三 角

人民教育出版社

三　角

*

人民教育出版社编辑出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷一厂印装

*

1978年2月第1版
1978年5月第1次印刷
书号 13012·0171　定价 0.31元

前　　言

当前，各类业余学校的学生以及广大知识青年，在党的十一大精神鼓午下，决心为在本世纪内把我国建设成为伟大的社会主义强国，努力学习，把自己培养成为又红又专的社会主义建设人才．为了适应这些学校的学生和广大知识青年学习数学基础知识的需要，我们将一九六六年编写的一套没有正式出版的数学教材，作了一些必要的修改后出版，供业余学校选作教材，也可供中等专科学校师生选用和广大知识青年自学之用．

这套书包括«代数»三册、«几何»两册、«三角»一册、«平面解析几何»一册、«微积分初步»一册．

由于这套书编写时间较久，有些方面可能不适应现在的情况，也难免有缺点和错误，希望读者批评指正．

人民教育出版社

一九七八年一月

目　录

第一章　三角函数

1.1　角的概念的推广　我们知道，角可以看作是由一条射线绕着它的端点旋转而形成的。我们已经学过 $0°$ 到 $360°$ 的角。在研究某些自然现象和工程技术时，还需要有大于 $360°$ 的角的概念。例如，要研究图 1.1 中的机械转柄绕着轴旋转了一周后继续旋转的情况，就需要有大于 $360°$ 的角的概念。

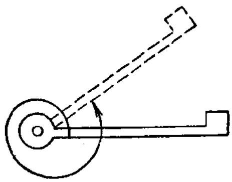


图　1.1

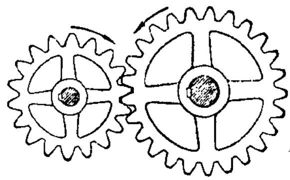


图　1.2

我们还可以看到角的形成带有方向的现象。例如，图 1.2 是相互衔接的两个齿轮，其中一个旋转一个角，另一个也旋转一个角，但是它们旋转的方向是相反的。为了研究或者解决实际问题的需要，我们把由不同的旋转方向所形成的角加以区别。习惯上规定：按着反时针方向旋转所得的角是正角；按着顺时针方向旋转所得的角是负角。

这样，角的概念不但包含 $0°$ 的角和任意大小的正角，也包含任意大小的负角。例如，图 1.3 中以 x 轴的正半轴为始边的角 $\alpha=390°$，$\beta=-330°$，$\gamma=-110°$。

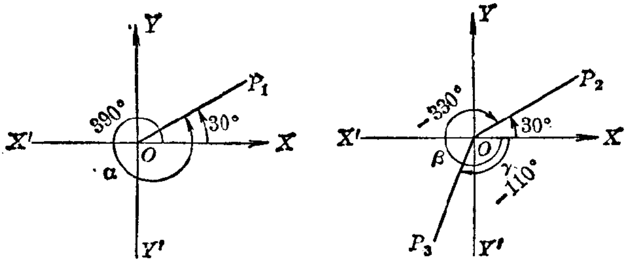


图 1.3

由图 1.3，我们可以看到：390°角和−330°角都跟 30° 角的终边相同．390°可以写成 360°+30°，−330° 可以写成−360°+30°．除了这两个角以外，跟 30° 角终边相同的还有下列度数的角：$2\cdot360°+30°$、$-2\cdot360°+30°$、$3\cdot360°+30°$、$-3\cdot360°+30°$、···．

所有跟 30°角终边相同的角，连同 30° 角在内，可以用式子 $k\cdot360°+30°$ ($k=0$、±1、±2、···) 来表示．例如，在这个式子里，如果 $k=0$，它就表示 30°角，如果 $k=+1$ 或者 -1，它就表示 $360°+30°$(就是 390°) 或者 $-360°+30°$ (就是−330°) 的角．

