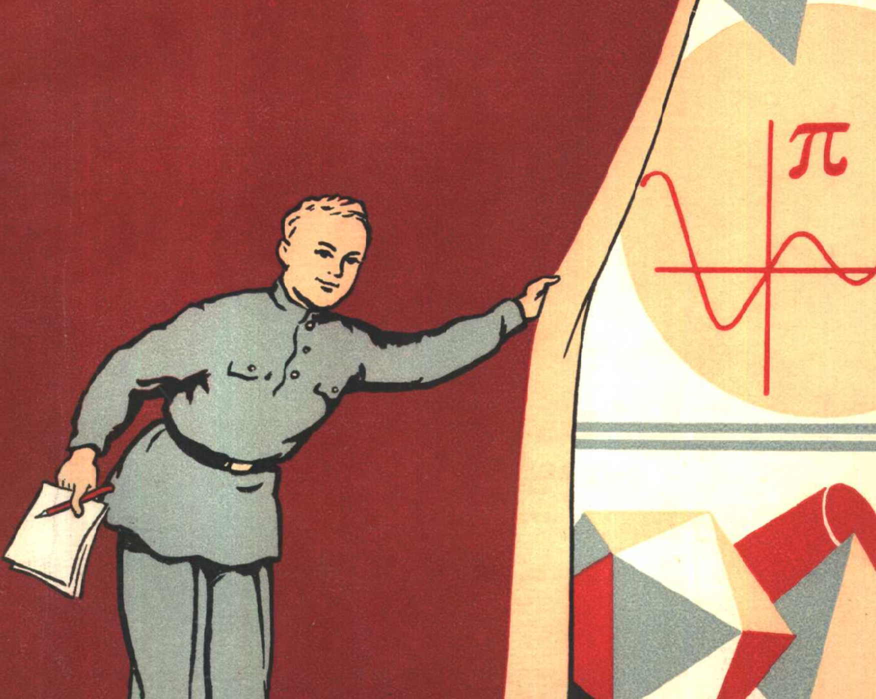
数学

课外补充读物

（供九年级学生阅读）

柯洛索夫著　陈　銓译

上海教育出版社



数学课外补充读物

（供九年級学生阅读）

柯洛索夫著
陈　銓譯

上海教育出版社

一九六三年·上海

А. А. КОЛОСОВ

КНИГА ДЛЯ ВНЕКЛАССНОГО ЧТЕНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ УЧАЩИХСЯ IX КЛАССА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА—1960

（本书根据俄罗斯苏維埃联邦社會主义共和国教育部教育出版社 1960 年版譯出）

数学课外补充读物

（供九年級学生閱读）

（苏）柯洛索夫 著
陈 銓 譯

*

上海教育出版社出版
（上海永福路123号）
上海市书刊出版业营业許可証出 090 号
中華书局上海印刷厂印刷
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

*

开本：787×1092 1/32　印張：7 3/8　字数：169,000
1963年7月第1版　1963年7月第1次印刷
印数：1—20,000本

統一书号：7150・1421
定　价：（八）0.62元

譯者的話

数学是中学里一門重要的基础課程，是一門工具課．学好数学不論对于进一步学习科学技术或者从事劳动都是不可缺少的条件．怎样才能学好数学呢？当然，首先而且最重要的是上課时用心听讲，課后认眞复习，多想多练．但是要学好这样一門重要的課程，也必須閱讀一些課外书，它可以扩大我們的知識領域，帮助我們更牢固更深刻地掌握課內所学的知識，提高解題能力，增加学习数学的兴趣．这本书就是适合我国高中同学閱讀的数学課外讀物．

这本书有很丰富的內容，它生动地告訴我們許多数学分支是怎样发生、怎样发展起来的，数学家們在創建这些数学分支的时候，經历过怎样艰巨的道路，也告訴我們数学在科学技术和生产实际中有着怎样广泛的应用．书中有引人入胜的数学故事，也有令人深思的数学习題．

本书共分八章，大部分內容都沒有超出高中数学知識的范圍，只是第四章算图和第六章罗巴切夫斯基几何学，可能对我国高中同学陌生些，不过閱讀这两章所需的預备知識，也只限于高中数学課本中的內容．

