

本书是一本学习材料力学的参考书。以材料力学的基本内容为主，共收集各种类型的习题536道。

书中每章均包括“内容提要”和“习题解析”两个部分。主要介绍分析、演算材料力学问题的方法，以加深读者对材料力学基本概念的理解和提高解题能力。

本书主要供电视大学、工人业余大学和工科院校学生阅读，也可供一般工程技术人员参考。

材料力学习题解析

胡增强 编

*

中国农业机械出版社出版

北京市海淀区阜成路东钓鱼台乙七号

福州第二印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

新华书店经售

*

787×1092 32 开26 $\frac{3}{4}$ 印张 584 千字

1983年10月北京第一版 • 1983年10月福州第一次印刷

印数：00,001—40,000 定价：2.65 元

统一书号：15216·125

前 言

材料力学是一门与机械、土建等工程实践紧密联系的基础学科。学习材料力学，一是要搞清基本概念，掌握基本理论和基本方法；二是要重视实践，其中包括演算一定数量的习题，以提高分析问题和解决问题的能力。这两者之间是相辅相成、辩证统一的。本书分析和解答了相当数量的各种类型的习题，可供读者学习材料力学时参考。

本书以《材料力学教学大纲》的基本内容为主。各类习题主要选自国内、外近期的材料力学教材和习题集，共收集了各种类型和不同深度的习题536道。

本书每章均分为“内容提要”和“习题解析”两个部分。习题按章、节序号编排，解答大多列出了解题步骤，有的还附有简要的讨论或说明。在解题方法方面，主要按照教学要求进行，并不一定是最佳解法。每节最后带*号的习题，供要求较高或学有余力的读者参考。

本书主要供电视大学、工人业余大学和工科院校学生阅读，也可供一般工程技术人员参考。限于编者水平和编写时间，书中错漏之处，敬希读者批评指正。

值本书出版之际，谨向本书所选习题的各书编著者致以深切的谢意。

编 者

1981年8月于南京

目 录

前 言

第一章	拉伸与压缩	1
第二章	剪切	90
第三章	扭转	120
第四章	平面图形的几何性质	187
第五章	弯曲应力	220
第六章	弯曲变形	332
第七章	应力、应变分析基础 强度理论	420
第八章	组合变形	504
第九章	交变应力	577
第十章	压杆稳定	611
第十一章	能量方法	679
附录 I	截面图形的几何性质	799
附录 II	梁在简单载荷作用下的变形	804
附录 III	型钢表	809

第一章 拉伸与压缩

内 容 提 要

一、轴向拉伸或压缩的概念

轴向拉伸（压缩）的力学模型 如图1-1所示。

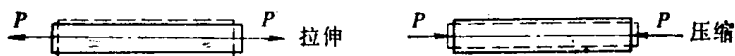


图 1-1

构件特征 构件为等截面的直杆。

受力特征 外力作用线与杆件轴线重合。

变形特征 杆件轴线在受力后均匀伸长（缩短），即杆件两横截面之间沿杆件轴线方向产生相对的平行移动。

二、轴向拉伸（压缩）时，横截面上的内力——轴力

内力的定义 由外力作用所引起的、构件内部相互之间的作用。

截面法 截面法是求内力的一般方法。用截面法求内力的步骤为：

1. 截开 在需求内力的截面处，假想地沿该截面将杆件截开。
2. 替代 任取一部分，其弃去部分对留下部分的作用，以作用在截开面上相应的内力来代替。
3. 平衡 考虑留下部分的平衡，由平衡条件求出该截面

上的未知内力。

轴力 轴向拉(压)时, 杆件横截面上的内力。因其作用线与杆件轴线重合, 称为轴力(图1-2), 习惯上用记号 N 表示。

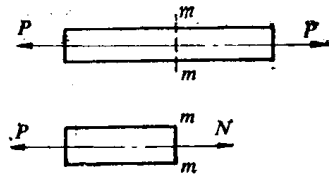


图 1-2

轴力符号 轴力 N 规定拉力为正, 压力为负。注意, 列平衡方程时, 力的正、负, 以其使物体产生的运动趋势规定;