一般地说，所有跟 α 角终边相同的角，连同 α 角在内，可以用下面的式子来表示：

$$k\cdot360°+\alpha.\ (k\text{ 是整数})$$

如果角的顶点是原点，始边是 x 轴的正半轴，那么终边所在的象限，就叫做这个角所在的象限．例如，图 1.3 中的角 α 和角 β 在第Ⅰ象限，角 γ 在第Ⅲ象限．

例 1 把下列各角化成 $k\cdot360°+\alpha$ 的形式 (k 是整数，$0°\leqslant\alpha<360°$)：

(1) 1000°；(2) −325°；(3) −1080°．

解 (1) $1000° = 2 \cdot 360° + 280°$;

(2) $-325° = (-1) \cdot 360° + 35°$;

(3) $-1080° = (-3) \cdot 360° + 0°$.

例 2 求下列各角所在的象限：(1) $870°$；(2) $-1000°$.

解 (1) $870° = 2 \cdot 360° + 150°$.

因为 $150°$ 在第Ⅱ象限，所以 $870°$ 在第Ⅱ象限.

(2) $-1000° = (-3) \cdot 360° + 80$.

因为 $80°$ 在第Ⅰ象限，所以 $-1000°$ 在第Ⅰ象限.

1.2 弧度制 量角的大小，除了用角度制以外，还经常用弧度制(也叫弪制)。弧度制是用弧度作单位来量角，把等于半径长的弧所对的圆心角叫做1弧度的角.

如图 1.4，$\overset{\frown}{AB}$ 的长等于半径 R，$\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角 AOB 就是 1 弧度的角.

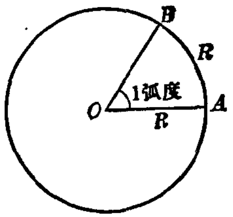


图 1.4

因为圆的周长等于半径的 2π 倍，所以整个圆所对的圆心角是 2π 弧度，也就是一个周角(360°) 等于 2π 弧度. 由此，很容易看到一些特殊角的角度与弧度之间有如下的对应关系：

角 度	360°	180°	90°	60°	45°	30°
弧 度	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

根据关系式

$$\boxed{180° = \pi \text{ 弧度},}$$

可以进行度和弧度的换算.

例 1 把 $22°30'$ 化成弧度.

解 $22°30'=22.5°=\frac{\pi}{180}$ 弧度 $\times 22.5=\frac{\pi}{8}$ 弧度.

例 2 把 $\frac{3\pi}{5}$ 弧度化成度.

解 $\frac{3\pi}{5}$ 弧度 $=\frac{180°}{\pi}\times\frac{3\pi}{5}=108°$.

要求得度和弧度换算的近似值，可以利用关系式 $1°\approx 0.01745$ 弧度，1 弧度 $\approx 57°18'$. 还可以直接查“中学数学用表”. 查表的方法可以看表中所附的说明.

在用弧度来量角时，“弧度”两字通常略去不写. 例如 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$ 就表示 $\angle AOB$ 等于 $\frac{\pi}{2}$ 弧度，$\angle\alpha=1.2$ 就表示 $\angle\alpha$ 等于 1.2 弧度.

采用了弧度制以后，因为 1 弧度的圆心角所对的弧长等于半径 R，所以 α 弧度的圆心角所对的弧长 l 就等于 αR（图 1.5）. 由此得出计算弧长的公式，

$$\boxed{l=\alpha R.}$$

这个公式比几何中学到的弧长公式简单易记.

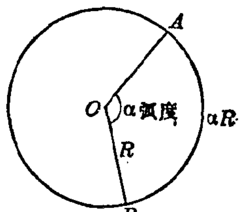


图 1.5

例 3 已知在半径等于 120 cm 的圆上，一条弧的长是 145.5 cm，求这弧所对的圆心角的度数.

解 $\alpha=\frac{l}{R}=\frac{145.5}{120}=1.2125$（弧度）.

