《数理天地》丛书 ■ 主编 周国镇

希望数学

本册主编 熊 斌

初一

气象出版社

序　言

《希望数学》是《数理天地》杂志主编的“《数理天地》丛书”系列的一个部分，之所以在数学之前加希望二字，是因为这是能给希望学好数学的同学们带来希望的数学书。

这是一套系统地、精练地讲解初、高中数学主要内容的简明教程。从初一到高三，共六个分册。其中，初、高中一、二年级四个分册中的每个分册都分为基础内容和选学内容两部分。

基础内容：不超出现行的数学教学大纲，保证使同学们用尽量少的时间，比较轻松地在比课本高的水平上掌握本年级数学最主要的内容。

选学内容：供学有余力、爱好数学或准备参加“希望杯”数学邀请赛以及其他数学竞赛的学生使用。

初、高中三年级这两个分册专为初、高三同学升学备考之用。

每个分册都由若干个专题组成，每个专题独立成篇，便于同学和老师根据需要选用，不必考虑先后次序。

每个专题包括：基本知识、例题、练习三个部分。

基本知识：以极简练、明白的文字介绍本专题的知识、方法。帮助同学们理清脉络，掌握重点。

例题：少而精，有代表性，有新意。例题的讲解渗透了基本的数学思想，讲思路，讲方法，表达规范、简练。特别有助于提

高同学们的分析能力。

练习：编入了有训练价值的典型题目，不求多、不求全，只求少而精。对不太难的题目给出了最后结果，使读者有一个思维空间；对较难的题目，给出了关键性的提示。

本书由《数理天地》杂志邀请北京、上海、江苏、浙江、湖北、湖南、广东、四川、山西、福建、吉林、云南、宁夏等地著名的数学教研员、优秀的数学教师以及部分大学数学教师合作编写，经《数理天地》杂志专家审定。

当今，中学数学参考书花样繁多，说有数百种也不为过，常令学子们眼花缭乱，无从选择。本书则力求使读者读了就能懂，懂了就能用，以实在和简明易懂的讲述见长。相信读者使用之后自有体会。

周国镇

《数理天地》杂志主编

2002 年 1 月 18 日

目　　录

基础内容

选学内容

基础内容

单元 1　有理数

一、基本知识

(1) 整数和分数统称有理数. 有理数包括正整数、零、负整数、正分数、负分数. 有理数可以用数轴上的点表示出来.

(2) 有理数可以这样定义:能够表示成分数 $\frac{p}{m}$ 形式的数(其中 m、p 均为整数, $m \neq 0$),称为有理数.

(3) 有理数可以作如下两种分类:

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\[2ex]\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\begin{cases}\text{正有限小数}\\\text{正无限循环小数}\end{cases}\\\text{负分数}\begin{cases}\text{负有限小数}\\\text{负无限循环小数}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{cases}\\\text{零}\\\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

(4) 有理数加法的法则:两数相加,同号的取原来的符号,并把绝对值相加;异号的取绝对值较大的加数的符号,并把较大的绝对值减去较小的绝对值.

有理数乘法的法则:两数相乘,同号得正,异号得负,并把绝对值相乘.

减去一个数,等于加上这个数的相反数.

除以一个数,等于乘以这个数的倒数.

(5) 有理数的运算律有:

加法交换律　$a+b=b+a$;

加法结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$;

乘法交换律　$ab=ba$;

乘法结合律　$(ab)c=a(bc)$;

分配律　$a(b+c)=ab+ac$.

(6) 求 n 个相同因数的积的运算是乘方,即

$$\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n\text{个}}=a^n.$$

(7) 有理数具有以下性质:

① 对于任意两个有理数 a、b,在 $a<b$,$a=b$,$a>b$ 三种关系中,有且只有一种成立.

② 如果 $a<b$,那么 $b>a$.

③ 如果 $a<b$,$b<c$,那么 $a<c$.

④ 如果 $a=b$,$b=c$,那么 $a=c$.

