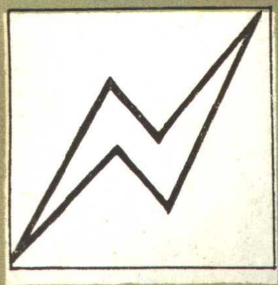
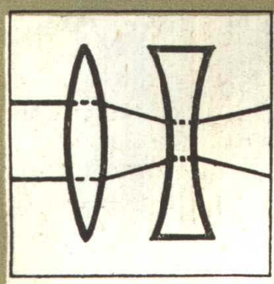
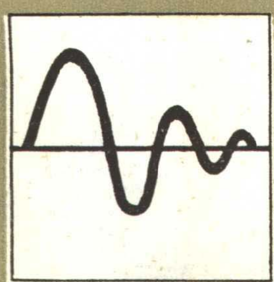
高等学校试用教材

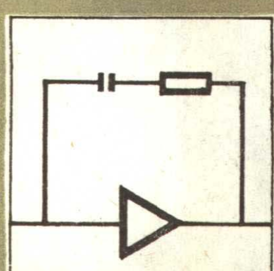


现代控制理论概论



山东工学院常春馨　编





机　械　工　业　出　版　社

前　言

本书系根据1978年12月一机部对口工业自动化专业教材编写会议上通过的《现代控制理论概论》教材编写大纲写成的。

本书是为高等院校工业自动化专业开设高年级选修课之用。因此，课程内容的增删对任课教师来说应有更多的自由。例如：第一、二两章可以根据学生的实际情况做必要地删减；而第八章则可以适当地再增添某些具体内容；若用于只学过经典控制理论的学生，则此书可做为全部现代控制理论的教学内容。

凡章节前带“*”号的部分，供教师选用。

为便于教师讲课和学生易于接受，对书中的一些难点采取了分散的办法。例如：有关估计理论中的一些基本定义和概念，不是集中到第七章中一下子交给学生，而是在第六章中结合“系统的识别”先做了部分介绍，使学生在学到第七章时有一个反复消化的过程。在编写内容的处理上，一方面尽量照顾到工科院校学生的特点，避开了一些过于繁琐的数学推导，而以不是十分严格但比较简单而又可信的证明来代替；另一方面为适当地扩大学生的接触面，便于学生今后自学，对某些问题的解释有意采取了不同的形式：如尤拉-拉格朗日方程的证明，以及对某些函数的说明都采用了不同的表达方式等等。

此外，本书尽量做到用简明通俗的语言说明问题，力求使学生对一些基本问题有较清晰的物理概念，并着重从工程的角度做一些解释，以利于学生消化书中的内容和树立必要的工程概念。

本书由山东工学院常春馨副教授编写，河北工学院么泰山副教授和孟昭忠同志等审稿，在编写过程中得到天津大学卞继仁副教授、河北工学院沈安俊副教授、南京工学院赵家璧副教授、西安交通大学黄俊副教授和上海市业余工业大学庄正邦教授等热心协助，并提出不少修改意见，得益非浅，在此一并致以衷心的感谢。由于本书编著时间较短，对于某些问题不一定说到好处，个人的某些论点未必恰当，错误也在所难免，希读者予以指正。

目　录

绪　论

由于近代工业、现代科学技术迅猛发展，各方面对自动控制程度、精度、速度、范围及其适应能力的要求越来越加迫切和广泛，因而推动了自动控制理论和技术的更快兴起。特别自六十年代以来，电子计算机技术飞速发展，为估计理论在自动控制系统中的应用提供了非常有利的条件，并进一步推动了自动控制理论的发展。卡尔曼滤波理论及其推广应用，基本上是在这一段时间内出现并臻于完备的，于是逐步地形成了一门现代科学分支，即现代控制理论。目前在应用现代控制理论设计新型的自适应控制系统、自学习系统和人机系统方面正处在不断地发展阶段。