内力的正、负, 以其使物体产生的变形趋势规定。

轴力图 表示沿杆件轴线各横截面上轴力的变化规律的图线。

三、轴向拉伸(压缩)时, 横截面上的应力

应力的定义 由外力作用所引起的内力集度。图1-3表示在任意力系作用下, 任一截面上点 O 处的应力:

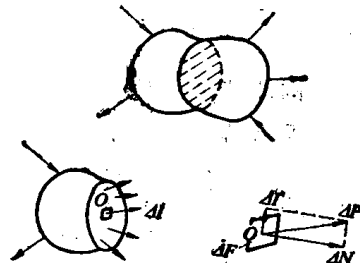


图 1-3

全应力

$$p = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} = \frac{dP}{dF} \quad (1-1a)$$

正应力 垂直于截面的应力分量

$$\sigma = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta F} = \frac{dN}{dF} \quad (1-1b)$$

剪应力 平行于截面的应力分量

$$\tau = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta F} = \frac{dT}{dF} \quad (1-1c)$$

应力的特征

1. 应力定义在物体的假想截面或边界上的一点处。

2. 应力的量纲为单位面积的力。

应力的单位为牛顿每平方米(N/m^2), 即帕(Pa)。

3. 应力为矢量, 等效于材料的一部分对另一部分的作用。应力矢量的方向不受限制。

轴向拉(压)时, 横截面上的正应力

分布规律 正应力在整个横截面上均匀分布(图1-4)。

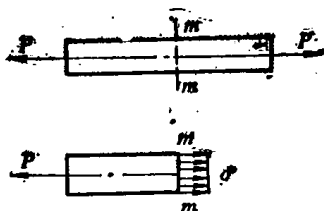


图 1-4

计算公式

$$\sigma = \frac{N}{F} \quad (1-2)$$

正应力公式的讨论

1. N 为所求截面上的轴力。

2. 阶梯形杆(图1-5 a)各段中横截面上的应力, 可分别应用式(1-2)计算; 截面连续变化的直杆(图1-5 b), 当杆件两侧棱边的夹角 $\alpha \leq 20^\circ$ 时, 可应用式(1-2)计算, 所得结果的误差约为 3%。

3. 在外力作用点附近及杆件外形突然变化处, 应力分布有较大的影响, 不能应用式(1-2)①。



图 1-5

① 在外力作用点附近, 其应力分布与外力的作用方式有关, 但其影响范围一般不超过杆件的横向尺寸; 在杆件外形突变处, 将产生应力集中现象。

四、轴向拉伸（压缩）时，斜截面上的应力

斜截面应力 斜截面上的应力分量（图1-6）为

$$\text{全应力} \quad p_{\alpha} = \frac{N}{F_{\alpha}} = \sigma_0 \cos \alpha \quad (1-3a)$$

$$\text{正应力} \quad \sigma_{\alpha} = p_{\alpha} \cos \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha \quad (1-3b)$$

$$\begin{aligned} \text{剪应力} \quad \tau_{\alpha} &= p_{\alpha} \sin \alpha = \sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (1-3c)$$

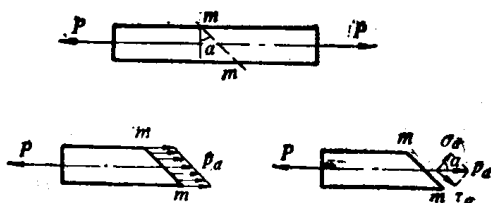


图 1-6

符号规定 α 逆钟向转动为正；

σ_{α} 拉应力为正；

τ_{α} 对截面内一点产生顺钟向力矩为正。

最大最小应力 $(\sigma_{\alpha})_{\max} = \sigma_{\alpha=0^{\circ}} = \sigma_0$

$$(\sigma_{\alpha})_{\min} = \sigma_{\alpha=90^{\circ}} = 0$$

$$|\tau_{\alpha}|_{\max} = \tau_{\alpha=\pm 45^{\circ}} = \frac{\sigma_0}{2}$$

$$|\tau_{\alpha}|_{\min} = \tau_{\alpha=0^{\circ}, 90^{\circ}} = 0$$

注意，剪应力的正、负，仅表示其指向不同，对于材料的剪切强度来说是相同的。

五、轴向拉伸（压缩）时的强度

低碳钢的静拉伸试验 以一定规格的试件，通过试验机施加力 P ，测量试件标距 l 的伸长 Δl 。以应力 $\sigma = \frac{P}{F}$ 为纵

坐标, 应变 (单位长度的伸长量) $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ 为横坐标, 得应力-应变曲线, 如图1-7所示。

