数学分析讲义学习指导书

—附解题方法提要

刘玉琏　杨奎元　吕凤　编

下

高等教育出版社

数学分析讲义学习指导书

——附解题方法提要

下　　册

刘玉琏　杨奎元　吕凤　编

高等教育出版社

本书是与高等教育出版社出版的刘玉琏、傅沛仁编《数学分析讲义》下册(1982 年第 2 版)配套的学习指导书. 按照讲义体例,逐节对应编写,每节包括基本内容,学习要求,答疑辅导,补充例题,练习题解法提要五部分,每章末附有自我测验题,书末给出其解答.

本书可作数学专业学生,中学教师,自学读者,函授学员学习数学分析的辅导书,也可作数学分析习题课的教学参考书.

数学分析讲义学习指导书

——附解题方法提要

下　册

刘玉琏　杨奎元　吕凤编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 12.875　字数 310 000

1987 年10月第 1 版　　1987 年10月第 1 次印刷

印数 00 001—20 120

ISBN 7-04-000026-1/O·13

书号 13010·01428　　定价2.90元

目　录

第九章 级　　数

§9.1 数值级数

一、基本内容

本节有五段.

第一段借助于级数部分和数列的收敛和发散相应地给出了级数的收敛和发散的定义. 这是本节讨论级数的基础.

第二段给出了与收敛数列平行的收敛级数的两个性质：柯西收敛准则(定理 1)；线性性质(定理 2 与定理 3)，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(au_n+bv_n)=a\sum_{n=1}^{\infty}u_n+b\sum_{n=1}^{\infty}v_n,\ a\text{ 与 }b\text{ 是常数.}$$

第三段给出了同号级数(主要是正项级数)敛散性判别法. 正项级数收敛的必要充分条件是它的部分和数列有界(定理 4). 由此出发得到了比较判别法(定理 5 及其推论). 又在比较判别法的基础上给出了柯西判别法(定理 6 及其推论)和达朗贝尔判别法(定理 7 及其推论).

第四段给出了级数绝对收敛与条件收敛的定义. 判别级数绝对收敛只需应用第三段正项级数的判别法(定理 9). 判别级数条件收敛给出了狄利克莱判别法(定理 10)和阿贝尔判别法(定理 11). 判别特殊的变号级数——交错级数的收敛性有莱布尼兹判别法(定理 8)，它是狄利克莱判别法的特殊情况.

一般来说，级数不象有限和那样满足结合律，交换律和分配律. 第五段给出了，若级数收敛，则它满足结合律(定理 12)；若级数绝对收敛，则它满足交换律和分配律(定理 13 和定理 14).

二、学习要求

研究级数及其和数只不过是研究数列及其极限的一种新形式．这种新形式丰富和发展了研究数列的内容和方法，并为进一步研究函数级数和其它数学理论提供了有利的工具．要求：

1．掌握级数收敛和发散的定义，理解其意义，并熟练地掌握判别级数敛散性的判别法．记住几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$和广义调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$的敛散性．

2．掌握收敛级数和绝对收敛级数的性质及其证明方法．

3．具有应用级数的敛散定义和收敛级数的性质证明级数中一些理论问题的能力．

三、答疑辅导

问1．为什么要学习级数？

答　这个问题在本章的引言中已作了简要的说明．再详述如下：

我们在本书的前八章（上册）所讨论的函数主要是初等函数．虽然初等函数能够描述许多自然现象和工程技术中的客观规律，但是，只有初等函数还远远不能满足描述客观规律的需要．为了使数学分析所讨论的函数能广泛地服务于科学技术和数学理论本身，人们借助于极限、函数方程、微分和积分等工具表述了更多的非初等函数．函数级数就是表述非初等函数的一个重要工具．例如，二阶线性常微分方程

$$xy''+y'+xy=0$$

的解就不是初等函数，而这个解却可用函数级数

$$y(x)=a_0\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(k!)^2\cdot 2^{2k}}\right)$$

表示(见§9.3问5).

因为函数级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在每一个定点$x=x_0$,就是一个数值级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$,为了讨论函数级数，首先要讨论数值级数.这就是本节要讨论的问题.

讨论数值级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$,核心问题是何谓级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的"和"?至今我们还不知道什么是无限多个数的"和",因此需要予以定义.从有限和(部分和)出发，借助于数列极限的工具给出"无限和"的定义是很自然的,即无限和$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$应该是极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n\left(S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k\right)$.于是,级数与数列就等同起来,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\Longrightarrow\{S_n\},\text{ 其中 }S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,$$

$$\{S_n\}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\text{其中 }u_n=S_n-S_{n-1}(S_0=0).$$

因此，研究级数及其和数只不过是研究数列及其极限的一种新形式.