1.2125 弧度 $=69°29'$.

答：这条弧所对的圆心角是 $69°29'$.

1.3 密位 量角的大小，除了用角度和弧度作单位以外，军事上还常用密位作为量角的单位．把圆周分成 6000 等分，每一等分弧所对的圆心角就叫做一个密位．利用密位能够迅速地求出两点间距离的近似值．如图 1.6，设圆的半径是 R，我们很容易得到：

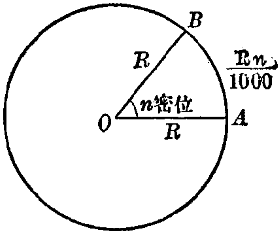


图 1.6

$$1\text{ 密位圆心角所对的弧长}=\frac{2\pi R}{6000}\approx\frac{R}{1000},$$

$$\therefore\quad n\text{ 密位圆心角所对的弧长}\approx\frac{Rn}{1000}.$$

炮兵在地面实际进行测量时，把 R 当作距离，$\overset{\frown}{AB}$ 的弧长近似地看作 AB 的直线距离，叫做间隔．这样就可以得到炮兵常用的密位公式：

$$\text{间隔}=\frac{\text{距离}\times\text{密位数}}{1000}.$$

从这个公式，还可以得到求距离和求密位数的公式．

例 1 如图 1.7，火炮离目标 2000 米，发射一发炮弹后，观察到弹着点偏右 30 米．应当向左转过多少密位才能打中目标？

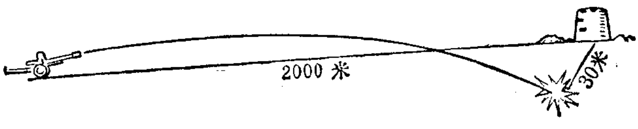


图 1.7

解 $\because$ 距离 $=2000$ 米，间隔 $=30$ 米，

$$\therefore \quad 密位数=\frac{间隔\times 1000}{距离}=\frac{30\times 1000}{2000}=15。$$

答：应当向左转过 15 密位.

例 2 炮兵从观察仪器中看到一辆坦克的高线所张的角是 5 密位. 已知坦克的高约 3 米，求炮兵到坦克的距离.

解 $\because$ 间隔 $=3$ 米，密位数 $=5$，

$$\therefore \quad 距离=\frac{间隔\times 1000}{密位数}=\frac{1000\times 3}{5}=600(米)。$$

答：炮兵到坦克的距离是 600 米.

习 题 一

1. (口答)跟下列各角终边相同的一切角，可以用怎样的式子来表示?

(1) 60°；(2) 135°；(3) -30°.

2. (口答)求跟下列各角终边相同的 0° 到 360° 的角：

(1) 750°；(2) -585°；(3) -1200°.

3. (口答)求下列各角所在的象限：

(1) -60°；(2) 210°；(3) 780°；(4) -930°；

(5) $(2k+1)180^\circ+45^\circ$ (k 是整数).