众所周知，现代控制技术是相对于古典控制技术而言的。现代控制技术（工程）的理论基础是现代控制理论；经典控制技术（工程）的理论基础是经典控制理论，即自动调节理论。现代控制理论是由经典控制理论随着工业生产和科学技术的不断发展而逐步过渡过来的，二者各具长短，可以说现代控制理论是经典控制理论的补充与发展，在解决实际问题时，应根据不同的对象决定取舍。

概括来说，经典控制理论多半是用来解决单输入-单输出的课题，所牵涉到的系统一般来说是线性定常系统。在非线性系统中的相平面法一般也不超过两个变量。过去我们经常接触到的系统：例如机床和轧钢机中常用的调速系统，发电机的自动电压调节系统，以及冶炼炉的温度自动控制系统等等，这些系统过去都是被当做单输入-单输出、线性定常系统对待的。如果稍微精确一些，把某个干扰考虑在内，也不过是把它们做线性迭加处理罢了。解决以上这类问题时，采用频率法、根轨迹法、包括奈氏稳定判据、期望对数频率特性综合等，是比较方便的，这些都属于古典控制论的范畴。所得出的结果在精确度、准确度不是要求极高的情况下是完全可用的。但如果对加工机械有了更高的要求，例如磨床，只靠恒速或恒转速，即使加上砂轮自动补偿也是不够的。因为磨床在磨削过程中，砂轮的质量是不断变化的。砂轮的半径越来越小，切线速度处在经常变动中，如果保持恒转速，磨削效率必越来越低，为了提高效率，可以使转速提高，但在恒功率条件下，这样做的结果必然导致转速减小，因此需要调速，但这一种调速和我们前面所提到的调速含义就不一样了。而且由于考虑进去另一个变量（砂轮），这已是一个时变系统。其实其他加工机械都有类似的情况，在解决这类问题时，更何况在比较精密的加工机械的使用中，有的控制变量达七个之多，古典法对此已无能为力。因此，不仅在航天飞行器或导弹、火炮的控制方面需要现代控制理论，即使是在工业生产上，由于对产品的质量和产量有了更高的要求，现代控制理论也日渐为人们所注意，并日趋普及和应用。

简单说来，现代控制理论主要是用来解决多输入-多输出系统的问题，系统可以是线性的或非线性的、定常和时变的。在描述系统的运动状态时，古典法是用一个高阶微分方程式来表达，而现代法则是用一个一阶微分方程组（即后面讲到的状态方程）来描述。由于古典法是基于对系统频率特性的描述而建立起来的，因而被称为频率法；而现代法所采用的则是时域法，即系统中的各个变量皆取为时间 t 的函数。这样做的优点：一是一阶微分方程组便

于利用计算机运算，当所取变量的数目增多时实际上并不太多地增加运算的复杂性；二是利用时域法容易给人以在时间上的清晰概念，这一点在用于离散-时间系统时特别明显。以上就是古典法和现代法的主要区别。

就现代控制理论所包括的范畴来说是很广泛的。但概括说来，主要有如下几个方面：

1．系统运动状态的描述，即系统的数学模型；

2．系统的稳定性；

3．系统的识别——对系统识别的目的，一是用于建立系统的动态数学模型；二是利用识别手段对系统的动态性能指标进行判断，看其是否与理想的动态性能指标相符合。如若不然，则发出相应的讯号，指令控制机构改变系统的结构参数或输入信号，促使系统的动态性能指标向理想性能指标靠拢。

4．系统的最佳控制——任何一个系统都有其最佳的运行指标，这一指标在复杂的系统里往往被表达成泛函的形式，因而常被称做系统的性能指标泛函或系统的目标泛函以及价值函数等等。所谓系统的最佳控制，就是在实现系统的性能指标泛函为最小的情况下，如何改变系统的控制作用，使系统能沿着一个最佳的运行方式工作的问题。至于什么是系统的最佳运行方式，对于不同的系统有不同的要求；譬如有的系统可以以时间最短为最佳，而有的系统则可以以能量消耗最少为最佳等等。这些都将在第四、五两章中加以阐明。