⑤ 如果 $a=b$,那么 $b=a$.

⑥ 任意一对有理数,对应的和、差、积、商(除数不为零)仍是有理数.

⑦ 任意两个有理数之间存在着无限多个有理数.

二、例　题

例 1　计算：$\dfrac{2\dfrac{5}{8}-\dfrac{2}{3}\times 2\dfrac{5}{14}}{(3\dfrac{1}{12}+4.375)\div 19\dfrac{8}{9}}$.

解法一：原式$=\dfrac{\dfrac{21}{8}-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{33}{14}}{(\dfrac{37}{12}+\dfrac{35}{8})\div\dfrac{179}{9}}$

$$=\frac{\dfrac{21}{8}-\dfrac{11}{7}}{\dfrac{179}{24}\times\dfrac{9}{179}}$$

$$=(\frac{21}{8}-\frac{11}{7})\times\frac{8}{3}$$

$$=7-4\frac{4}{21}$$

$$=2\frac{17}{21}$$

解法二：原式$=\dfrac{\dfrac{21}{8}-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{33}{14}}{(\dfrac{37}{12}+\dfrac{35}{8})\times\dfrac{9}{179}}$

$$=\frac{\dfrac{21}{8}-\dfrac{11}{7}}{\dfrac{179}{24}\times\dfrac{9}{179}}\times\frac{56}{56}$$

$$=\frac{147-88}{21}$$

$$=2\frac{17}{21}$$

注：两种方法的共同之处是在前两步中，都将乘、除运算中的带分数化成了假分数，及时进行了约分；将 4.375 化成了

分数$\frac{35}{8}$，这两步很关键．两种方法的不同之处是解法一运用了乘法对加法的分配律，解法二则是采用了化简分式的通常方法 —— 分子、分母乘以同一个不为零的数．当然，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{7}{8}$ 的小数形式 0.5，0.25，0.75，0.125，0.375，0.625，0.875 一定要很熟悉，在具体计算时，可以节省时间．

例 2　计算$\frac{19981998}{999} \times \frac{121}{11111111}$.

解：原式$= \frac{1998 \times 10001}{999} \times \frac{11 \times 11}{1111 \times 10001}$

$$= \frac{2 \times 11 \times 11}{1111}$$

$$= \frac{2 \times 11 \times 11}{11 \times 101}$$

$$= \frac{22}{101}$$

例 3　计算$(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{6})\cdots(1+\frac{1}{10})(1-\frac{1}{3})$
$(1-\frac{1}{5})\cdots(1-\frac{1}{9})$.

解：由于$(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3}) = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$

$$(1+\frac{1}{4})(1-\frac{1}{5}) = \frac{5}{4} \times \frac{4}{5} = 1$$

……

$$(1+\frac{1}{8})(1-\frac{1}{9}) = \frac{9}{8} \times \frac{8}{9} = 1$$

所以　原式$= (1+\frac{1}{10}) = 1.1$

例 4 计算$(1999.5-1997.5)\div 1998\times 1999\frac{1997}{1998}\div\frac{1}{1999}$(保留三位小数).

解:原式$=2\div 1998\times 1999\frac{1997}{1998}\times 1999$

$$=\frac{2}{1998}\times(2000-\frac{1}{1998})\times 1999$$

$$=2\times(1+\frac{1}{1998})(2000-\frac{1}{1998})$$

$$=2\times(2000+\frac{2000}{1998}-\frac{1}{1998}-\frac{1}{1998^2})$$

$$=2\times(2001+\frac{1}{1998}-\frac{1}{1998^2})$$

$$=4002+\frac{1}{999}-\frac{1}{1998\times 999}$$

$$\approx 4002.001$$

例 5 把 2.1454545… 化成分数.

分析:此数是从百分位开始以"45"为循环节的小数,进行适当变换,可把循环小数化为有限小数,即可化为分数.

