复域内有理函数插值与逼近

〔美〕J.L.沃尔什 著

邢富冲 译
沈燮昌 校

中央民族学院出版社

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
COLLOQUIUM PUBLICATIONS VOLUME XX
INTERPOLATION AND APPROXIMATION
BY RATIONAL FUNCTIONS IN THE COMPLEX DOMAIN
BY J. L. WALSH

根据美国数学会1969年第五版翻译

复域内有理函数插值与逼近
〔美〕J.L.沃尔什著
邢富冲译　沈燮昌校
中央民族学院出版社出版
（北京白石桥路二十七号）
新华书店北京发行所发行
怀柔县孙史山印刷厂印刷
850×1168毫米32开本　17.3125印张　430千字
1988年12月第1版1988年12月第1次印刷
印数：1—3,000册
ISBN7-81001-086-7/G·21　定价：4.80元

内 容 简 介

本书是复域内有理函数插值和逼近理论的一本经典著作．迄今为止，该领域内任何一份重要研究成果无不得益于此书．该书论述了逼近的可能性、插值与纽线、多项式收敛的阶、过收敛、多项式最佳逼近、正交性与最小平方、多项式插值、有理函数插值、有理函数逼近、插值与单位圆内的解析函数、带有附加条件的逼近及对不解析函数的逼近、最佳逼近有理函数的存在性及唯一性等问题．所附补充材料介绍了本书问世后有理函数逼近领域取得的新进展．

本书材料丰富，逻辑严谨，叙述详尽，便于阅读，既可作为高等院校数学专业高年级学生及研究生的选修课教材，也是一切渴望了解复变函数插值及逼近理论的读者的一本理想的入门用书．

英文第一版序

用多项式级数表示函数或更一般地用有理函数级数表示函数的一般理论，它的内容如此广泛，以至于无法在一本书中尽述无遗．事实上可以认为，这一理论不仅包含Fourier级数的整个领域，而且包含用代数多项式或三角多项式对实函数进行逼近的详细的研究．在本书中，我们仅研究用由插值或极值性质（即最佳逼近）确定的多项式序列或用极点预先给定的更一般的有理函数序列来表示复域内的函数（特别是解析函数）的问题．在我们的全部研究中，Taylor级数起着中心的作用，因为它既有插值性质又有最佳逼近性质，而这正是我们全书的指导思想．事实上，我们得到的关于函数表示的几乎每一个结果都或者同Taylor级数的推广有关，或者同Taylor级数的某些性质有关，所以，用“Taylor级数的推广”作为本书的书名也是适宜的．

尽管Taylor级数有这种中心的作用，我们还是不准备详述Taylor级数现代理论的各个细节（可和性、间隙定理、Abel与Tauber诸定理、Ostrowski意义下的过收敛，等等）；这些方面的内容可以在别的文献中找到(例如，Dienes [1931])，而我们所研究的其它级数的理论还没有达到可以广泛地研究这些精细性质的阶段．另外我们还有意略去了一些内容，以便把本书的篇幅限制在一个适当的范围内，而且保持本书的对象——内容和方法的协调性．我们有意略去的内容有：阶乘级数与指数级数；与整函数性质有关的插值问题；作为微分方程或差分方程的解定义的或由递推公式确定的多项式级数；连分数；不是由插值或极值性质得到的展开式（因而Faber多项式被略去了），但既不涉及插值又不涉及极值性质就能方便地研究的一致逼近的可能性是一例外．只与实数域有关的各种问题自然都在被略去之列．调和函数被调和多项式或调和

有理函数逼近的理论与本书建立的理论类似；要想了解这一理论的细节，有兴趣的读者可以参阅Walsh不久前发表的文章［1929a］.

我们研究的对象的历史从Cauchy及Cauchy-Taylor级数正式开始．后来做出了较大贡献的有：Jacobi［1856］，他用插值引进了另一类重要的多项式级数；Runge［1885］，他在或多或少带有一定任意性的区域内研究了多项式或有理函数级数展开；Hilbert［1897］，他指出了Green函数与多项式逼近之间的一种联系；Faber［1903］，他引入了有广泛用途的属于区域的一种多项式集合，后来他还详细地研究了某些最佳逼近多项式序列［1920，1922］；S. Bernstein［1912］，他得到的在实数轴的区间上逼近的结果予示了适用于复域内的结果和方法；Fejer［1918］，他更透彻地研究了Hilbert的结果并推广了他的方法；Szego［1921］，他所作的关于在复平面内的曲线上正交的多项式的论述已经变成了这一理论的经典内容．后来的理论主要是最近十年的成果，其中许多内容依赖于Montel正规族理论及Caratheodory变动区域保角映射理论．这方面的重要课题包括：多项式及有理函数逼近的可能性，有各种各样极值性质（最佳逼近）的多项式逼近的进一步研究，收敛及过收敛的阶，用予先指定极点的有理函数进行插值和最佳逼近，解析函数的各种极值问题，等等．

