$$

同样, 在 Θ 和 $\mathcal{A}$ 皆为有限集时, 损失函数可用损失矩阵表示. 由此可见, 收益函数、亏损函数、成本函数、支付函数等各种函数, 都可以转化为损失函数. 在这个统一概念下叙述的方法可以适合各种度量效益的函数, 况且损失函数本身也有优点, 所以损失函数常被采用.

三、几个常用的损失函数

人们在长期的实践中已形成几个常用的损失函数. 这里对其中两个作简短的介绍. 它们都是在状态 θ 和行动 a 皆可用一个数表示时使用.

1. 平方损失函数

损失函数

$$L(\theta,a)=(\theta-a)^2$$

被称为**平方损失函数**, 它在描述决策问题中用得最多. 这是因为它符合决策所采取的行动 a 愈接近状态 θ 时损失应愈小的直觉. 我们还会看到, 采用平方损失函数可以简化计算.

平方损失函数的一个重要推广是

$$L(\theta, a) = W(\theta)(\theta - a)^2,$$

它被称为 **加权平方损失函数**. 它允许偏差的平方 $(\theta - a)^2$ 有一个 θ 的函数 $W(\theta)$ 作为权重. 这一点对使用者很有吸收力. 它反映在决策中由于 θ 的不同, 相同的偏差量的危害性经常是不一样的.

2 . 线性损失函数

损失函数

$$L(\theta, a) = \begin{cases} k_1(\theta - a), & \theta \geq a, \\ k_2(a - \theta), & \theta < a \end{cases}$$

被称为 **线性损失函数**, 其中 k_1 和 k_2 要根据具体问题来选定. 它们的选定反映了偏低估计 θ 和偏高估计 θ 的相对重要性. 例 1.7 中的损失函数就是线性损失函数. 常数 k_1 与 k_2 一般是不等的, 若相等, 则线性损失函数等价于

$$L(\theta, a) = |\theta - a|.$$

这个损失函数被称为 **绝对值损失函数**. 如果 k_1 与 k_2 还是 θ 的函数, 则其损失函数称为 **加权线性损失函数**.

§1.3 决策问题分类

一、三类决策问题

决策问题的分类一般是按决策者对自然界 (或社会) 状态的了解程度而进行的, 通常分成三类:

1. 确定型决策问题;
2. 非确定型决策问题;
3. 风险型决策问题.

下面将通过例题分别叙述这三类决策问题的区别.