解:设 $x=2.1454545\cdots$ (1)

将(1)式两边同乘以 10,得

$10x=21.454545\cdots$ (2)

将(1)式两边同乘以 1000,得

$1000x=2145.454545\cdots$ (3)

(3)-(2),得 $990x=2124$

所以 $x=\frac{2124}{990}=\frac{118}{55}$

注:从此例的求解过程中,你能否得到一种化无限循环小

数为分数的方法?试将 0.234234234… 化为分数.

例6 计算$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots+\frac{1}{98\times 99}$.

解:原式$=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{98}-\frac{1}{99})$

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}$

$=1-\frac{1}{99}=\frac{98}{99}$

注:猜测$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}$与$\frac{n-1}{n}$($n$表示自然数)有什么关系?本例使用的解法称作裂项相消法,利用这个方法可以起到化繁为简的目的.

例7 计算 $2-2^2-2^3-2^4-2^5-\cdots-2^{98}-2^{99}+2^{100}$.

解:设 $S=2^2+2^3+2^4+2^5+\cdots+2^{98}+2^{99}$ ①

那么 $2S=2^3+2^4+2^5+2^6+\cdots+2^{99}+2^{100}$ ②

② − ① 得:

$$S=2^{100}-2^2$$

即 $2^2+2^3+2^4+2^5+\cdots+2^{98}+2^{99}=2^{100}-2^2$

所以原式$=2-(2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{98}+2^{99})+2^{100}$

$=2-(2^{100}-2^2)+2^{100}$

$=2-2^{100}+2^2+2^{100}$

$=2+4$

$=6$

注:如果一列数,从第二项起每一项与前一项之比都相

等，那么这列数的求和问题，均可用上述“错位相减”法来解决.

例 8 计算$(-1001)^7\times(-0.125)^6\times(-\frac{2}{7})^7\times(-\frac{4}{13})^7\times(-\frac{1}{11})^7$.

解：因为这里共有 34 个负数相乘，所以积为正数，

又 $1001=7\times11\times13$.

所以
$$\begin{aligned}原式&=1001^7\times(\frac{1}{7})^7\times(\frac{1}{13})^7\times(\frac{1}{11})^7\times(\frac{1}{8})^6\times2^7\times4^7\\&=(1001\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{13}\times\frac{1}{11})^7\times(\frac{1}{8}\times2\times4)^6\times2\times4\\&=8\end{aligned}$$

例 9 计算$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots+\frac{10}{2^{10}}$.

分析：直接计算很麻烦，通过观察，把这个式子中的每一项“分拆”成正负两项，然后利用“正负相消”的方法最后计算出结果.

解：因为
$$\frac{1}{2}=2-\frac{3}{2},\frac{2}{4}=\frac{3}{2}-\frac{4}{4},$$
$$\frac{3}{8}=\frac{4}{4}-\frac{5}{8},\frac{4}{16}=\frac{5}{8}-\frac{6}{16},$$
$$\cdots,\frac{10}{2^{10}}=\frac{11}{2^9}-\frac{12}{2^{10}}.$$

所以
$$原式=(2-\frac{3}{2})+(\frac{3}{2}-\frac{4}{4})+(\frac{4}{4}-\frac{5}{8})+\cdots+(\frac{11}{2^9}-\frac{12}{2^{10}})$$

$$= 2 - \frac{12}{2^{10}}$$

$$= \frac{2036}{1024}$$

$$= \frac{509}{256}$$

注:仿照上面的解法,你能不能"比较 $S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}$($n$ 为自然数)与 2 的大小".

例 10　比较 a 和 $\frac{a}{3}$ 的大小.

分析:可能有同学会认为,整体大于部分,所以 $a > \frac{a}{3}$,这是错误的,因为"整体大于部分"在算术数集合中成立,但在有理数集合中就不一定成立.

解:$a - \frac{a}{3} = \frac{2}{3}a$

当 $a > 0$ 时,$\frac{2}{3}a > 0, a > \frac{a}{3}$;

当 $a = 0$ 时,$a = \frac{a}{3}$;

当 $a < 0$ 时,$a < \frac{a}{3}$.