虽然这是一本課外讀物，希望讀者也要认认眞眞地閱讀，书中有些証明和演算的过程，往往不是一看就使人明白的，这时最好不要馬上跳过去，讀者如果动动脑筋，拿出笔来算算画画，可能就会弄清楚的．这样，你学习数学的兴趣就会增加，独立思考能力也将提高得更快．

书中有不少数学历史知識，可惜关于我国古代数学的偉大成就介紹得太少了．对于这方面問題，譯者尽自己所知道的写了一些补充介紹，作为附注列于頁末．

每章最后所介紹的参考书，如有中譯本的都注明中譯本的譯者和出版社，以便讀者参閱；沒有中譯本的未列出．

本书的許多材料也可以供中学数学教师教学时参考，或者作为数学課外活动（如数学小組、数学墙报、数学晚会）的內容．

由于譯者水平所限，譯本中的錯誤和缺点是难免的，希望讀者多多指正．

譯　者

作者的話

如果讀者打开这本书的时候問自己，我讀过很多数学书籍嗎？也許有人会說，除了教科书，什么数学书籍都沒有讀过．另外一些人可能回答說，我讀过几本数学书籍，可是同文艺、历史或者技术书籍比起来，就显得太少了．这是什么原因呢？

也許数学是枯燥无味、沒有实际用处的科学吧？不，熟悉数学的人都认为这是一門引人入胜、很有用处的科学．下面是一些著名的人对数学的看法：

“我深深地尊重数学，因为了解数学的人认为它是理解一切事物的手段”（布哈斯卡拉，十二世紀的印度数学家）．

“数学是研究自然最好的甚至是唯一的入門”（毕薩列夫，俄罗斯作家和評論家）．

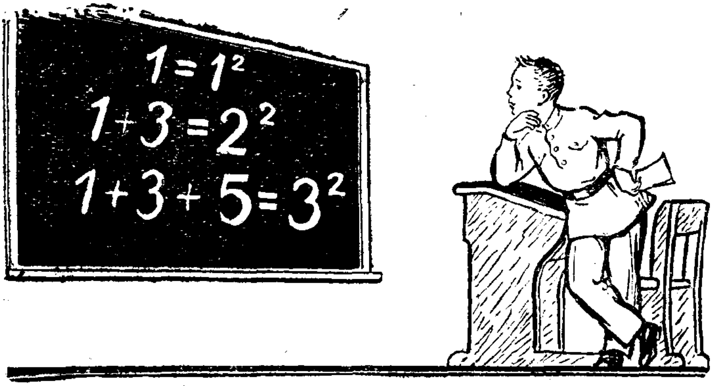
“許多从来沒有好好学过数学的人，认为它是一門枯燥的科学．实际上，数学是最需要想象的科学．本世紀的一位数学家說得很对，他說，不是心灵中的詩人，就不可能成为数学家”（柯凡列夫斯卡婭）．

“数学里面有象詩画那样美丽的境界”（茹可夫斯基）．

讀数学书籍必須认认眞眞，必要时动动笔，这样才有可能进入美妙的数学世界．在这条道路上你克服的困难越多，以后你的收获也就越大．

这本“数学課外补充讀物”是閱讀严謹的初等数学书籍的入門书．讀者如果要继續学习你們感兴趣的問題，可以参閱每章最后参考书目中所列的书籍．

目　　录



第一章　数学归納法

"……理解和善于正确运用数学归納法，是檢驗邏輯成熟程度的一个很好的方法，而邏輯上的成熟对数学家来說是完全必要的."

阿·恩·柯尔穆果洛夫

归納法，大胆的物理学家，大胆但更謹愼的数学家

研究任何知識領域（不管数学或者物理或者医学，天文学或者經济学）的現象时，建立这些現象的各个因素之間联系的确定的規律性，永远是一个基本阶段．被发現的規律常常用公式表示出来，人們研究了这些公式，就立刻可以知道别人經过长期而頑强的劳动所获得的成果．

但是要把自己培养成为一个研究工作者，仅仅知道有限的一点研究結果是不够的，还必須熟悉整个研究的过程，掌握获得成果所用的方法．列夫·托尔斯泰說过："知道地球是圓的并不

重要，重要的是人們怎样得到这个結果的.”寻求正确的方法，是研究任何現象的第一步. 方法的好坏往往可以决定研究成果的大小. 熟悉各种研究方法，掌握其中重要的几种，是每个学生的任务.