5．系统的自适应控制——由于近代科学的发展，对自控系统的控制能力也要求越来越高。一方面不仅要求系统能在环境条件有大范围的变化时仍能保证系统运行在最佳状态；而且希望系统能在环境条件的改变并不确知的情况下，也能实现最佳控制，这就是自适应控制中所要解决的课题。上述第一类系统即通常所说的确定性自适应控制系统，第二类则被称为不确定性自适应控制系统。

由上所述可见，在实现最佳控制和自适应控制时，必须有对未来环境条件估计的知识，即最佳估计理论问题。这一类问题集中起来就形成了卡尔曼滤波理论。因此在本书中专门辟了一章扼要介绍卡尔曼滤波器，做为读者在今后深入学习这方面问题的预备知识。

本书共分八章。

第一章数学基础的主要内容是介绍矢量空间的概念、矩阵的线性变换和矩阵分析。所选择的内容在不失其自身系统性的原则下，尽量做到与全书后面章节相呼应，即本着学以致用的原则对有关部分做了取舍。这一章是全书的共同基础。

第二章主要讲述了状态、状态方程的列写和其求解方法，并阐明了系统的能控性和能观测性条件，以及状态观测器的求法。对降维观测器只做了扼要的介绍。

第三章系统讲述了利用里亚普诺夫第二法对系统稳定性进行分析的理论和方法，并详细阐明了各类系统的里亚普诺夫函数（即V-函数）的求法。为以后几章利用里氏第二法判断系统的稳定性和对自适应系统的结构进行设计打下必要的理论基础。

第四、五两章系统阐明了连续-时间和离散-时间系统的最佳控制原理，除对哈密尔顿-雅可比-贝尔曼方程做了必要的证明外，对庞特里亚金极大（小）值原理只做了概念性的说明。为使读者熟悉最佳控制理论的具体应用，在本章每节的后面都附上了应用的实例。在离散-时间系统中的最佳控制主要结合了最小时间系统（也叫最佳快速系统）进行了讲解。对于系统的动态规划法着重于讲清楚其依据和思维方法，对于具体的推证在讲课中建议可只做扼要说明，具体步骤可由读者通过自学解决。

四、五两章的主要内容和要求是使读者通过学习能够初步掌握最佳控制理论的应用。

第六章除对必要的概率论基础知识和有关估计理论的定义做了浅显的解释外，着重介绍了工程上常用的利用伪随机二位式信号对系统进行识别的基础理论和方法。

第七章系统阐明了卡尔曼滤波理论及其推广应用，并对卡尔曼滤波器的稳定性和如何克服滤波发散现象的方法做了简要的说明。在证明卡尔曼滤波公式时，作者力求用了简单明瞭的语言说明问题，在证明方法上或须有不甚严格之处，但在工程上是可以接受的。

本章内容的重点是使读者掌握卡尔曼滤波的物理概念，同时懂得如何利用递推计算方法求出对系统的线性最佳估计。

第八章自适应系统只是概略地对这一问题做了扼要叙述。由于自适应系统的结构设计方法很多，而且现仍在不断发展之中，但利用里亚普诺夫第二法进行设计的方法，目前用得最多，因此只对这一方法做了较为详细的说明，其他方法只是顺便一提。其实，设计一个完整的自适应系统并非只是依靠某一种方法就可以达到完善程度的，多半是几种方法结合起来使用。但就其整体来说，在系统参数改变时应能保证系统的稳定性，所以为了保证系统的全局稳定性，利用里亚普诺夫第二法进行系统设计是比较方便的。

由于“现代控制理论”是一门正在蓬勃发展中的学科，在本书论及的各个章节中，都有最新成就和发展，而且就其深度和广度来说，都已大大超出了本书所能容纳的范围。因此，本书只是给读者以有关“现代控制理论”的初步基础知识。但即使如此，本书所牵涉到的方面已经相当广泛。有关问题的深入部分，相信读者在弄懂这些基础以后是可以逐步解决的。