本书中所叙述的理论无论如何也不是终结性的，但是本书还是达到了一定程度的完全性．凡是在方法及内容方面都能统一起来的问题，都尽可能地选入了本书；例如，我们对有理函数插值和逼近的研究在许多方面都是对多项式所做的研究的推广．作者对自己本身的研究成果特别予以注意，这与美国数学会专著的传统是一致的．在方法上，我们大量利用了Cauchy积分公式、相应的插值公式、调和函数与保角映射、Schwarz引理及其推广、收敛性的阶及其应用．关于对在一个给定的闭集上解析的函数逼近的理论，连同相应的展开式在一致收敛区域方面的结果，已经相当完整．如果给定的函数不在所考虑的闭集上解析，但是例如在一个区域的内部解析，在边界上只有一定的连续性，则在边界上的收敛性及收敛阶的

问题要难处理得多，而且至今还没有被系统地研究过.

我们指出，对于函数论其它分支中的几个经常用到的定理，本书给出了证明. 但是本书的主要课题是插值与逼近，所以，对于那些出现在熟知的论文中属于其它领域的定理，本书则一般不予证明. 在本书的一些更专门的部分，我们引用了一些仅见于期刊杂志的定理也未予证明. 所以本书的论述总体说来是系统的，而且本书的写作意图是既要适合于初学者，又要适合于专门家. 初学者第一次阅读本书时，不妨略去那些较专的部分；特别，我们认为初学者可以直接从第三章开始读，到必要时再回过头来读第一、二两章.

课文中指出了资料的出处，方括号内的数字是发表的年代，而详细出处载于书末的文献目录内. 遗憾的是文献目录并不完全，甚至对于本书的主要内容来说也不充分. 笔者最近完成了一篇文章[1935c]：复域内的多项式逼近. 本书的资料安排与这篇文章的资料安排类似，但本书的目的是要给出系统的讲解，而不单单是列出提纲. 本书没有谈到的许多与多项式逼近有关的问题，在上述文章中提到了，而上述文章没有考虑非多项式的有理函数的插值及逼近问题. 本书包含了从上述文章问世以来两年中得到的新材料. 对多项式插值和逼近感兴趣的读者可以发现，上面提到的文章可以用作研究指南.

本书中有许多结果过去未曾发表过，尽管其中有一些曾在上面刚刚提到的文章中及在美国数学会简报、全国科学院文集或巴黎报告上摘要叙述过结果而未予证明. 这些新结果为数很多，此处不可能一一列举. 我们只指出两点：第五章中用统一的方法叙述了曾被广泛地研究的对于在一个给定的闭集上解析的函数最佳逼近的多项式的收敛区域问题上的全部已知的结果，例外的只是在一条线段或一个圆周上关于某些病态的权函数在最小平方意义下的最佳逼近. 至于在实轴的一个单个的区间上关于一般的权函数在最小平方意义下的逼近，本书中所包含的新结果已经足够多了. 第九章包含着在有理函数插值方面用非常一般的统一的方法把新老结果统一起来的结果，文献中在此问题方面有大量的互不相关、多少带有一定偶然

性的研究成果.

笔者在写作本书的过程中十分荣幸地得到了许多帮助和鼓励. L. Kalmár博士把他原用匈牙利文发表的论文 [1926] 译成了德文供我参考. 申又枨博士允许我使用他1935年在哈佛大学所写的尚未发表的论文中的资料. 笔者得到了哈佛大学Milton基金的赞助，得以使Helen G. Russell小姐在打字及校对方面作了极好的令人赞叹的工作. 在1934～1935学年期间，笔者经高级研究协会同意，住在普林斯顿. 对于所有这些合作，笔者都表示衷心的感谢. 笔者还感谢美国数学会接受此书作为数学会专著丛书中的一册出版.

J. L. Walsh

1935年 5 月

英文第二版序

从本书第一版发行算起，这些年中（1935年以后）出现了如此之多与本书有关的新资料，以至于本书有一些部分需要加以完善．但是原有资料的基本部分现在无须重新改写，因而这个第二版与第一版的区别仅在于改正了几个错误，在课文中加进了一些简短的证明，扩充了图书目录，并且增加了一个在这个领域内指示某些现代意图的补充材料．这份材料讨论的问题是：(§1)多项式逼近的可能性；(§2)逼近的阶和连续性条件；(§3)用有界解析函数插值和逼近．所有这些问题都是有趣的尚未解决的问题．

近年来研究得非常广泛、以至于无法包含在本书中的一个重要课题是解析函数的极值问题及其同有理函数或其它类型的函数的逼近之间的关系．这方面有许多结果是§6.12、§6.13、§10.2–10.7、§11.3–11.9所建立的结果向多连通区域的推广．所用的方法主要是Green函数、保角映射不变量、核函数、正交函数及变分法．取得的进展归功于Ahlfors、Bergman、Carleson、Garabedian、Golusin、Grotzsch、Grunshy、Heins、Nehari、Polya、Robinson、Schaeffer、Schiffer、Spencer、Szego、Teichmüller及另外一些人．希望了解进一步情况的读者，可以参阅Bergman［1950］、Nehari［1951］及Schiffer［1950］．这里有大量尚未解决的问题．

J. L. Walsh

1952年5月

英文第四版及第五版序

增加了几篇新的参考文献，还增加了关于有理函数逼近方面近期工作的一个补充材料.