数值级数除了服务于函数级数外,它可表示无理数,从而能近似地计算无理数.

问2. 正项(同号)级数有哪些敛散性判别法?它的理论基础是什么?判别法之间有什么关系?

答 正项级数收敛的必要充分条件是它的部分和数列有界.这就是正项级数敛散性判别法的理论基础.在此基础上得到一些敛散性判别法,而每种判别法都有两种形式:不等式形式与极限形式.下面为了书写简单,约定:

$$\text{正项级数}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{用}(u)\text{表示}.$$

正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$用(v)表示.

比较判别法

$\exists N \in \mathbf{N}, \exists c>0, \forall n \geqslant N$, 有
$u_n \leqslant c v_n$.
1) 若(v)收敛, 则(u)收敛.
2) 若(u)发散, 则(v)发散.

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}=k \quad (0\leqslant k\leqslant +\infty)$,
1) 若(v)收敛, 且$k\neq+\infty$, 则(u)收敛.
2) 若(v)发散, 且$k\neq 0$, 则(u)发散.

以比较判别法为基础将(v)级数选为几何级数$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, 即将(u)级数与几何级数比较, 有下列两个敛散性判别法:

柯西判别法

1) 若$\exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant N$, 有
$u_n \leqslant q^n$ 或 $\sqrt[n]{u_n} \leqslant q$.
且$q<1$, 则(u)收敛.
2) 若$\forall n \in \mathbf{N}, \exists m>n$, 有
$\sqrt[m]{u_m} \geqslant 1$,
则(u)发散.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}=l$,
1) 若$l<1$, 则(u)收敛.
2) 若$l>1$, 则(u)发散.

达朗贝尔判别法

1) 若$\exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant N$, 有
$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$ 或 $u_{n+1} \leqslant q u_n$
且$q<1$, 则(u)收敛.
2) 若$\exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant N$, 有
$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$,
则(u)发散.

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}=l$,
1) 若$l<1$, 则(u)收敛.
2) 若$l>1$, 则(u)发散.

虽然柯西判别法与达朗贝尔判别法都是与几何级数比较得到的，但是两者也略有区别. 由练习题§2.2第25题，若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$，即判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性，若能够用达朗贝尔判别法，也一定能够用柯西判别法. 反之，能够用柯西判别法，但不一定能用达朗贝尔判别法. 例如，判别正项级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots$$

的敛散性. 若用柯西判别法，有

$$\sqrt[n]{u_n}=\begin{cases}\frac{1}{2}, \text{当 } n \text{ 是奇数,}\\ \frac{1}{3}, \text{当 } n \text{ 是偶数.}\end{cases}$$

即 $\forall n\in\mathbf{N}$，$\sqrt[n]{u_n}\leqslant\frac{1}{2}$，则该级数收敛.

用达朗贝尔判别法，有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\begin{cases}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n<1, \text{当 } n \text{ 是奇数,}\\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n>1, \text{当 } n \text{ 是偶数.}\end{cases}$$

即达朗贝尔判别法对这个级数失效.

当$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1\left(\text{或}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1\right)$时，柯西判别法(或达朗贝尔判别法)失效. 这是因为，一方面，当$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1>q\ (0<q<1)$，即$\exists N\in\mathbf{N}, \forall n>N$，有$\sqrt[n]{u_n}>q$或$u_n>q^n$；另一方面，当$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1<r\ (r>1)$，即$\exists N\in\mathbf{N}, \forall n>N$，有$\sqrt[n]{u_n}<r$或$u_n<r^n$，所以此时，将级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与几何级数比较不能判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性. 这说明应用几何级数这把“尺子”不能“测量”所有正项级数的敛散性，

即几何级数这把“尺子”的“精度”不够. 人们发现广义调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 是比几何级数“精度”更高的一把“尺子”. 于是,将正项级数与广义调和级数比较,得到新的更进一步的判别法——拉阿伯(Raabe)判别法,即判别某些正项级数敛散性应用柯西判别法失效,但是应用拉阿伯判别法却能判别其敛散性.(见补充例题的例7). 虽然广义调和级数这把“尺子”是比几何级数这把“尺子”的“精度”更高,但是它仍然不能“测量”所有正项级数的敛散性. 人们又发现级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 是比广义调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$“精度”更高的一把“尺子”. 于是,将正项级数与级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 比较,又得到新的更进一步的判别法,同样,这个判别法也不能“测量”所有正项级数的敛散性. 人们又发现级数 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$ 是比级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$“精度”更高的一把“尺子”,等等. 因为“尺子”的“精度”愈来愈高,相应的判别法的形式也愈来愈复杂,所以这些判别法也就失去了判别级数敛散性的实用价值. 在理论上,这种“精确化”的过程是没有尽头的,即不存在判别所有正项级数敛散性的万能判别法. 下面的问3和问4是从另一个方面回答了这个问题.

