高等职业技术电子信息类专业教材

应用数学与计算

王信峰 等编著

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
URL: http://www.phei.com.cn

高等职业技术电子信息类专业教材

应用数学与计算

王信峰　等编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry

内容提要

本教材主要包括微积分、数值计算、级数与逼近、常微分方程、矩阵与应用、统计与随机模拟基础。其特点是：从实例引入问题，以问题为引线，进行数学的应用、概念及其实际意义、数学的思想方法及其实际用途等方面的介绍；用大量的实例反映数学的应用，并逐步引入数学建模；强调基本数值计算的一般方法，以图形直观地解释概念；采用模块化设计，以利于内容的选择适合不同专业选用；数值计算方法穿插于各相应内容之中。

本教材是为高等职业教育专科学生编写的，可作为大专院校的改革教材，也可作为对数学及其应用感兴趣的读者的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学与计算/王信峰等编著．－北京：电子工业出版社，1998.9

高等职业技术电子信息类专业教材

ISBN 7－5053－4728－4

Ⅰ．应… Ⅱ．王… Ⅲ．①应用数学－高等学校：技术学校－教材 ② 计算方法－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ．029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 20794 号

从 书 名：高等职业技术电子信息类专业教材

书　　名：应用数学与计算

编 著 者：王信峰　等

责任编辑：连潮东　张孟玮

印 刷 者：北京牛山世兴印刷厂

装 订 厂：三河市路通装订厂

出版发行：电子工业出版社　URL:http//www.phei.com.cn

北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036　发行部电话 68[illegible]77

经　　销：各地新华书店

开　　本：787×1092 1/16　印张：20　字数：512 千字

版　　次：1998 年 9 月第 1 版　1999 年 9 月第 3 次印刷

书　　号：ISBN 7-5053-4728-4

G・377

定　　价：28.00 元

出版说明

高等职业技术教育是现代教育的重要组成部分。近几年随着社会经济和科学技术的发展，已从客观上提出了发展高等职业技术教育的要求。高等职业技术教育在经历了认识定位和模式创新的阶段之后，开始进入课程建构和教材编写的新阶段。

在教育部职教司教材处的直接领导和电子工业出版社的积极组织下，三所积极发展高等职业技术教育的学校——北京联合大学、上海第二工业大学和深圳职业技术学院组建了教材编写领导小组。

三校教材编写领导小组经过多次研讨，认为目前没有能满足高等职业技术教育需要的现行教材，编写符合高等职业技术教育特点的教材已迫在眉睫。三校对电子信息类专业人才培养目标、职业定位以及电子信息类的内涵等问题达成共识，并将电子信息类教材作为首批开发的选题。

我们组织编写这套教材的原则是：充分探索高等职业教学特点，力图构筑以掌握基本概念、强化实际应用为重点，以获得职业技术所需的最基本、最适用的理论知识，以利于培养学生专业实践的适应能力和应变能力的新课程体系。

编写高等职业技术教育的教材是一个新课题，经验尚不足，希望全国电子信息类高职院校的师生积极提出批评建议，共同探索我国高等职业技术教育的特点和路子，不断提高教材的质量，最终形成电子信息类专业配套的高质量的教材。

三校教材编写领导小组

1998年4月

三校教材编写领导小组

组长：牛梦成

组员：高　林　姚家伦　沈耀泉　吴金生

　　　贡文清　朱懿心　戴士弘

前　　言

数学一直被认为“没有用”,但又从小学到大学却一直开设的一门必修课程,如何改变数学在人们心目中的这种地位是数学教学改革的重点内容之一。本书若能为此给人们一点启示,将使我们编者感到欣慰。

本书强调从实例引入问题,以问题为引线,进行数学的应用、概念及其实际意义、定理及其实际内涵、数学的思想方法及其实际用途等方面的介绍,用大量的实例反映数学的应用,并逐步引入数学建模的思想;强调基本数值计算方法,以图形直观地讲解概念、并尽量以数学定理思想方法的直观解释代替数学证明;以适量的基本计算例题与练习题为依托,培养学生的基本演算能力;纳入了一些实用的计算思想及其实现过程,如分割枚举、计算机模拟、最优化等。在内容编排上尽可能相互独立,以便使用时可以筛选。