第一章　数学基础

§1-1　矢量空间

一、定义

什么叫做矢量空间？矢量空间的含义如何？

要回答上面提出的问题，首先须说明一下“集”的概念。

1.　集

“集”是数学中最基本的概念之一。简单地说，“集”是某一类东西组成的一个整体。例如，学校里的一个班级就是由一些同学组成的集；一条直线是一个由点组成的集；以及一个级数系列是由组成该级数系列的各项所组成的集等等。凡组成集的东西称为这个集的元素，记作

$$a \in A \tag{1-1}$$

上式表示，集 A 的元素是 a，读作 a 属于 A。

若 A 集中的元素 a 全是 B 集中的元素，则称 A 集是 B 集的子集。记作

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A \tag{1-2}$$

若需要对元素的特性加以指明，可如下表示

例如：$a:a \in A$，和 $b:b \in B$ 说明 a 元素的特点是 a 属于 A 集，b 元素特点是 b 属于 B 集的。

若元素 a 并不属于 A 集，则用符号

$$a \notin A \text{ 或 } a \,\bar{\in}\, A \tag{1-3}$$

表示。

例　设 R 为实数 r 的集，而这些实数 r 的特点是 $|r| \leqslant 1$，则可表示为

$$R = \{r : |r| \leqq 1\}$$

若令 ϕ 代表不包含任何元素的集，则 ϕ 叫做“**空集**”或“**零集**”。

设 A 和 B 是 n 维空间 V 中的两个子空间、既属于 A 又属于 B 的一切矢量组成的集，称为 A 与 B 的**交**，记作 $A \cap B$。

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 及 } x \in B\} \tag{1-4}$$

表示所有元素 x 的集都在 A 与 B 中。

属于集 A 或者集 B 的全体元素所组成的集，则称为 A 与 B 的**并**，记作 $A \cup B$。

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\} \tag{1-5}$$

表示所有元素 x 的集不是在 A 就是在 B 中。

若 A 和 B 皆是 n 维空间 V 的子空间，则 $A \cap B$ 和 $A \cup B$ 也是 V 的子空间。

如果 $A \subset B$，则不包含在 A 中的 B 集中的元素所组成的集，可称为 B 集中的补 A 集，用符号 A^c 表示。或用 $(B-A)$ 表示。

已知 $x \,\bar{\in}\, A$ 表示 x 不是 A 集的元素，则

$$B - A = \{x : x \in B \text{ 及 } x \,\bar{\in}\, A\} \tag{1-6}$$

A 集与 B 集的乘积则表示为

$$A\times B=\{(a,\ b):a\in A,\ b\in B\} \tag{1-7}$$

即A集和B集中所有相对应的元素（a，b）所组成的集，其中$a\in A$，$b\in B$。

有时$(a,\ b)$也可用$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$表示。

在求A集与B集的乘积时需注意$A\times B\neq B\times A$。有关集的运算法则如下：

（1） 设A、B、C皆为集，则

1） $A-A=\emptyset$ 及 $A\emptyset-=A$； (1-7)

2） $A\cup A=A$ 及 $A\cap A=A$；

3） 只有当 $A\cup B\subset C$ 时，才有 $A\subset C$ 及 $B\subset C$；

4） 只有当$C\subset A\cap B$时，才存在 $C\subset A$ 及 $C\subset B$；

5） $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

6） $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

（2） 设A、B、C、D皆为集，则

1） 仅当 $A=\emptyset$ 或 $B=\emptyset$ 时，才有 $A\times B=\emptyset$； (1-8)

2） $(A\times B)\cup(C\times B)=(A\cup C)\times B$；

3） $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$。

2． 矢量空间

矢量空间是线性空间，有时也将线性空间叫做矢量空间。换句话说，矢量空间中的运算法则属于线性运算法则的范畴。

例如：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\text{为二维矢量空间；}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\text{为三维矢量空间；}$$