弹性变形与塑性变形

弹性变形 解除外力后能完全消失的变形。

塑性变形 解除外力后不能消失的永久变形[⊖]。

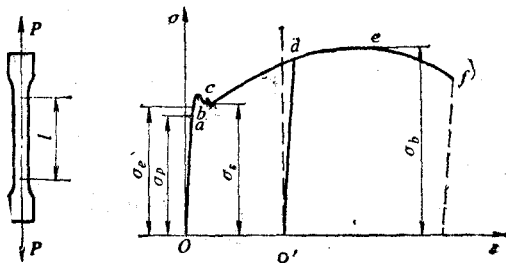


图 1-7

变形的四个阶段

弹性变形阶段 Ob ;

屈服阶段 bc ;

强化阶段 ce ;

局部变形阶段 ef 。

力学性能指标

强度指标 比例限 σ_p ——应力应变成正比的最高应力值。

弹性限 σ_e ——只产生弹性变形的最高应力值。

屈服点 σ_s ——应力变化不大, 应变显著增加时的最低应力值。

⊖ 这里所说的塑性变形, 是指由外力引起的、与时间无关的不可消失的永久变形。

强度限 σ_b ——材料在断裂前所能承受的最高应力值。

弹性指标 弹性模量 $E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \text{ N/m}^2$ (1-4)

塑性指标 延伸率 $\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\%$ (1-5)

截面收缩率 $\psi = \frac{F - F_1}{F} \times 100\%$ (1-6)

式中 l_1 ——拉断后的标距长度；

F_1 ——拉断后颈缩处的横截面面积。

冷作硬化是材料经过预拉至强化阶段，呈现比例限提高，塑性降低的现象。如图1-7中曲线 $o'def$ 所示。

轴向拉（压）时的强度条件 构件的最大工作应力不得超过材料的许用应力

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma] \quad (1-7)$$

许用应力是材料容许承受的最大工作应力值

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n} = \frac{\text{破坏应力}}{\text{安全系数}} \quad (1-8)$$

强度计算的三类问题：

1. 强度校核

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma]$$

2. 截面设计

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]}$$

3. 许可载荷计算

$$N \leq [\sigma]F \quad \text{由 } N \text{ 计算 } [P]$$

六、轴向拉伸（压缩）时

的变形与位移

变形的定义 受力物体形状改变时，两点间距离或两线段间夹角的改变（图1-8）

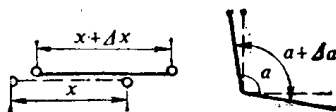


图 1-8

线变形 Δx ; 角变形 $\Delta\alpha$ 。

轴向拉(压)时的变形 杆件在轴向拉(压)时产生均匀的线变形, 而没有角变形(图1-9)。

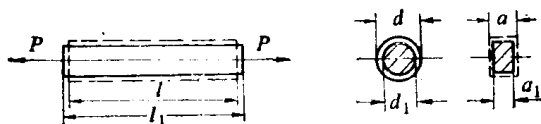


图 1-9

$$\text{纵向变形} \quad \Delta l = l_1 - l \quad (1-9a)$$

$$\text{纵向应变} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (1-9b)$$

$$\text{虎克定律} \quad \Delta l = \frac{Nl}{EF} \quad \text{或} \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (1-10)$$

虎克定律的适用条件:

1. 应力不超过材料的比例限, 即材料处于弹性范围。
2. 在计算 Δl 的长度 l 内, N 、 E 、 F 均应为常数。

$$\text{横向变形} \quad \Delta d = d_1 - d \quad (\text{或} \quad \Delta a = a_1 - a) \quad (1-11a)$$

$$\text{横向应变} \quad \varepsilon' = \frac{\Delta d}{d} \quad (\text{或} \quad \varepsilon' = \frac{\Delta a}{a}) \quad (1-11b)$$

$$\text{泊松比} \quad \mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \quad (1-12)$$