本书内容包括函数、曲面与曲线方程、极限与连续、微分学及其应用、积分学及其应用、级数与逼近、矩阵及其应用、常微分方程、傅氏级数与积分变换、统计与随机模拟基础。计算方法的基本内容穿插于各部分内容之中。

本书是在两年高职的数学教学基础上编写的,与之配套的还有《应用数学与计算实训》教材。本书可作为高等职业教育《应用数学与计算》课程的教材,也可作为大专相应课程的教材,我们建议在使用本书时,最好能与《应用数学与计算实训》配套使用。

本书第 1 章至第 3 章由张翼、杨明燕编写,第 4 章由王信峰编写,第 5 章由魏荣编写,第 6 章由戈西元编写,第 7 章由高进编写,第 8 章由车燕编写,第 9 章由钱瑛编写,第 10 章由王信峰编写。

本书由北京联合大学王友仁副教授主审;任开隆教授也仔细审阅了本书,并提出了不少改进意见;朱玉娥副教授也为本书提出了不少改进意见,并为本书的出版作了大量事务性工作,在此,我们向他们表示衷心感谢;同时,我们还特别感谢北京联合大学高林副校长,电子工业出版社在本书编写与出版过程中的积极支持与帮助。

限于编者的水平,不妥之处在所难免,希望广大读者批评指正。

编著者
1998.5.2

目　录

第1章　数学基础知识

“高技术和经济分析在使用中都已定量化。从一个大企业的战略计划，到一个新颖产品的设计，到危险因素的估量，以至可靠产品的施工，定量思维一直是成功之宝。通常，定量思维是指用数学的方法把一个实际问题归纳为数学模型，并写出数学表达式，再去求解这一数学模型。常见的求解过程得借助于计算方法。而这种分析必须要求有效性检查，即通过从实验室与现场得到的数据来调整参数，以检验其正确性。这经常会涉及到交叉学科的问题。

全然定量的和数学上的成功对高技术和经济竞争力会产生具体影响，这样的例子不胜枚举，这一点可从一产品的整个生产周期得以证实，从战略计划到研究、工程设计、制造效率、过程控制、质量提高、营销、贮存、运输、分发和产品维修。还有其它类似的但不属于具体的生产周期的例子，比如天气预报就用到了高等计算方法。物理现象的模拟、优化、调度法、非线性偏微分方程以及统计和数学模型都源于技术基础和具体经济或工程的需求。”

这是美国科学院十几位院士提供素材、美国国家科学出版社1991年出版的一本有关《数学科学、技术和经济竞争力》报告中的一段话。这段话足以说明定量分析解决实际中所遇到的问题已成为定势。而定量分析的过程则是建立实际问题的数学模型、求解数学模型、在实际中检验模型并最终应用于实际。

要用定量化分析解决实际问题，就必然要使用数学，而用好数学的关键在于学好数学，掌握数学的分析方法及其应用。以下从数学基础知识开始逐步介绍数学的理论及其应用。

1.1　集合与数

1.1.1　集合及其运算

1. 集合概念及其表示方法

观察以下几组事物：

(1) 不大于10的正偶数，即2、4、6、8、10；

(2) 所有锐角三角形；

(3) 1路公共汽车线路上的所有站点；

(4) 电视大学的所有学生。

它们分别由数、图形、点和学生组成，每组中包含的对象都具有某些共同的特点。如(1)中包含的数均为正偶数且不大于10；(2)中包含的图形是三角形且内角均为锐角；(3)中包含的点是1路公共汽车的站点；(4)中包含的学生均在电大读书。具有某种共同特性的全体称为集合，集合中的每个对象称为该集合的元素。如(1)中有5个元素，它们是2、4、6、8、10；正三角形都是(2)的元素。如果用符号 A 表示(2)所描述的集合，用符号 a 表示正三角形，则“正三角形是(2)的一个元素”可表示为 $a\in A$，读做“a 属于 A”。