而

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\text{为 } n \text{ 维矢量空间}$$

当$\mathbf{x}$属于某一矢量集V时，称X是V的元素，即$\mathbf{x}\in V$。如果V是一个n维矢量空间，则V内的元素（n维矢量）有如下性质：

若$\mathbf{x}$，$\mathbf{y}\in V$，λ是一个数，则

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x}+\mathbf{y}\in V \\ \lambda\mathbf{x}\in V \end{array}\right\} \tag{1-9}$$

以上两种运算满足下列要求：

（1） 1） $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$；交换律 (1-10)

2） $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$；结合律

3） 存在着零元素$\mathbf{0}$，使得对任一$\mathbf{x}\in V$，总有$\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$；

4） 对任一$\mathbf{x}\in V$，有负元素$-\mathbf{x}\in V$，使得$\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$。

（2） 1） $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$；

2） $\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$；

（3） 1） $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$（分配律）

2） $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$。

上式中 α、β 是数。

概括来说，凡具备上列性质的任一对象的集，即称为**线性空间**。线性空间的元素称为**矢量**，因此，线性空间也叫**矢量空间**。

例如：在数域R上的单变数多项式的前 $n-1$ 项和零次项，合在一起形成一个 n 维线性空间 R_n；$m\times n$ 矩阵的集；区间$[a,\ b]$上的连续函数的全体，线性齐次微分方程式的解的全体；以及按函数的加法和数与函数的乘法的全体实函数所构成的线性空间皆具备上列性质，因而也都是线性空间。

线性空间中的矢量，可以是通常的几何矢量，可以是矩阵或多项式，也可以是某一区间$[a,\ b]$上的连续函数，以及线性微分方程式的解等等。

二、空间的维数

由于空间的维数决定于空间矢量间的线性组合关系，因此，应首先对线性组合关系加以阐明。

1． 空间矢量的线性相关与线性无关性

设V是线性空间，矢量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2\cdots\mathbf{x}_m\in V$，如果能找到一个数组$(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_m)\neq(0,0,\cdots,0)$，能使

$$k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2+\cdots+k_m\mathbf{x}_m=0 \tag{1-11}$$

则称$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，…，$\mathbf{x}_m$为线性相关。反之，如果仅当$(k_1,\ k_2,\ \cdots k_m)=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$时，才有

$$k_1\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{x}_2+\cdots+k_m\mathbf{x}_m=0 \tag{1-12}$$

则称 $\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，…，$\mathbf{x}_m$ 线性无关。

例1-1 已知矢量 $\mathbf{a}_1=(1,\ 1)$ 与 $\mathbf{a}_2=(2,\ 2)$在同一条直线上，它们之间的关系为

$$\mathbf{a}_2=2\mathbf{a}_1$$

即

$$\mathbf{a}_2-2\mathbf{a}_1=0$$

由上可以看出，显然存在着$(k_1,\ k_2)=(2,\ -1)\neq(0,\ 0)$使

$$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2=0$$

于是可知，矢量$\mathbf{a}_1$和$\mathbf{a}_2$为线性相关。

例1-2 若矢量$\mathbf{b}_1=(1,\ 0)$，$\mathbf{b}_2=(0,\ 1)$不在同一条直线上，则不存在

$(k_1,\ k_2)\neq(0,\ 0)$能使

$$k_1\mathbf{b}_1+k_2\mathbf{b}_2=0$$

这是因为

$$k_1\mathbf{b}_1+k_2\mathbf{b}_2=(k_1,\ 0)+(0,\ k_2)=(k_1,\ k_2)$$

若令上等为0，必须

$$(k_1,\ k_2)=(0,\ 0)$$

因此，按本节定义，$\mathbf{b}_1$和$\mathbf{b}_2$为线性无关

由以上两例可以看出，在二维空间里的矢量线性相关问题，实质上是指矢量是否共线问题、若所论矢量是共线的，则它们是线性相关的；否则便是线性无关。这也是线性相关名称

之由来。将这一概念引伸至多维空间，便是通常所说的线性组合关系。

例1-3 在二阶方阵的空间内，可以列出四个线性无关的二阶方阵，

即 $$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}。$$

如果再加上一个任意的二阶方阵，如

$$\mathbf{A}_5=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$$

则由于 $\mathbf{A}_5=\mathbf{A}_1+2\mathbf{A}_2+3\mathbf{A}_3+4\mathbf{A}_4$，

所以 $\mathbf{A}_1$，$\mathbf{A}_2$，$\mathbf{A}_3$，$\mathbf{A}_4$，$\mathbf{A}_5$为线性相关。