泊松比的适用条件: 应力不超过材料的比例限(各向同性材料泊松比的范围为 $0 < \mu < 1/2$)。

位移的定义 受力物体形状改变时, 一点位置改变的直线距离, 或一线段方向改变的角度(图1-10)。

线位移 u ; 角位移 θ 。

位移的计算

1. 选取参考坐标系;

2. 计算杆件的变形量;

3. 根据变形的相容性(变形相容条件)作位移图(或结构的变形图), 由位移图的几何关系计算位移值。

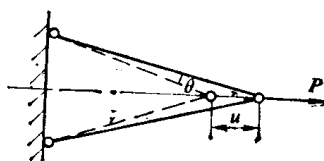


图 1-10

七、轴向拉伸(压缩)时的静不定问题

静不定问题 未知数多于静力平衡方程数, 即仅根据静力平衡条件无法求解全部未知数的问题。

静不定问题的解题步骤

1. 静力平衡条件 由静力平衡条件列出平衡方程。

2. 变形相容条件 根据结构或杆件变形后仍应保持连续的变形相容条件, 作出位移图(或变形图), 由位移图的几何关系列出变形间的关系方程。

3. 物理关系 由虎克定律, 列出力-变形间的关系方程。

将物理关系代入变形相容条件, 得补充方程。补充方程和静力平衡方程, 两者方程数之和正好等于未知数的数目。然后, 联立平衡方程和补充方程, 求解全部未知数。解出全部未知反力(或未知内力)后, 其应力、强度或变形计算的方法与静定问题相同。

应当注意, 静力平衡条件、变形相容条件和物理关系这三方面的考虑, 实质上包含了固体力学中各种问题所需要考虑的全部原理的基础。

静不定问题的特性

1. 杆件的应力与其刚度有关 因此, 在静不定系统中, 往往某些构件的强度不能充分利用。

2. 静不定系统可能产生初应力 由于制造不正确, 在装配时引起的装配应力; 或由于温度场的改变, 而产生的温差应力, 都是系统尚未承受载荷时就存在的初应力。

习题解析

1.1-1 试判别图1.1-1所示各杆是否是轴向拉伸(压缩)。

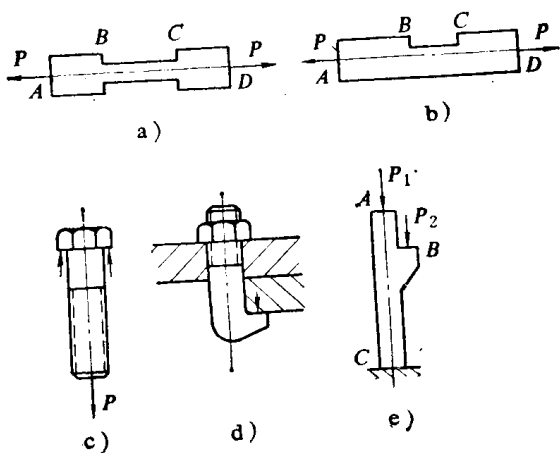


图 1.1-1

- 答 a) 是轴向拉伸;
 b) AB、CD段是轴向拉伸, BC段是轴向拉伸和弯曲的组合;
 c) 是轴向拉伸;
 d) 不是, 是轴向拉伸和弯曲的组合;
 e) AB段是轴向压缩, BC段是轴向压缩和弯曲的组合。

1.1-2 图1.1-2所示各结构中，试判别带编号的构件是否是轴向拉伸（压缩）。

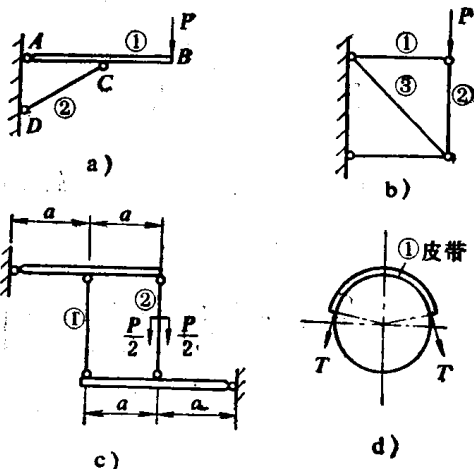


图 1.1-2

- 答 a) 杆①不是，杆②是轴向压缩；
 b) 杆①、②、③都是轴向拉伸（或压缩）；
 c) 杆①、②都是轴向拉伸（或压缩）；
 d) 若皮带厚度很小，可认为是轴向拉伸。