常用的集合描述方法有枚举表示法和内涵表示法。枚举表示法是将集合中的元素一一列出，写在一对大括号{}中。如上述集合(1)可表示为{2,4,6,8,10}、$\varnothing$ 表示空集。注意在这种表示法下，大括号{}的层次将决定元素的形式。内涵表示法是将元素形式与元素满足的条件

用分隔符“|”分开，并写在一个大括号{}中。如$\{x|x$是偶数$\}$表示由所有偶数组成的集合，其中元素的形式为“x”，元素满足的条件为“x是偶数”；$\{\{x\}|x$是偶数$\}$表示由所有以一个偶数为元素的集合组成的集合，其中元素的形式为“$\{x\}$”，元素满足的条件为“x是偶数”；前者的元素是偶数，后者的元素是集合。

需要注意的是：

(1) 对于一个给定的集合，集合中的元素必须是确定的，也就是说，任何一个对象或者是这个给定集合中的元素，或者不是这个给定集合中的元素，二者必居其一，且只能居其一。不满足此要求的集合描述将产生悖论。如：某理发师的服务对象是所有不给自己理发的人，根据这个描述无法确定理发师是否是自己的服务对象，因此其所有服务对象组成的将不是一个确定的集合。

(2) 对于一个给定的集合，集合中的元素必须是互异的，也就是说，一个集合中的任何两个元素都不同。如2与2不能是同一集合的两个元素。

(3) 集合中的元素无先后次序。如由元素2、4、6、8、10组成的集合和由元素4、2、10、6、8组成的集合是同一个集合。

(4) 集合中的元素可以是任何事物，因此一个集合也可以作为另一个集合的元素。如学生按分班组成班集合，学校的所有班组成校集合，校集合中的元素就是校内的班。

(5) 无任何元素的集合称为空集，用$\varnothing$表示。如小于1大于0的整数组成的集合就是空集。

通常，我们用英文大写字母表示集合，用小写字母表示元素。

2. 集合间关系及运算

考察集合$A=\{2,4,6,8\}$，$B=\{2,4\}$，$E=\{x|x$是不大于5的正偶数$\}$，$C=\{2,3,4\}$，$D=\{6,8\}$可以看到：

(1) 集合E与集合B是由相同的元素组成的，我们称集合E与集合B相等，记为$E=B$；

(2) 集合B的元素均为集合A的元素，我们称集合B是集合A的子集，记为$B\subseteq A$(读做B含于A)，或$A\supseteq B$(读做A包含B)；

(3) 集合A和集合C共有的元素组成了集合B，我们称集合B是集合A和集合C的交集，记为$B=A\cap C$(读做B等于A交C)；

(4) 集合B和集合D的所有元素组成了集合A，我们称集合A是集合B和集合D的并集，记为$A=B\cup D$(读做A等于B并D)；

(5) 在集合A中但不在集合B的元素组成了集合D，我们称集合D是集合A与集合B的差集，记为$D=A-B$(读做D等于A减B)。

为了直观形象地表示集合之间的关系，常用圆形区域(或任何封闭曲线围成的区域)表示一个集合，圆内的点表示这个集合的元素，这种图形称为文图。图1-1给出了集合相等、包含、并、交、差关系的文图。

1.1.2 数集

通常我们把由数组成的集合称为数集。由所有自然数组成的集合称为自然数集，用N表示；由所有整数组成的集合称为整数集，用Z表示；由所有有理数组成的集合称为有理数集，用Q表示；由所有实数组成的集合称为实数集，用R表示；由所有复数组成的集合称为复数