例1-4 设有 n 个 n 维矢量

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1&=(1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0)\\\mathbf{e}_2&=(0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\\mathbf{e}_n&=(0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 1)\end{aligned}$$

试证其线性无关。

证：由上式可得

$$\mathbf{e}_1k_1+\mathbf{e}_2k_2+,\ \cdots,\ +\mathbf{e}_nk_n=(k_1,\ k_2,\ \cdots k_n)$$

若满足$k_1\mathbf{e}_1+k_2\mathbf{e}_2+,\ \cdots,\ +k_n\mathbf{e}_n=0$的条件，显然由上式可知，必须

$$(k_1,\ k_2,\ \cdots k_n)=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$$

因此，$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\cdots\mathbf{e}_n$ 是线性无关的。

例1-5 求 $\mathbf{a}_1=(1,\ 4,\ 1)$的相关性。

$\mathbf{a}_2=(1,\ 2,\ 3)$

$\mathbf{a}_3=(1,\ 3,\ 6)$

解 设有k_1，k_2，k_3，能使

$$k_1\mathbf{a}_1+k_2\mathbf{a}_2+k_3\mathbf{a}_3=0$$

即 $$\begin{aligned}&k_1(1,\ 4,\ 1)+k_2(1,\ 2,\ 3)+k_3(1,\ 3,\ 6)\\&=(k_1+k_2+k_3,\ 4k_1+2k_2+3k_3,\ k_1+3k_2+6k_3)=(0,\ 0,\ 0)\end{aligned}$$

于是得

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\4k_1+2k_2+3k_3=0\\k_1+3k_2+6k_3=0\end{cases}$$

以上为一三阶齐次方程式组，其系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\4 & 2 & 3\\1 & 3 & 6\end{vmatrix}=-8\neq 0$$

可知，欲满足线性相关条件，必须$k_1=k_2=k_3=0$，因而求得$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$为线性无关。

由上述例题可以推广得出以下有关矢量相关性的重要定理，即

定理一 设有 n 个 n 维矢量

$$\mathbf{a}_1=(a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{1n})$$

$$\mathbf{a}_2=(a_{21},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{2n})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{a}_n=(a_{n1},\ a_{n2},\ \cdots,\ a_{nn})$$

如果行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1-13}$$

则$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，…，$\mathbf{a}_n$必线性无关

定理二 当 $m\geqslant 2$ 时，矢量 $\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，…，$\mathbf{a}_n$ 线性相关的充分必要条件是其中至少有一个矢量可表成其他 $m-1$ 个矢量的线性组合。

2. 矩阵的秩与矢量相关性的关系

（1） 秩的定义 矩阵中所含不等于零的子行列式的最高阶数，即称为矩阵的**秩或秩数**。矩阵**A**的秩用符号秩(**A**)或Bank **A**表示。

当**A**为 n 阶方阵时，若秩（**A**）$=n$，则称**A**为满秩矩阵；若秩（**A**）$<n$ 则称**A**为降秩矩阵。

由上节所述可知，秩(**A**)$=n$的必要条件是矩阵**A**的判别式 $\Delta_A\neq 0$ 或$|\mathbf{A}|\neq 0$，因此满秩矩阵必是非奇异矩阵；而降秩矩阵则是奇异矩阵。

（2） 矩阵的秩与矢量相关性的关系

根据上节中的定理和秩的定义，我们可以很容易地推得如下定理：

定理三 设矩阵**A**的秩为 r，则**A** 中有 r 个行（或列）矢量线性无关(因为其 $\Delta_r\neq 0$)；而其余的行（或列）矢量是这 r 个行（或列）矢量的线性组合。