注:这里比较 a 与 $\frac{a}{3}$ 的大小所采用的方法是作差法.

例 11　计算 $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2000})(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{1999}) - (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2000})(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1999})$.

分析:四个括号中均包含一个共同部分:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1999},$$

我们用一个字母表示它以简化计算.

解:设 $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1999}$,则

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=(S+\frac{1}{2000})(1+S)-(1+S+\frac{1}{2000})S\\
&=(S+S^2+\frac{1}{2000}+\frac{S}{2000})-(S+S^2+\frac{S}{2000})\\
&=\frac{1}{2000}
\end{aligned}
$$

例 12 计算

(1) $(0.3)^2\div(-1\frac{1}{2})^2-0.6^2\div0.3+(\frac{3}{2})^2$;

(2) $-3\times[-\frac{5}{3}+(1-0.2\times\frac{3}{5})\div(-2)]$;

(3) $(1\frac{3}{4}-\frac{7}{8}-\frac{7}{12})\div(-\frac{7}{8})$;

(4) $(-\frac{7}{8})\div(1\frac{3}{4}-\frac{7}{8}-\frac{7}{12})$;

(5) $(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6})\times12+\frac{3}{4}\times(-7)+(-15)\times\frac{3}{4}-\frac{3}{4}(-2)$.

解:(1)
$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=0.09\div\frac{9}{4}-0.36\div0.3+\frac{9}{4}\\
&=0.09\times\frac{4}{9}-1.2+2\frac{1}{4}\\
&=0.04-1.2+2.25\\
&=1.09
\end{aligned}
$$

(2) $\text{原式}=-3\times\left(-\frac{5}{3}-\frac{22}{25}\times\frac{1}{2}\right)$

$$=-3\times\left[-\frac{125}{75}-\frac{33}{75}\right]$$
$$=-3\times\left(-\frac{158}{75}\right)$$
$$=6\frac{8}{25}$$

(3) 原式$=\left(\frac{7}{4}-\frac{7}{8}-\frac{7}{12}\right)\times\left(-\frac{8}{7}\right)$

$$=-2+1+\frac{2}{3}$$
$$=-\frac{1}{3}$$

(4) 原式$=\left(-\frac{7}{8}\right)\div\left(\frac{42}{24}-\frac{21}{24}-\frac{14}{24}\right)$

$$=\left(-\frac{7}{8}\right)\div\frac{7}{24}$$
$$=-3$$

(5) 原式$=6-4+2+[(-7)+(-15)+2]\times\frac{3}{4}$

$$=4+(-20)\times\frac{3}{4}=-11$$

注:当有理数运算中同时出现小数与分数时,应根据算式的特点灵活处理.本题的(1)是将分数化为小数计算的;本题的(2)则是将小数化为分数的.

乘法对于加法的分配律,在除法中不能随意套用.(3)中把原式化成$\left(1\frac{3}{4}-\frac{7}{8}-\frac{7}{12}\right)\times\left(-\frac{8}{7}\right)$是运用乘法的分配律进行计算的.如(4),就不能化成$\left(-\frac{7}{8}\right)\div1\frac{3}{4}-\left(-\frac{7}{8}\right)\div$

$\frac{7}{8}-(-\frac{7}{8})\div\frac{7}{12}$. 交换律、结合律、分配律是数系的通性，它们都可以从正逆两个方面加以运用，如(5).

例 13 计算 $1+3+5+7+\cdots+2001$ 的值.