不同的科学有不同的研究方法，就是在同一門科学領域里(比方說数学)，也存在不同的方法. 現在就同讀者談談其中某些方法.

首先，让我們回忆一下物理学里常用的一个方法. 比方說，你想获得电流通过导綫时导綫电阻的定律，这时你要发現所研究現象的各个因素：电流强度、导綫长度和导綫横截面积之間的联系，就必須拿电源、安培計和不同长度以及不同横截面积的导綫做各种实驗. 把銅导綫連接在电源的电路中，电路中間安上安培計，再把电路接通(图1). 安培計指針轉动的角度，告訴我們电路中电流的大小. 然后把銅导綫增长到2倍、4倍……，观察安培計中指針的变化，你会看到电流强度也降低为原来的$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$……，所以导綫的长度增加几倍，导綫的电阻也就跟着增加同样的倍数. 于是得出結論：**导綫的电阻跟它的长度成正比.**

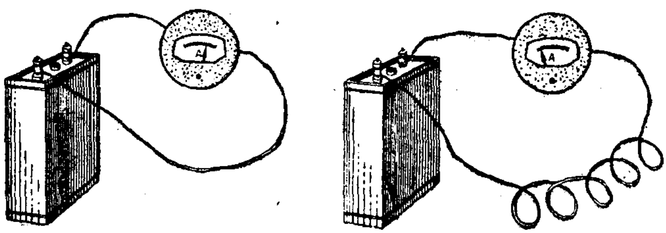


图 1

其次，你再把长度一定、横截面积是1[毫米]^{2}的銅导綫接

在电路中，記下安培計指示的电流强度．然后把长度相同、但是横截面积分别是原来的 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$…… 的銅导綫接在电路中，就会发現电流强度也分别降为原来的 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$……，所以电阻分别增加为原来的 2 倍、4 倍……．于是得出結論：**导綫的电阻跟它的横截面积成反比**．

最后，如果还想知道导綫的电阻跟导綫的材料有沒有关系，你可以拿几根长度、横截面积都相同的导綫，不过材料不同，有銅的、鉄的、鎳的，依次做上面的实驗．記下每次实驗时安培計上所指示的电流强度，你可以得出結論：鉄的电阻比銅的大，鎳的电阻比鉄的大．所以导体的电阻同导体的材料有关．如果引入电阻率的概念，就可以得到下面的定律：**导体的电阻跟它的长度成正比，跟它的横截面积成反比**①．

把上面的定律写成数学公式就是：

$$R=k\frac{l}{S},$$

式中 l 是导体的长度(单位：米)，S 是它的横截面积(单位：[毫米]^2)，R 是电阻(单位：欧姆)．比例系数 k 是电阻率，它随导綫材料的不同而不同．

这就是物理学里常用的一个研究方法②，这个方法的实质是什么呢？

研究者最初做了足够数量的实驗，发現所研究現象的各个因素之間联系的規律，然后查明这些規律对于所討論的情况都是正确的，最后把这些規律推广到还沒有經过实驗檢驗的情况．

① 当导体的材料一定的时候．——譯者．

② 不要以为这是物理学里的唯一的方法，其实还有其他的方法，比方說，在更一般的原始原理的基础上进行邏輯証明，也可以得到物理学里的定律．

这种由对特殊事物的判断过渡到对一般事物的判断的可靠程度，也就是得到的規律正确性的可靠程度，同实驗的次数有密切关系．这种推理通常是完全可信的．

我們用这样的方法最初是发現所研究現象各因素之間的确定的联系，这种联系只有对許多特殊情况是正确的，然后把它推广到所有一般的情况，从而建立起揭露这些現象本质的普遍規律．

这样一种由对特殊事物的判断过渡到对一般事物的判断的推理方法，在邏輯学上叫做**归納法**．剛才我們解导綫电阻問題所用的方法，最好叫做“經驗归納法”，因为最后的結論是对某些实驗作观察以后得出的，这就是“經驗”两字的来由．这个方法有时也叫做“不完全归納法”，为什么用“不完全”这个詞儿，我們以后再解釋．