1.2-1 试求图 1.2-1 中图（1）所示各杆在截面 1-1、2-2、3-3 上的轴力，并作轴力图。

a) 解 一、求支座反力

由杆（图 2）的平衡条件

$$\sum X = 0 \quad 40 + 30 - 20 - R_A = 0$$

$$\therefore R_A = 40 + 30 - 20 = 50 \text{ kN}$$

二、求各截面轴力 应用截面法

截面 1-1 由左段（图 3）的平衡条件

$$\sum X = 0 \quad N_1 = 50 \text{ kN (拉)}$$

截面2-2 由左段(图4)的平衡条件

$$\sum X = 0 \quad N_2 = 50 - 40 = 10 \text{ kN (拉)}$$

截面3-3 由右段(图5)的平衡条件

$$\sum X = 0 \quad N_3 = 20 \text{ kN (压)}$$

三、作轴力图

显然, 在AB、BC及CD各段内, 各横截面上的轴力分别等于 N_1 、 N_2 及 N_3 , 故可作杆(图1.2-1a)的轴力图, 如图中(6)所示。

注意, 在求杆件的轴力时, 一般应先计算杆件的未知外力(包括支座反力)。在本题中, 若始终取截面的右段来考虑, 则可不求A端支座反力。

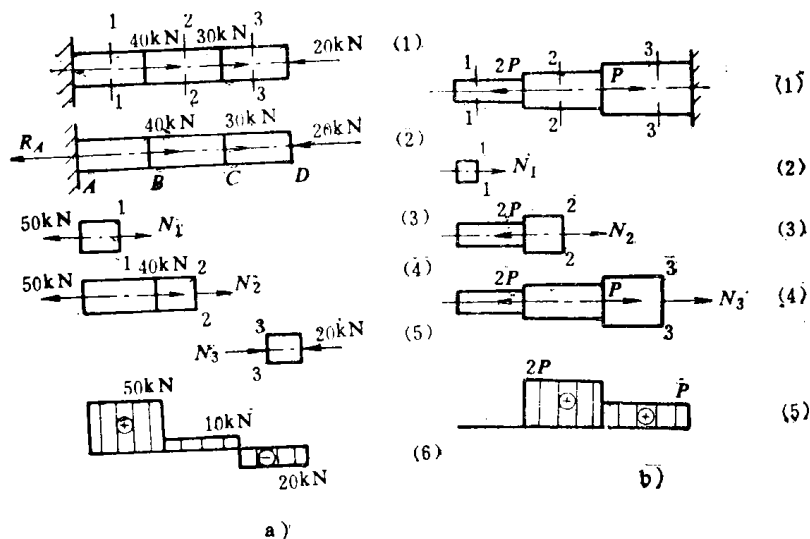


图 1.2-1

b) 解 一、求各截面轴力

截面1-1 由左段(图2)的平衡条件

$$\sum X = 0$$

$$N_1 = 0$$

截面2-2 由左段(图3)的平衡条件

$$\sum X = 0$$

$$N_2 = 2P \text{ (拉)}$$

截面3-3 由左段(图4)的平衡条件

$$\sum X = 0$$

$$N_3 = 2P - P = P \text{ (拉)}$$

二、作轴力图

由所得各截面的轴力, 可作杆(图1.2-1b)的轴力图。如图中(5)所示。

1.2-2 图1.2-2所示各杆, 长度为 L , 横截面面积为 F , 材料的单位体积重量为 γ , 试求各杆轴力沿杆件轴线的变化规律, 并作轴力图。

a) 考虑杆的自重对轴力的影响。

b) 杆在光滑水平面上, 以等角速度 ω 绕铅垂轴旋转(杆重量对内力的影响不计)。

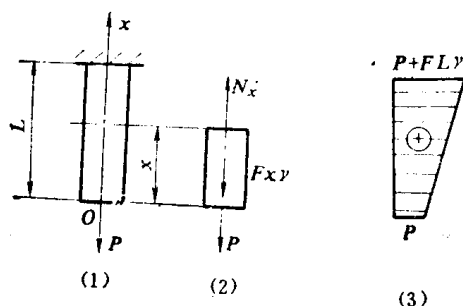


图 1.2-2a)