4. 把度化成弧度：

(1) 18°； (2) -75°；(3) 420°；

(4) 900°；(5) $67^\circ30'$；(6) -750°。

5. 把弧度化成度：

(1) $\frac{\pi}{12}$； (2) $-\frac{3\pi}{4}$； (3) $\frac{25\pi}{6}$；

(4) $-\frac{4}{3}\pi$；(5) $-\frac{27}{10}\pi$； (6) -12π。

6. (口答)用弧度表示：

(1) 终边在 x 轴上的角的一般形式；

(2) 终边在 y 轴上的角的一般形式。

7. 利用中学数学用表，把度化成弧度：

(1) $39°43'$；　(2) $57°38'$；

(3) $168°15'$；　(4) $352°17'$。

8. 利用中学数学用表，把弧度化成度：

(1) 0.6270；　(2) 0.3874；

(3) 3.1579；　(4) -0.2973。

9. (口答)(1) 一个飞轮每分钟旋转 n 周，每分钟旋转多少弧度？

(2) 一个飞轮每转一周需 t 秒钟，每秒钟转多少弧度？

10. (口答) 设圆的半径是 R，α 弧度的圆心角所对的弧长是 l。

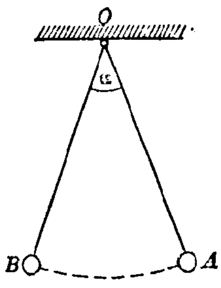
(1) 用 α 和 R 表示 l；(2) 用 α 和 l 表示 R；(3) 用 l 和 R 表示 α。

11. (1) 在半径约等于 22.5 cm 的圆上，一条弧所对的圆心角是 $40.5°$，求这条弧的长。

(2) 已知含有 $18°$ 的弧的长约是 5.2 cm，求这弧所在的圆的半径。

(3) 已知圆的半径等于 2 m，求这圆上长 4 m 的弧所含的度数。

12. 如图，单摆从 A 点运动到 B 点转动的角 α 约是 0.182 弧度，单摆的摆长约是 0.472 m，求 $\overset{\frown}{AB}$ 的长。

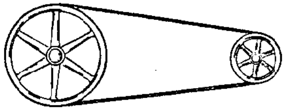


(第 12 题)

13. 已知飞轮的半径是 0.6 米，每分钟旋转 300 周，求轮周上一点每秒钟转

过的弧长.

14. 已知两个皮带轮的直径分别是 437 mm 和 138 mm，轮心间的距离是 865 mm，求如图装置的传动皮带的长.



（第 14 题）

15. 看到 1500 米外敌方一个工事的宽度所张的角是 36 密位，计算敌方工事的宽度.

16. 从观测仪器中看到远方一个目标的高所张的角是 4 密位. 已知这个目标的高是 1.6 米，计算观测仪器和目标间的距离.

17. 已知射击目标的位置比炮兵阵地约高 85 米，由炮兵阵地到目标的距离约是 2500 米，把目标的高线看作弧线，求炮到目标的仰角约是多少密位.

1.4 任意角的三角函数 在几何中，我们已经学过锐角三角函数的定义. 现在我们来说明任意角的三角函数的定义.

设 α 是任意大小的一个角. 以这个角的顶点 O 为坐标原点，这个角的始边为横坐标轴的正半轴，作横坐标轴 $X'X$ 和纵坐标轴 $Y'Y$（图 1.8）. 在角 α 的终边上任意取一点 P，设这点的横坐标是 x，纵坐标是 y，原点到这点的距离是 r. 横坐标 x 和纵坐标 y 的符号跟以前规定的一样，距离 r 总把它作为正的. 那么 α 的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割分别是*：

---

* $\operatorname{tg}\alpha$ 也记作 $\tan\alpha$；$\operatorname{ctg}\alpha$ 也记作 $\cot\alpha$；$\operatorname{cosec}\alpha$ 也记作 $\csc\alpha$.

$$\sin\alpha=\frac{y}{r};$$
$$\cos\alpha=\frac{x}{r};$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x};$$
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y};$$
$$\sec\alpha=\frac{r}{x};$$
$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{r}{y}.$$