不完全归納法不仅仅在物理学和一般自然科学中广泛地应用，就是在数学領域里也是如此．特别是关于数的許多性质，最初是通过观察和不完全归納法发現的，这些性质的发現远远在严格証明它的正确性之前．不过在数学里，不完全归納法通常不是研究的最后阶段．物理学家通过一系列的观察和不完全归納法，可能断定，这样得到的規律性不需要作进一步的研究就可以作为現象的普遍法則．但是数学家就不能这样冒險了．数学上的发現要經过补充的、更周密的研究，然后才能确定归納法所得到的結論或者成为法則，或者因为錯誤而被推翻①．这里抄录欧拉的一段話对我們是有帮助的：“……我們应該非常謹愼，不要把那些通过观察或者只用归納法发現的数的性质当作眞实

① 就是在物理学里，仅仅应用归納法有时也会犯錯誤．在古代，“自然害怕眞空”曾經作为一个規律．这規律长期被人认为是确定不变的，一直到1640年才被托里拆利推翻．

的結論．实际上，必須对这些发现的性质作更周密的研究，要么証明它成立，要么推翻它，不管哪种情况，我們都可以学到一点有益的东西．”

如果我們分析几个例子，使大家看到不完全归納法会得到錯誤的結論，那末讀者一定更会觉得欧拉的話讲得正确了．

吃一塹，长一智

法国数学家比尔・費尔馬（1601—1665年）研究过形如：

$$f(n)=2^{2^n}+1$$

的数，当 $n=0$、1、2、3、4 的时候，$f(n)$ 是质数．事实上，

$$f(0)=2^{2^0}+1=3,\ f(1)=2^{2^1}+1=5,\ f(2)=2^{2^2}+1=17,$$

$$f(3)=2^{2^3}+1=257,\ f(4)=2^{2^4}+1=65,537.$$

費尔馬猜想，一切这样形式的数都是质数，他相信这个猜想是正确无疑的，竟建議一些英国数学家去証明这个猜想．但是过了不久，欧拉証明了下面的数：

比尔・費尔馬

列昂納尔德・欧拉

$$f(5)=2^{2^5}+1$$

是合数，因为

$$2^{2^5}+1=4,294,967,297=641\cdot 6,700,417.$$

我們再来看一个例子：

欧拉在寻求自变量是整数、函数值全是质数的式子时，試驗了三項式

$$\varphi(n)=n^2+n+41.$$

当 n 等于从 1 到 39 的任意整数的时候，这三項式的值的确都是质数：

$$\varphi(1)=43,\ \varphi(2)=47,\ \varphi(3)=53,\ \cdots\cdots$$

如果根据不完全归納法，似乎可以断定这个式子对于任意整数 n 都得到质数．物理学里往往通过少数的实驗，就敢于从对特殊情况正确的判断推出它对所有一般情况也正确．但是，这里如果这样做的話就会犯錯誤，因为当 $n=40$ 的时候，$\varphi(n)=n^2+n+41$ 就是合数了：

$$\varphi(40)=40^2+40+41=1681=41^2.$$

下面是一个更令人信服的例子．

已知如下形式的数：

$$F(n)=991n^2+1,$$

式中 n 是自然数．我們用从 1 开始的自然数代入公式里的 n，可以发現所得到的数不是某一个数的完全平方数，甚至你化一生的时間去一个一个地代进去，也不会发現它是完全平方数．但是数学并不允許因此就断定这个判断是正确的．經过严格的証明，这个判断被推翻了，因为当

$$n=12,055,735,790,331,359,447,442,538,767$$

的时候，

$$F(n)=991n^2+1$$

是一个完全平方数.

最后,我們看一个几何問題.

有 n 个平面都經过同一点，但是其中任何三个平面都不經过一条直綫(也就是說,任何三个平面沒有共同的交綫),这 n 个平面把空間分成几部分?