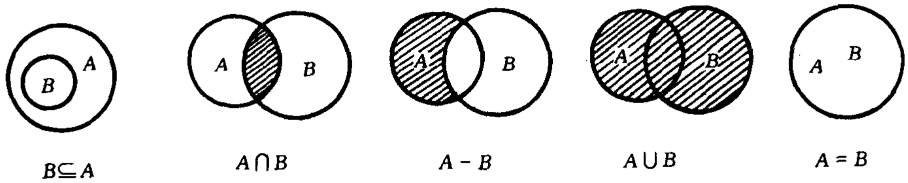


图 1-1

集,用 C 表示。

类型	名称	记号	描述
有限区间	开区间	(a,b)	$\{x\mid a<x<b\}$
有限区间	闭区间	$[a,b]$	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$
有限区间	半开半闭区间	$[a,b)$	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$
有限区间	半开半闭区间	$(a,b]$	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$
无限区间	开区间	$(a,+\infty)$	$\{x\mid x>a\}$
无限区间	开区间	$(-\infty,b)$	$\{x\mid x<b\}$
无限区间	半区间	$[a,+\infty)$	$\{x\mid x\geqslant a\}$
无限区间	半区间	$(-\infty,b)$	$\{x\mid x\leqslant b\}$
无限区间	实数集	R 或$(-\infty,+\infty)$	$\{x\mid x$ 是实数$\}$

区间是实数集的子集,它由介于某两个实数之间的全体实数组成,这两个实数称为区间的端点。区间的类型、名称、记号及描述见上表。我们经常将实数集中的元素与直线上的点一一对应起来,这条直线就是实数轴,与实数 0 对应的点称为原点。以实数为元素的集合的图形由其中元素对应于数轴上的所有点组成。如集合$\{2,4,6,8,10\}$的图形如图 1-2 所示;区间$(2,4)$的图形则是数轴上点 2 到点 4 的线段,不包括线段端点,如图 1-3 所示;区间$[2,4]$的图形则是点 2 到点 4 的线段,包括线段端点,如图 1-4 所示。

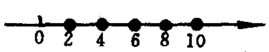


图 1-2

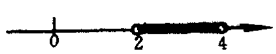


图 1-3

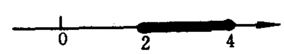


图 1-4

1.1.3 数的误差

现代科学的发展使得运用计算机等计算工具进行数据计算处理已经司空见惯,但由于计算工具自身的限制,计算出的结果数据往往只是真正结果的近似值,而不是结果的精确值,有时甚至与精确数据相差甚远。计算结果与其精确值之间的差别就是误差。

误差产生的原因多种多样。建立实际问题的数学模型时,为便于分析和计算,可忽略一些次要因素,这将造成模型误差;受观测手段(如实验仪器)的限制,观测得到的数据将有一定的观测误差;在计算中对无限位数的小数进行舍入将造成舍入误差;对需无限次运算才能得到精确结果的计算只计算有限次将引起截断误差。误差常用绝对误差和相对误差来衡量。

1. 绝对误差

精确值 x 与计算结果 a 的差 $x-a$ 称为绝对误差，记作 $e(x)$。

例 1.1 用刻有毫米的米尺测量桌子的长度，使用正确的测量方法测得桌子长度为 985 毫米，设 x 是桌子的真正长度，则 985 实际上为 x 的一个近似值，绝对误差为 $e(x)=x-985$。由于测量误差不会超过半个毫米，即 $|e(x)|=|x-985|\leqslant 0.5$，从而 $985-0.5\leqslant x\leqslant 985+0.5$，因此精确值 x 在区间 $[984.5,985.5]$ 中，通常也可记为 $x=985\pm 0.5$。

实际中精确值 x 往往无法得到，因此绝对误差 $e(x)=x-985$ 也无法求得，但可以根据获得实际数据的过程判断绝对误差最大限度，即绝对误差限。如例 1.1 的绝对误差限为 0.5。在实际问题中我们更关心绝对误差限的大小。