a) 解 一、杆各横截面上轴力的变化规律

以杆的自由端为坐标原点, 求距原点 O 为 x 处任意截面上的轴力 N_x 。由截面法, 考虑下段(图2)的平衡条件

$$\sum X = 0$$

$$N_x = P + Fx\gamma$$

∴ 轴力沿 x 轴成线性变化。

二、作轴力图

由上列轴力方程，可得

$$x=0 \quad N=P \text{ (拉)}$$

$$x=L \quad N=P+FL\gamma \text{ (拉)}$$

在 $x=0$ 到 $x=L$ 之间的各横截面上，轴力成线性变化，故可作轴力图如图 (3) 所示。

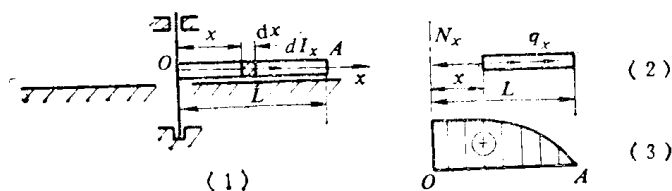


图 1.2-2b)

b) 解 一、计算外力 (惯性力)

取坐标原点 O (图 1)，在距原点 O 为 x 处取一微段 dx ，该微段的惯性力为

$$dI_x = dm a_n = \frac{F dx \gamma}{g} (x \omega^2)$$

故杆的单位长度惯性力 (惯性力集度) 为

$$q_x = \frac{dI_x}{dx} = \frac{F \gamma}{g} \omega^2 x \quad (1)$$

二、求任意横截面上的轴力

应用截面法，由右段 (图 2) 的平衡条件

$$\sum X = 0 \quad N_x = \int_x^L q_x dx = \frac{F \gamma}{g} \omega^2 \int_x^L x dx$$

$$= \frac{F\gamma}{2g} \omega^2 (L^2 - x^2) \quad (2)$$

∴ 轴力沿 x 轴成抛物线变化。

三、作轴力图

由轴力方程 (式 2) 可得

$$x = 0 \quad N = \frac{F\gamma}{2g} \omega^2 L^2 \text{ (拉)}$$

$$x = L \quad N = 0$$

在 $x = 0$ 到 $x = L$ 之间的各横截面上, 轴力成抛物线变化如图 3 所示。

1.2-3 试求图 1.2-3 所示结构中, 杆件 BD 及 CE 的轴力, 并作轴力图。

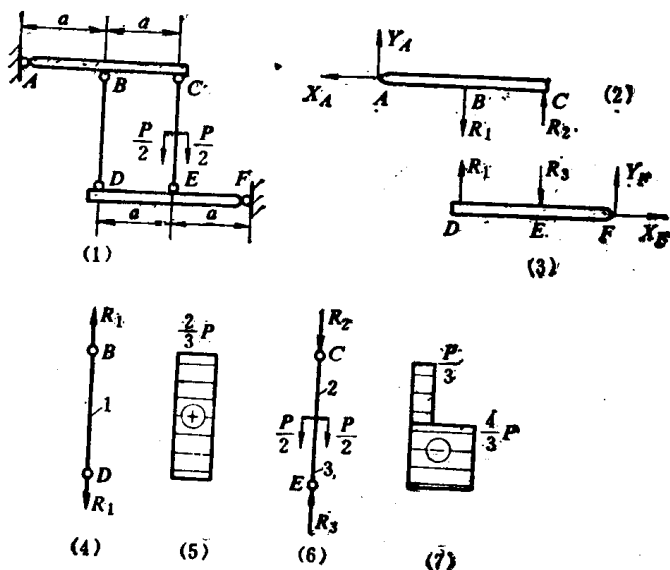


图 1.2-3a)