解：设 $S=1+3+5+7+\cdots+2001$ ①

再将 S 各项倒过来写为：

$S=2001+1999+1997+1995+\cdots+3+1$ ②

将 ①,② 两式相加，得

$2S=(1+2001)+(3+1999)+(5+1997)+\cdots+(1999+3)+(2001+1)$

$=2002+2002+\cdots+2002+2002$ （共有 1001 个 2002）

$=2002\times1001$

所以 $S=1001\times1001=1002001$

三、习　题

1. 计算下列各式的值：

(1) $-117\times(\frac{1}{32}-0.125)\div(-1.2)\times(-1\frac{3}{13})$；

(2) $(-1\frac{1}{36}+\frac{13}{107}\div\frac{24}{107}-\frac{17}{18})\div(-\frac{7}{8})\times1\frac{7}{11}$；

(3) $1-\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{3}[1-\frac{1}{4}(1-\frac{1}{5})]\right\}$；

(4) $(-0.125)^{12}\times(-1\frac{2}{3})^{7}\times(-8)^{13}\times(-\frac{3}{5})^{9}$；

(5) $-4^{2}\times[(1-7)\div6]+[(-5)^{3}-3]\div(-2)^{3}$；

(6) $-3^{3}\times1.25\times[-5+(-2)^{3}\div2\frac{2}{3}]-(-1)^{9}\times(-1)^{8}$；

(7) $(\frac{1}{1998}-1)(\frac{1}{1997}-1)(\frac{1}{1996}-1)\cdots(\frac{1}{1001}-$

$1)(\frac{1}{1000}-1)$;

(8) $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\cdots(1-\frac{1}{9^2})(1-\frac{1}{10^2})$;

(9) $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{1997\times1999}$;

(10) $\dfrac{0.1+13.\dot{3}+4\frac{2}{7}+1\frac{1}{4}}{\frac{1}{100}+\frac{1}{8}+\frac{3}{7}+1\frac{1}{3}}$.

2. 已知$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{20}+\frac{1}{41}+\frac{1}{110}+\frac{1}{1640}=1$,

求$-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{11}-\frac{1}{20}-\frac{1}{41}+\frac{1}{110}+\frac{1}{1640}$的值.

3. 化循环小数$0.\dot{8}\dot{1}$为分数.

4. 计算$\dfrac{3.875\times\frac{1}{5}+38\frac{3}{4}\times0.09-0.155\div0.4}{2\frac{1}{6}+[(4.32-1.68-1\frac{8}{25})\times\frac{5}{11}-\frac{2}{7}]\div1\frac{9}{35}+1\frac{11}{24}}$.

5. 求$2+2^2+2^3+2^4+2^5+\cdots+2^{98}-2^{99}$的值.

6. 求$1+4+7+10+\cdots+199$的值.

7. 求$1\frac{1}{3}-\frac{7}{12}+\frac{9}{20}-\frac{11}{30}+\frac{13}{42}-\frac{15}{56}$的值.

8. 求$\frac{24690}{12346^2-12345\times12347}$的值.

四、答案·提示:

1.(1) $\frac{45}{4}$;(2) $\frac{206}{77}$;(3) $\frac{19}{30}$;(4) $-2\frac{22}{25}$;(5) 32;(6) 271;(7) $-\frac{1}{2}$;

(8) 原式$=(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})(1-\frac{1}{4})\cdots(1+\frac{1}{9})(1-\frac{1}{9})(1+\frac{1}{10})(1-\frac{1}{10})$

$=[(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{10})][(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\cdots(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{10})]$

$=[\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\cdots\frac{10}{9}\times\frac{11}{10}][\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\cdots\frac{9}{10}]$

$=\frac{11}{2}\times\frac{1}{10}$

$=\frac{11}{20}$

(9) 原式$=\frac{1}{2}[(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{1997}-\frac{1}{1999})]$

$=\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{1999})]=\frac{1}{2}\times\frac{1998}{1999}=\frac{999}{1999}$

(10) 原式$=\dfrac{\frac{1}{10}+\frac{40}{3}+\frac{30}{7}+\frac{5}{4}}{\frac{1}{100}+\frac{1}{8}+\frac{3}{7}+\frac{4}{3}}$

$=\dfrac{10(\frac{1}{100}+\frac{4}{3}+\frac{3}{7}+\frac{1}{8})}{(\frac{1}{100}+\frac{4}{3}+\frac{3}{7}+\frac{1}{8})}=10$