定理四 n 阶行列式的行（或列）矢量线性无关的充要条件是其行列式不等于零。

定理五 设**A**为一 $n\times m$ 矩阵，**B**为一 $m\times s$ 矩阵，则

$$\text{秩}(\mathbf{AB})\leqslant \min\,[\text{秩}(\mathbf{A}),\ \text{秩}(\mathbf{B})] \tag{1-14}$$

即矩阵乘积**AB**的秩小于或等于**A**或**B**的秩。

上式中min［秩(**A**)，秩(**B**)］表示秩(**A**)和秩(**B**)中之小者。

证：欲证明(1-14)式成立，需证明秩(**AB**)$\leqslant$秩(**A**)，同时秩(**AB**)$\leqslant$秩(**B**)。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{bmatrix}$$

令 B_1，B_2，…B_m 表示 **B** 的行矢量，C_1，C_2…C_n 表示 **AB** 的行矢量。由计算可知，C_i的第 j 个元素和 $a_{i1}B_1+a_{i2}B_2+\cdots+a_{im}B_m$ 的第 j 个元素都等于$\sum\limits_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$，因而

$$C_i=a_{i1}B_1+a_{i2}B_2+\cdots+a_{im}B_m \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

上式表示矩阵**AB**的行矢量组C_1，C_2，…，C_n 可经**B**行矢量组线性表出。由前所讲可知，**AB**的秩不能超过 **B** 的秩，即

$$\text{秩}(\mathbf{AB})\leqslant(\mathbf{B})$$

同理，可证得

$$秩(\mathbf{AB}) \leqslant 秩(\mathbf{A})$$

（3） 线性方程式的解与秩的关系

设线性方程式组为

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}\right\} \tag{1-15}$$

其系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \tag{1-16}$$

而由方程式组的系数和常数项组成的矩阵，叫做该方程式组的**增广矩阵**，用 $\tilde{\mathbf{A}}$ 表示，即

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{vmatrix} \tag{1-17}$$

如果(1-15)式有解；设为 $x_1 = K_1$，$x_2 = K_2$，$\cdots x_n = K_n$ 则有

$$\left.\begin{aligned} a_{11}K_1 + \cdots + a_{1n}K_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \\ a_{m1}K_1 + \cdots + a_{mn}K_n = b_m \end{aligned}\right\} \tag{1-18}$$

若用$\mathbf{a}_1$，$\cdots$，$\mathbf{a}_n$表示$\mathbf{A}$的$(n+1)$个列矢量，则上式可写成

$$\mathbf{a}_1K_1 + \mathbf{a}_2K_2 + \cdots + \mathbf{a}_nK_n = \mathbf{b} \tag{1-19}$$

(1-19)式表明b是$\mathbf{a}_1\cdots$，$\mathbf{a}_n$的线性组合。由前所讲线性相关定理可知，如果秩$(\tilde{\mathbf{A}}) = r$，则 $\tilde{\mathbf{A}}$ 中有 r 个行（或列）为线性无关矢量，而其余 $r+1$ 个行（或列）矢量是这 r 个行（或列）矢量的线性组合。或者说 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的 r 阶子式不等于零，而 $r+1$ 阶以上的子式皆为零。

由于 $\mathbf{A}$ 中不为零的 r 阶子式也就是 $\tilde{\mathbf{A}}$ 中的 r 阶子式，故

$$秩(\tilde{\mathbf{A}}) = 秩(\mathbf{A}) = r$$

以下可分两种情况讨论：

① 如果 $r=0$，即$\mathbf{A}$的一切列矢量均为零矢量。这时，任意 n 个数都是(1-15)式的解；即 x 可等于任意值。

② 如果$r \neq 0$，这时$\mathbf{A}$中有 r 个线性无关矢量，而 b 是它们的线性组合，因而(1-19)式成立．由(1-18)式可知，这时(1-15)式的解为

$$x_1 = K_1, \quad x_2 = K_2, \quad \cdots, \quad x_n = K_n$$

于是得定理如下：

定理六 线性方程式组(1-5)式有解的充要条件是它的系数矩阵与增广矩阵同秩。

例1-6 线性方程式组：

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2-x_3=1 \\ 3x_1+6x_2-3x_3=0 \\ 2x_1-4x_2+2x_3=-1 \end{cases}$$