一个平面把空間分成两部分，經过一点的两个平面把空間分成四部分;經过一点但不經过一条直綫的三个平面,把空間分成八部分(图 2). 显然可以断言,滿足上述条件的 n 个平面 ($n=1$、2、3)把空間分成 2^n 部分. 如果你用不完全归納法得出結論說:当 n 是任意正整数的时候,空間被 n 个平面(滿足上述条件的)所分成的部分数是 2^n,那就不正确了. 以后我們还要回头解这个題目,那时你会知道空間被分成的部分数用式子表示就是:

$$\Phi(n)=n(n-1)+2,$$

式中 n 是任意正整数.

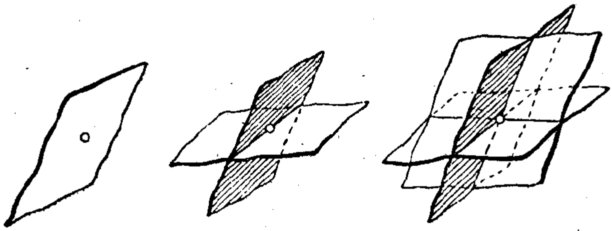


图 2

为什么上面四个例子里所做的結論都是不正确的呢? 唯一的原因是,这些关于任意 n 的一般判断,仅仅根据只对某些 n 值成立的判断得出的.

所以欧拉說得对:簡单的归納法会得出錯誤的結論.

先假設，后証明

欧拉說过，不完全归納法所发現的数学命題，要經过"更周密"的研究，最后証实它或者推翻它. 这里說的"更周密"的研究到底是指什么呢？我們先分析一个題目，再回答这个問題.

下面是奇数数列：

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \cdots\cdots \tag{1}$$

这数列前 n 項的和等于多少呢？

我們先写出前一項、前二項、前三項……的和：

$$S_1=1;$$
$$S_2=1+3=4;$$
$$S_3=1+3+5=9;$$
$$S_4=1+3+5+7=16;$$
$$S_5=1+3+5+7+9=25.$$

式中 S 表示和，它的下标等于对应于(1)的各項的被加数个数. 大家注意一下这些和的共同特点，不难发現每个和都等于它下标的平方：

$$S_1=1=1^2,$$
$$S_2=4=2^2,$$
$$S_3=9=3^2,$$
$$S_4=16=4^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

因此我們可以假設：

$$S_n=1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2, \tag{2}$$

也就是說，自然数列的前 n 个奇数的和等于 n^2.

这个假設是不是对于任意正整数 n 都正确呢？当然公式(2)对 $n=1、2、3、4、5$ 的特殊情況是成立的，这是因为这个公式是

由对这几个数成立而推导出来的．当 $n=6$，它也正确嗎？算算看：

$$1+3+5+7+9+11=36=6^2,$$

所以公式(2)对 $n=6$ 是正确的．我們还可以驗証对于 $n=7$，$n=8$，公式(2)也是正确的．这样一来，就更加使人相信这个公式在一般情况下也成立了．

根据不完全归納法可以相信，我們得到一个法則：自然数列前 n 个奇数的和等于 n^2．但是应当謹慎，欧拉說过："……我們已經看到，簡单的归納法会得出錯誤的結論．"我們也应該回忆一下前节的四个例子的教訓．这里把假設当作法則，同动物学家发現澳洲之前，曾断定地球上的天鵝都是白的有什么不同呢？

最好寻求另一个方法来証明上面提出的論断．

假定公式(2)对于 $n=k$ (k 是任意的自然数)正确，也就是說：

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)=k^2. \tag{3}$$

我們証明这个公式对于 k 的后继数 $n=k+1$ 也正确，也就是要証明

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2. \tag{4}$$

为此，把等式(4)的左边改写成：

$$[1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)]+(2k+1),$$

根据等式(3)，方括号里的和等于 k^2，所以

$$k^2+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2,$$

于是等式(4)的左边等于 $(k+1)^2$.

这样，我們得到一个很重要的結論：如果我們的假設对于某一个自然数 n 是正确的，那末它对于后继数 $n+1$ 也一定正确．

但是我們已經知道，这个假設对于 $n=1$、2、3、4、5、6 是正确的，既然它对于 6 正确，那末根据剛才得到的結論，它应該对