2. 相对误差

用绝对误差及其误差限来衡量误差的大小是有局限的。

例 1.2 测量1000米左右的路程长度绝对误差为1米，和测量 2 米左右的物体长度绝对误差为 1 米，这两种情形中尽管绝对误差均为 1 米，前一种情形下测量结果基本上令人满意，但后一种则让人不能容忍，因为后者的误差相对于精确值太大了。

绝对误差 $x-a$ 与精确值 x 之比 $\frac{x-a}{x}$ 称为相对误差，记作 $e_r(x)$。

上例 1.2 中，测量 1000 米左右的路程长度绝对误差为 1 米，则相对误差的绝对值大约在 $1/1000=0.001$；而测量 2 米左右的物体长度绝对误差为 1 米，则相对误差的绝对值大约在 $1/2=0.5$。显然前一种情形下结果的相对误差远远小于后一种情形。

实际应用中，常以 $\frac{x-a}{a}$ 作为相对误差的近似值。

3. 有效数字

设 x 是一个实数，用四舍五入规则舍入后，近似值的绝对误差限为其末位的半个单位。如 $e=2.71828\cdots$，四舍五入取四位小数，近似值为 2.7183，此时有

$$|e-2.7183|=0.000013\cdots<0.5\times 10^{-4}$$

若一个数 x 的近似值为 a 的绝对误差限是其某一位的半个单位，则从这位起直到左边第一个非零数字为止的所有数字都称为近似值 a 的有效数字。

例如，2.718 是 e 的具有四位有效数字的近似值，而 2.7182 也是 e 的具有四位有效数字的近似值，而 2.71829 是 e 的具有六位有效数字的近似值。

用计算机进行数值计算时，受计算机字长的限制，参加运算的数为具有有限位数的近似值，计算结果也只能保留有限位。为保证计算结果的精度，需在计算结果中保留一定位数的有效位，为此往往需要使参与计算的数据的有效位数高于计算结果的有效位数，至于到底取的位数应是多少合适，要根据具体情况确定。

1.2 点与向量

1.2.1 向量的概念

在中学物理中我们曾经学习过位移、力、速度、加速度、电场等，尽管它们的物理意义不同，

但它们都是既有大小又有方向的量。数学中把这一类量统称为向量。

向量往往用一条有方向的线段,即有向线段来表示,如图 1-5 所示,有向线段的方向表示向量的方向,有向线段的长度表示向量的大小。向量通常用黑斜体的小写字母(有时也用一个上面加箭头的小写字母)表示,如 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 或 $\vec{a}$,$\vec{b}$。以 A 为始点,B 为终点的有向线段所表示的向量也记为 $\overrightarrow{AB}$。

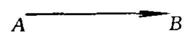


图 1-5

向量的大小也叫向量的长度或模。如向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模记作 $|\overrightarrow{AB}|$,向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记作 $|\boldsymbol{a}|$。模为 1 的向量称为单位向量。模为 0 的向量称为零向量,记作 $\mathbf{0}$;显然,零向量的始点和终点重合,所以它的方向任意。

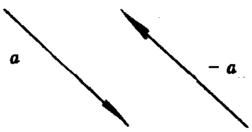


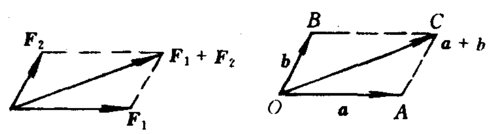
图 1-6

在实际问题中有些向量与其始点有关,有些向量与其始点无关。由于一切向量的共性是它们都有大小和方向,所以在这里我们只研究与始点位置无关的向量,并称这种向量为自由向量(简称向量)。这样规定以后,如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同,我们就说向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 是相等的,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。当向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等且方向相反时称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 互为负向量,记作 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$。如图 1-6 所示。另外两个向量的长度可以比较大小,但是方向就不能比较大小了,所以"大于"和"小于"的概念对于向量无意义,例如 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$ 没有意义,但 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$ 有意义。