问3. 何谓一个收敛正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 比另一个收敛正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛的较慢?是否存在收敛最慢的正项级数?

答 在级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 中去掉前 m 项,即

$$R_m = u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots$$

称为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$的 **$m$ 项余式或 m 项余和**.

我们知道，若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则$\lim\limits_{m\to\infty} R_m = 0$.

设收敛正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$的$m$项余式分别是$A_m$与$B_m$. 若$A_m$比$B_m$是高阶无穷小($m\to\infty$)，即

$$\lim_{m\to\infty}\frac{A_m}{B_m} = 0,$$

称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛得较慢**(即B_m趋向于0的速度比A_m趋向于0的速度较慢)或级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛得较快.

例如，有两个收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. 因为，有

$$\frac{A_m}{B_m} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{m+k}}}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{m+k}}} = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} \to 0\ (m\to\infty),$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$收敛得较慢.

重要的是，对任意正项收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，总能构造一个比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛得慢的级数. 事实上，设$A_m$是收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的$m$项余式. 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{A_n} - \sqrt{A_{n+1}}\right),\ (A_0 = 0)$$

也是收敛级数. 设它的m项余式是B_m,即

$$B_m=(\sqrt{A_m}-\sqrt{A_{m+1}})+(\sqrt{A_{m+1}}-\sqrt{A_{m+2}})+\cdots=\sqrt{A_m}.$$

有
$$\frac{A_m}{B_m}=\frac{A_m}{\sqrt{A_m}}=\sqrt{A_m}\to 0(m\to\infty),$$

即收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sqrt{A_n}-\sqrt{A_{n+1}})$比收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛得较慢.

这个事实说明,正项收敛级数中没有收敛最慢的级数.

问 4. 何谓一个发散的正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$比另一个发散的正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散得较慢?是否存在发散最慢的正项级数?

答 设发散正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$的部分和分别是$S_n$与$P_n$. 若部分和$S_n$是比部分和$P_n$高阶的无穷大($n\to\infty$),即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{S_n}=0,$$

称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$**发散得较慢**(即$P_n$趋向于无穷大的速度比$S_n$趋向于无穷大的速度较慢)或级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散得较快.

例如,有两个发散的正项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}q_1^n$与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}q_2^n$, 其中$1<q_2<q_1$,有

$$\frac{P_n}{S_n}=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}q_2^k}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}q_1^k}=\frac{\frac{1-q_2^n}{1-q_2}}{\frac{1-q_1^n}{1-q_1}}$$

$$=\frac{q_1-1}{q_2-1}\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^n\frac{1-\frac{1}{q_2^n}}{1-\frac{1}{q_1^n}}\to 0\quad(n\to\infty),$$

即发散级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}q_2^n$比发散级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}q_1^n$发散得较慢。

重要的是，对任意正项发散级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，总能构造一个比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散得较慢的级数。事实上，设$S_n$是正项的发散级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的$n$项部分和。级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})\quad(S_0=0)$$

也是发散级数。设它的n项部分和是P_n，即

$$P_n=\sqrt{S_1}+(\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1})+\cdots+(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})=\sqrt{S_n},$$

有
$$\frac{P_n}{S_n}=\frac{\sqrt{S_n}}{S_n}=\frac{1}{\sqrt{S_n}}\to 0\quad(n\to\infty),$$

即发散级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})$ $(S_0=0)$比发散级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散得较慢。

这个事实说明，发散正项级数中没有发散最慢的级数。

问 5. 可用哪些方法证明调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的发散性？

答 有下列五种方法：

1）证明调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的部分和数列$\{S_n\}$的某个子数列$\{S_{2^m}\}$发散，见《讲义》§ 9. 1. 例 3.

2）用柯西收敛判别法，证明部分和数列

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$

是发散的，见《讲义》§ 2.2，例 11.

3）证明数列$\{a_n\}$：

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

存在极限 c(尤拉常数)，即

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=c+\alpha(n),$$

其中 $\alpha(n)\to 0$(当 $n\to\infty$ 时)．于是，调和级数部分和

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+c+\alpha(n).$$

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}[\ln n+c+\alpha(n)]=+\infty,$

即调和级数发散．见《讲义》§ 2.2 练习题第 19 题.