J. L. Walsh

1969年4月

目　录

第　一　章

逼近的可能性；解析函数

1.1　点集；初步的定义

本书通篇与复变量$z=x+iy$的平面或该平面经球极投影所成的复球面有关．在对多项式逼近的研究中，我们只考虑在**有限平面**（由有限点构成的平面）内的逼近，即，不考虑无穷远点．在研究更一般的有理函数的逼近问题时，我们通常考虑**扩充平面**——加进了一个无穷远点的平面．利用平面向球面的投影来解释并研究扩充平面是很方便的．如果没有明确地指出平面的类型，则所得的结果对有限平面及扩充平面二者都适用．

尽管经常使用扩充平面，一般我们还是不允许把无穷取作一个函数值或一个自变量的值，除非所考虑的问题涉及到了无穷远点的几何应用．在某些情况下（到时候我们会明确地指出），需要按照通常的惯例来理解极限、连续性以及收敛性的广义的定义．

一个点集C是**属于**C的或**被**C所**包含**的点的一个任意的聚集体．它的**余集**由平面上所有不属于C的点所组成．C关于一个包含C的集C_1的余集由所有属于C_1而不属于C的点组成．一个有限点P的一个**邻域**是以P为中心的一个圆的内部；而无穷远点的一个邻域是扩充平面上一个圆的外部．点P的一个**去心邻域**是P的一个邻域去掉P点本身．一个点P（不论它是否属于C），若它的任一去心邻域中都有C的点，则它是C的一个**极限点**．一个属于C的点，如果不是C的极限点，就称为**孤立点**．一个集合C，若它的每一点都是C的极限点，则称C是**自密集**．一个任意的集合C的极限点所构成的集合C'称为C的**导出集**或**导集**．C'的导集C''称为C的**二阶导集**，可以类似地定义更高阶的导集．一个集合C，若它的导集C'，C''，C'''，…中有一个是空集，则称C是**可约集**．

设C是一个任意的集合．若一点P的任一邻域内都既有属于C的点又有属于C的余集的点，则点P是C的一个**边界点**；C的全部边界点构成的集合是C的**边界**．一个点P在C的**外部**，意思是说，存在P点的某个邻域，该邻域中不含有C的点．一个点P在C的**内部**或说是C的一个**内点**，意思是说，存在P点的某个邻域，该邻域中仅含有属于C的点．**内部**与**外部**这两个术语还将在别的意义下使用（见下文），特别还与Jordan曲线有关．包含自己全部极限点的集合是**闭集**．全部元素都是内点的集合是**开集**．一个集合C可以既不是闭集又不是开集．任何一个集合的导集及边界都是闭集．闭集的余集是开集．开集的余集是闭集．

如果一个集合位于平面上某个圆的内部，我们就说它是**有界**的．非有界的集合称为是**无界**的．**两个集合C_1与C_2之间的距离**，指的是所有由属于C_1的点P_1及属于C_2的点P_2所决定的距离P_1P_2的下确界．两个没有公共元素的闭集，只要其中有一个是有界的，二者之间的距离就是一个正数．一个点集或一个由其它元素构成的集是**可数**的，意思是说，它的元素只有有限个或能与正整数的集合一一对应．

有限平面上的一条Jordan弧，是一条线段的一一连续映象，即可由

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{1}$$

表示的点的集合，其中$f_1(t)$与$f_2(t)$是t的连续函数，而且方程组(1)对于给定的x与y至多有一个解t．这条Jordan弧是**解析**的，意思是说，$f_1(t)$与$f_2(t)$对于$0\leqslant t\leqslant 1$是t的解析函数（见下文），而且$|f_1'|+|f_2'|\neq 0$．扩充平面上的一条Jordan弧，指的或者是有限平面上的一条Jordan弧，或者是有限平面上的一条Jordan弧在某一个映射$w=1/(z-\alpha)$下的象；扩充平面上解析的Jordan弧与有限平面上解析的Jordan弧之间也有类似的关系．如果一条Jordan弧AB与一个闭集C相交，则该弧上有从A算起属于C的第一个点及最后一个点．

一个点集C，如果它的任意两点可被仅由属于C的点组成的一