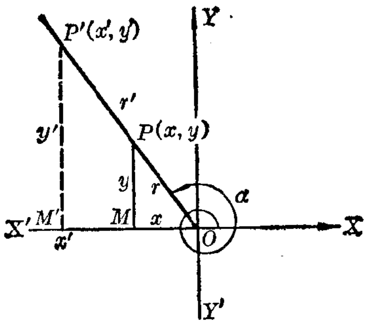


图 1.8

对于 α 的每一个确定的值，不管 P 点在终边上的位置怎样，上面的六个比都有确定的值和 α 对应（如图 1.8 的 $\triangle OP'M'\backsim\backsim\triangle OPM$，并且 x 和 x' 同号，y 和 y' 同号，从而 $x':x=y':y=r':r$）；但是当 α 角的终边在 x 轴上，就是 $\alpha=k\pi$（k 是整数）时，那么 $\frac{x}{y}$ 和 $\frac{r}{y}$ 两个比不存在（因为这时 $y=0$）；当 α 角的终边在 y 轴上，就是 $\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k$ 是整数）时，那么 $\frac{y}{x}$ 和 $\frac{r}{x}$ 两个比不存在（因为这时 $x=0$）。因此，上面六个比都是 α 的函数，它们都叫做 α 的三角函数；$\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 中，自变量 α 的取值范围是全部实数；$\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\sec\alpha$ 中，α 的取值范围是不等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}$ 的所有实数，$\operatorname{ctg}\alpha$ 和 $\operatorname{cosec}\alpha$ 中，α 的取值范围是不等于 $k\pi$ 的所有实数。

容易看出，如果 α 是锐角，上面所说的定义，跟几何中所说的定义，实质上是一致的。

从三角函数的定义，我们可以看出，正弦$\left(\frac{y}{r}\right)$和余割$\left(\frac{r}{y}\right)$对于第Ⅰ和第Ⅱ象限的角是正的（$y>0, r>0$），而对于第Ⅲ和第Ⅳ象限的角是负的($y<0, r>0$)；余弦$\left(\frac{x}{r}\right)$和正割$\left(\frac{r}{x}\right)$对于第Ⅰ和第Ⅳ象限的角是正的（$x>0, r>0$），而对于第Ⅱ和第Ⅲ象限的角是负的($x<0, r>0$)；正切$\left(\frac{y}{x}\right)$和余切$\left(\frac{x}{y}\right)$对于第Ⅰ和第Ⅲ象限的角是正的（x、y同号），而对于第Ⅱ和第Ⅳ象限的角是负的（x、y异号）。因此，三角函数在各象限的符号可以概括成图1.9（图内所列各种函数是正的，其余的函数是负的）。

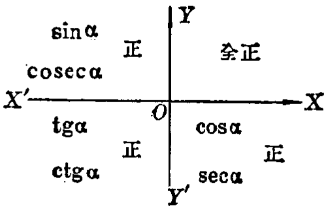


图 1.9

从三角函数的定义，我们还可以看出，所有终边相同的角的同一三角函数的值是相等的。就是，对于任意角α(只要是容许的)和任意整数k都有：

$$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha;$$

$$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(2k\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(2k\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha;$$

$$\sec(2k\pi+\alpha)=\sec\alpha;$$

$$\operatorname{cosec}(2k\pi+\alpha)=\operatorname{cosec}\alpha.$$

上面这些公式可以概括成：

$2k\pi+\alpha$（就是$k\cdot360°+\alpha$）的三角函数分别等于α的同函数（k是整数）。

例 1 已知角 α 的终边上的一点的坐标是$(-3,-4)$，求 α 的三角函数值。

解 如图 1.10*，由 $x=-3$、$y=-4$，得

$$=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5.$$

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5};$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{-4}{-3}=1\frac{1}{3};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4};$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{5}{-3}=-1\frac{2}{3};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{r}{y}=\frac{5}{-4}=-1\frac{1}{4}.$$

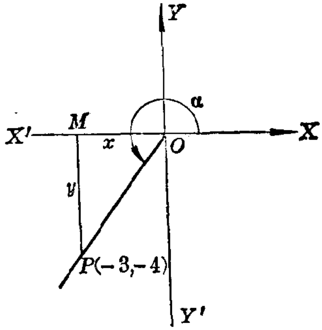


图 1.10

例 2 决定下列各角的三角函数值的符号：

(1) 850°，　　　　(2) $-\frac{8\pi}{3}$.