4）应用练习题 § 9.1 第 14 题.

已知 $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\cdots>\frac{1}{n}>\cdots>0$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}1=+\infty$$

发散，则调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 也发散.

5）用(广义)积分法．它的部分和

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

由定积分的几何意义，有

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx\leqslant S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

又 $$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1),\ \lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty,$$

则调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

值得注意的是，调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散(趋近于 $+\infty$)的极慢.尤拉曾计算过，

$$S_{1000}=7.48\cdots,\ S_{1000000}=14.39\cdots,\text{等等}.$$

问 6. 阿贝耳变换(《讲义》§ 9.1.引理)有什么意义？

答 阿贝耳变换是证明狄利克莱判别法与阿贝耳判别法的重要工具. 阿贝耳变换的一般形式是：

有两个 n 项有限数列：

$$a_1,a_2,\cdots,a_n\quad\text{与}\quad b_1,b_2,\cdots,b_n.$$

设 $P_k=b_1+b_2+\cdots+b_k\quad(k=1,2,\cdots,n)$，有 $b_k=P_k-P_{k-1}\quad(P_0=0)$，则

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k&=\sum_{k=1}^{n}a_k(P_k-P_{k-1})\\&=a_1(P_1-P_0)+a_2(P_2-P_1)+\cdots+a_n(P_n-P_{n-1})\\&=P_1(a_1-a_2)+P_2(a_2-a_3)+\cdots+P_{n-1}(a_{n-1}-a_n)+P_na_n\\&=\sum_{k=1}^{n-1}P_k(a_k-a_{k+1})+P_na_n.\end{aligned}$$

或 $$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=a_nP_n-\sum_{k=1}^{n-1}P_k(a_{k+1}-a_k).\qquad(*)$$

(*)式就是阿贝耳变换. 将(*)式改写为

$$\sum_{k=2}^{n}a_kb_k=a_nP_n-a_1P_1-\sum_{k=1}^{n-1}P_k(a_{k+1}-a_k)$$

或 $$\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} b_{k+1} = a_n P_n - a_1 P_1 - \sum_{k=1}^{n-1} P_k (a_{k+1} - a_k),$$

或 $$\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}(P_{k+1} - P_k) = a_n P_n - a_1 P_1 - \sum_{k=1}^{n-1} P_k (a_{k+1} - a_k). \quad (**)$$

若$a_1 > a_2 > \cdots > a_n$，且$b_k > 0(k=1,2,\cdots,n)$，则阿贝耳变换(*)有明显的几何意义．当$n=4$时，有

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$$
$$= P_1(a_1 - a_2) + P_2(a_2 - a_3) + P_3(a_3 - a_4) + P_4 a_4.$$

上面等式左端是图 9.1 四个横条面积之和，等式右端是图 9.1 四个竖条面积之和，显然二者相等．由此可见，阿贝耳变换实质是按着横竖不同顺序作和（一般是代数和）得到的等式．

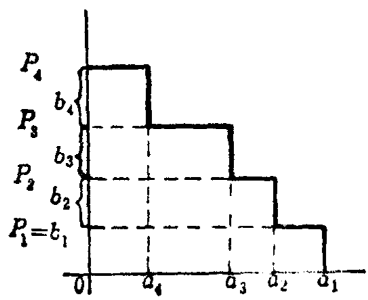

图 9.1

设函数 $a(x)$ 与 $P(x)$ 在区间$[\alpha, \beta]$上有连续导数．给分法 T 将$[\alpha,\beta]$分成 $n-1$ 个小区间，分点是

$$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n. \quad x_1 = \alpha, \quad x_n = \beta.$$

令 $P_k = P(x_k)$，$a_k = a(x_k)$，$k=1,2,\cdots,n$．代入(**)式，有

$$\sum_{k=1}^{n-1} a(x_{k+1})[P(x_{k+1}) - P(x_k)]$$
$$= a(x_n)P(x_n) - a(x_1)P(x_1) - \sum_{k=1}^{n-1} P(x_k)[a(x_{k+1}) - a(x_k)].$$

根据拉格朗日中值定理，有

$$\sum_{k=1}^{n-1} a(x_{k+1}) P'(\xi_{k+1}) \Delta x_k$$
$$= a(\beta)P(\beta) - a(\alpha)P(\alpha) - \sum_{k=1}^{n-1} P(x_k) a'(\eta_k) \Delta x_k,$$