上式中后两行只差一比例，可知A的秩为2，Ã的秩为3，二者秩不相等，故无解。

例1-7　取上述方程式组的前两式，即

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2-x_3=1 \\ 3x_1+6x_2-3x_3=0 \end{cases}$$

它们的系数矩阵A与增广矩阵Ã同秩，故方程式组有解。由上述定理可知由于齐次方程式组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \tag{1-20}$$

的系数矩阵A与增广矩阵Ã同秩，故方程式组一定有解。

以上讨论了方程式组(1-15)有没有解的条件，至于方程式组(1-15)的解的性质仍须分做几种情况说明。

设　秩(A)＝秩(Ã)＝r

①　$r\leqslant n$；$r=0$时，(1-5)式有任意解

$r\neq 0$时，则

$$D_r=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \end{vmatrix}\neq 0$$

于是Ã中有r个行矢量线性无关、而其他$r+1$个行矢量是这个行矢量的线性组合。因此(1-15)式中任一个方程也都是前r个方程的线性组合。所以，由这前r个方程式构成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{r1}x_1+\cdots+a_{rn}x_n=b_r \end{cases} \tag{1-21}$$

的解都是(1-15)式的解，反之亦然。

故解(1-15)时，只须解(1-21)式即可。但因$r<n$，其解的个数为无穷多。

②　$r=n$，$r\neq 0$时方程组(1-21)的解就是(1-15)式的唯一解，于是得

定理七　线性方程式组(1-15)有唯一解的充要条件是秩(Ã)＝秩(A)＝n，有无穷多个解的充要条件是秩(Ã)＝秩(A)＜n。

定理八　齐次方程式组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

当$m<n$时必有非零解；当$m=n$时有非零解的充要条件是它的系数行列式等于零。

例1-8　求座标平面上过(x_1, y_1)和(x_2, y_2)两点的直线方程。

解　设所求直线方程为

$$ax+by+c=0$$

将已给座标值代入得

$$ax_1+by_1+c=0$$
$$ax_2+by_2+c=0$$

上列方程式组的未知数 a，b，c 构成了一个齐次方程式组。由上述定理可知，当 $m=n$ 时必有齐次解。故知其系数行列式 $|A|=0$。

即

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{1-22}$$

便是所求直线方程式。

同理，可求得过空间三个点 (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) 和 (x_3, y_3, z_3) 的平面方程为

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix}=0 \tag{1-23}$$

3． 空间的维数与基底

定义　若在线性空间 V 中只能找到 n 个线性无关的矢量，则称 V 是 n 维空间；反之，若在 V 空间内存在着任意个数的线性无关矢量，则称 V 为无穷维空间。

根据以上定义可见，n 个线性无关矢量决定了一个 n 维空间，而在此空间内的其他大于 n 的任何矢量，都与该 n 个矢量线性相关。

例如，在前面例 1-3 所说的二阶方阵空间中，可以写出四个线性无关的矢量，因此其空间的维数为 $4=2^2$。

一般来说，n 阶方阵所形成的空间维数为 n^2。

又如：n 维矢量

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

所决定的空间维数为 n。

这是因为在以上空间中我们可以找到 n 个线性无关矢量（如例 4 所示）

$$\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_n=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

而 $\mathbf{x}$ 可写成

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$$

之故。

由上面的例子中可以看出：任何一个行矢量（或列矢量）都可以表达成它的各个元素和一组线性无关矢量的线性组合。而该线性无关矢量组中的矢量个数等于行矢量（或列矢量）