解 (1) $850^\circ=2\cdot360^\circ+130^\circ$，$850^\circ$角是第Ⅱ象限的角，

$\therefore$ $\sin 850^\circ$、$\operatorname{cosec} 850^\circ$的值是正的，$850^\circ$ 角的其他三角函数值是负的。

(2) $-\frac{8\pi}{3}=(-2)\cdot 2\pi+\frac{4\pi}{3}$，$-\frac{8\pi}{3}$是第Ⅲ象限的角，

---

* 图 1.10 中的箭头只是表示了角 α 的一种情形，实际上，所有以 OX 为始边、以 OP 为终边的角都是适合于本题的角 α。以后在有关的图中也有同样的情况。

$\therefore\quad \operatorname{tg}\left(-\frac{8\pi}{3}\right)$、$\operatorname{ctg}\left(-\frac{8\pi}{3}\right)$的值是正的，$-\frac{8\pi}{3}$角的其他三角函数值是负的。

例3 根据下列条件，确定θ角所在的象限：

$$\sin\theta<0,\ 而\ \operatorname{tg}\theta>0.$$

解 $\because\ \sin\theta<0,\ \therefore\ \theta$在第Ⅲ或第Ⅳ象限；

$\because\ \operatorname{tg}\theta>0,\ \therefore\ \theta$在第Ⅰ或第Ⅲ象限。

$\therefore$ 符合 $\sin\theta<0$ 且$\operatorname{tg}\theta>0$ 的θ角在第Ⅲ象限。

例4 求下列三角函数的值：

(1) $\sin 390°$，　　(2) $\operatorname{tg}\frac{7}{3}\pi$。

解 (1) $\sin 390°=\sin(360°+30°)=\sin 30°=\frac{1}{2}$.

(2) $\operatorname{tg}\frac{7}{3}\pi=\operatorname{tg}\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

习 题 二

1. 已知角α的顶点和原点重合，始边和x轴的正半轴重合，终边上一点P的坐标是$(-1,\sqrt{3})$，求出α的六个三角函数的值。

2. 求下列各角的正弦，把所得的结果填入下面的表内。

函数＼角	$0(0°)$	$\frac{\pi}{6}(30°)$	$\frac{\pi}{4}(45°)$	$\frac{\pi}{3}(60°)$	$\frac{\pi}{2}(90°)$
正　弦					

3. (口答)决定下列各函数的符号：

(1) $\cos 120°$；　　(2) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$；

(3) $\mathrm{tg}225°$；　　(4) $\mathrm{ctg}\frac{11\pi}{6}$；

(5) $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$；　　(6) $\mathrm{cosec}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

4. (口答)设 x 是三角形的一个内角，下列函数中哪几个可以取负值？

(1) $\sin x$；　(2) $\cos x$；　(3) $\mathrm{tg}\, x$；　(4) $\mathrm{ctg}\frac{x}{2}$.

5. (口答)根据下列条件确定 θ 角所在的象限：

(1) $\sin\theta$ 是负值，而 $\cos\theta$ 是正值；

(2) $\sec\theta$ 和 $\mathrm{ctg}\theta$ 都是负值；

(3) $\sin\theta$ 和 $\mathrm{tg}\,\theta$ 同号；　(4) $\cos\theta$ 和 $\mathrm{tg}\,\theta$ 异号.

6. 把下列各三角函数化成 0°到 360°角的三角函数：

(1) $\sin 800°$；　　(2) $\cos(-42°)$；

(3) $\mathrm{tg}\frac{14\pi}{3}$；　　(4) $\mathrm{ctg}\frac{11\pi}{2}$.

1.5 同角三角函数的基本关系式　根据三角函数的定义，可以得出一个角 α 的三角函数间的八个基本关系式.

(1) 倒数关系

$$\sin\alpha\cdot\mathrm{cosec}\,\alpha=\frac{y}{r}\cdot\frac{r}{y}=1;$$

$$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=\frac{x}{r}\cdot\frac{r}{x}=1;$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}=1.$$

就是