1.2.2 向量运算

1. 向量的加法

物理上两个力的合力可以如图 1-7(a)所示按平行四边形规则计算,数学上向量的加法同样按平行四边形规则计算。对两个向量的加法规定:设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$,以 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 为边做一平行四边形 $BOAC$,取对角线 OC 作为一向量记作 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$ 则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的和记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图 1-7(b),通常称此法则为向量加法的平行四边形法则。



(a) (b)

图 1-7

如果两个向量在同一直线上,那么规定它们的和向量是这样一个向量:当两个向量方向相同时,和向量的方向与原来两个向量的方向相同,其模等于两个向量模的和;当两个向量方向相反时,和向量的方向与较长的向量的方向相同,而模等于两个向量的模的差。

由于平行四边形的对边平行且相等,所以从图 1-7 可以看出:作向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,以 $\overrightarrow{OA}$ 的终点为始点作 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,连接 $\overrightarrow{OC}$ 就得到 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$,这一方法叫向量加法的三角形法则。

向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;(2) 结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$。由图 1-8, 图 1-9 很容易得出上述结果。

由向量加法的交换律与结合律,得任意多个向量加法的法则如下:以前一向量的终点作为次一向量的始点,相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 再以第一向量的起点为起点,最后一向量的终点为终点作向量,这个向量即为所求的和向量。(注意:上面的加法运作是由几何做图完成的,也叫作几何加法)

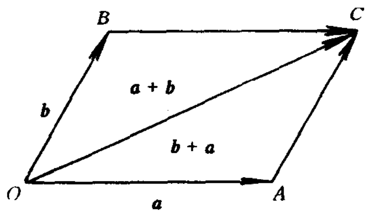


图 1-8

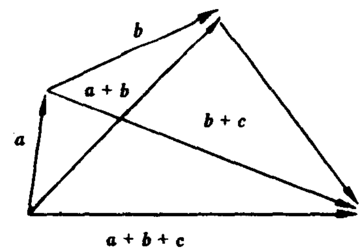


图 1-9

2. 向量的减法

向量的减法是向量加法的逆运算。根据两个向量的加法，规定两个向量的减法为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

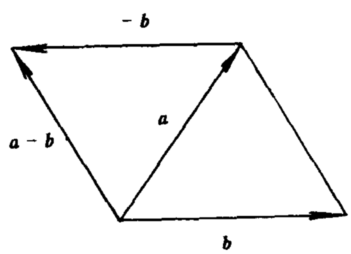


图 1-10

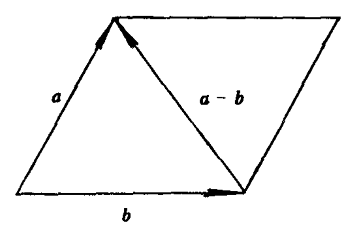


图 1-11

具体画法如图 1-10 所示。由三角形法则可以看出：要从 $\boldsymbol{a}$ 减去 $\boldsymbol{b}$，只要把与 $\boldsymbol{b}$ 长度相同而方向相反的向量加到向量 $\boldsymbol{a}$ 上去，即得 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。

如果将向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 移到共同始点，再从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点向向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点引一向量也可得向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，见图 1-11。

3. 数乘向量

物理学中将力 F 沿其方向扩大两倍，则扩大后的力的大小是原来力的大小的两倍，而方向不变。数学上向量 $\boldsymbol{a}$ 沿其方向扩大 λ 倍，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，称为数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积，其含义是：$\lambda\boldsymbol{a}$ 也是向量；其大小满足 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；且当 $\lambda>0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，当 $\lambda<0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；$\lambda=0$ 时，方向任意。

与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同的单位向量常记为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$。显然，对于非零向量 $\boldsymbol{a}$ 有 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}$，即 $\boldsymbol{a}^{\circ}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$。

数乘向量满足：

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(3) 分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$。

例 1.3 利用向量证明三角形中位线定理。

解 如图 1-12 所示，D、E 分别为三角形 $\triangle ABC$ 的边 AB 与 AC 的中点，可知 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ 即