

根据教育部2002年新大纲新教材编写

黄冈

教练

双栏链接

轻松·易学·快捷

高一数学 试验修订本(上)

- 丛书主编：周益新
- 本册主编：傅荣强

 龙门书局



黄冈教练



双栏链接

高一数学

试验修订本(上)

- 主 编 傅荣强
 副主编 常 青 韩丽云
 翟凤霞 于长军

龍 門 書 局

2002

SHIYANG LIAN LIAN JI
992

版权所有 翻印必究

本书封面贴有科学出版社、龙门书局激光防伪标志，
凡无此标志者均为非法出版物。

举报电话：(010)64034160 13501151303(打假办)

邮购电话：(010)64000246



主 编 傅荣强

责任编辑 张启男 田 旭

龙 门 书 局 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

北京市东华印刷厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2002年6月第 一 版 开本：890×1240 A5

2002年6月第 一 次 印 刷 印张：7 1/2

印数：1-80 000 字数：250 000

ISBN 7-80160-473-3/G·463

定 价：9.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

阅读指导

怎样才能最短的时间内掌握全部知识点?

怎样才能对解题规律了如指掌?

怎样才能轻松自如地考取高分?

怎样才能梦想成真,圆梦北大清华?

好的方法是开启成功大门的钥匙。《黄冈教练 双栏链接》所倡导的学习方法和技巧将给你带来前所未有的体验:

1. 方法求解——无限风光在险中

知识点	题型	解题规律
(一) 概念	1 判断对象 a_1, a_2, \dots, a_n 能否构成集合	判定对象 a_1, a_2, \dots, a_n 确定或不确定的客观标准: 存在,能;不存在,否.
	2 判断对象 a 是否是集合 A 的元素	若对象 a 是集合 A 的元素,则 $a \in A$; 否则 $a \notin A$.
	3 已知集合 $\{f_i(a), f_1(a), \dots, f_n(a)\}$, 求 a 的取值范围.	$\{a \mid f_i(a) \neq f_j(a)\}$ 其中 $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$

学习方法 解题规律
一目了然 轻松记忆

2. 双栏链接——教、学、练、考,一一对应

双栏链接是指左右双栏中的内容一一对应,互通互动。

知识要点	典型例题
<p>(二) 并集</p> <p>1. 已知集合 A 和 B, 求 $A \cup B$</p> <p>【知识要点】 $A \cup B$ 的含义为: 对于两个非空集合 $A, B, A \cup B = \{x \mid x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$</p>	<p>【例3】已知 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = N^*$, 求 $A \cup B$.</p> <p>【解析】由于集合 A 中的元素都属于集合 B, 即 $A \subseteq B$, 且 $B = N^*$, 所以, $A \cup B = N^*$.</p> <p>【方法技巧】本例中, 由 $A \subseteq B$ 我们得到了 $A \cup B = B$ 这并不是偶然的巧合, 而是一种必然的结果. 一般地, 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = B$.</p>

链接一: 知识要点与典型例题

一一对应, 相互链接

左栏是知识点, 右栏是配套的典型例题, 即:

知识点与例题——链接

1. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{C \mid C \subseteq A\}$, 求 B
2. 如果集合 A 满足 $\{1\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3\}$, 写出集合 A 的所有可能的情形
3. 给出下列四个结论:
- ①空集没有子集; ②空集是任何一个集合的真子集;
③空集不是集合 $\{0\}$ 的子集; ④任意一个集合必有两个或两个以上的子集. 其中正确结论的个数为 ()
- A. 0 个 B. 1 个
C. 2 个 D. 3 个

①空集是任何集合的子集, 即 $\{0\} \subseteq A$ 是 B 的元素; ② $\{0\}$ 是 A 的子集.

链接二: 同步练习与思维点拨
一一对应, 相互链接
左栏是课堂练习, 右栏是这道题的解题提示或思维点拨

【例 9】写出下面“ p 或 q ”, “ p 且 q ”, “非 p ”, “非 q ”形成的复合命题, 并判断其真假.

其中, p : 7 是 21 的约数; q : 7 是 26 的约数.

【解析】(1) p 或 q : 7 是 21 的约数或是 26 的约数; (真)

(2) p 且 q : 7 是 21 的约数且是 26 的约数; (假)

(3) 非 p : 7 不是 21 的约数; (假)

11. 判断下列命题的真假:

(1) 3 既是 7 的约数又是 9 的约数;

(2) 若 $ab = 0$, 则 $a = 0$, 且 $b = 0$;

(3) 若 $xy \neq 0$, 则 $x \neq 0$, 且 $y \neq 0$;

(4) 若 $x^2 = 4$, 则 $x = 2$, 且 $x = -2$;

(5) 方程 $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ 的判别式大于或等于零;

(6) 若 $(x-n)(y-u) < 0$, 则 x , y 中有一个大于 n , 且另一个小于 n .

链接三: 典型题与同题型一一对应, 相互链接

左栏是具有 一定难度的典型题, 右栏是同种题型的练习题或者中考题

3. 圆梦北大清华, 路在《黄冈教材 双栏链接》

【例 3】(2000 年全国高考题)

(1) 已知数列 $\{c_n\}$, 其中 $c_1 = 2^{n+3}$, 且数列 $\{c_{n+1} - c_n\}$ 为等比数列, 求常数 p

(2) 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是公比不相等的两个等比数列, $c_n = a_n + b_n$, 证明数列 $\{c_n\}$ 不是等比数列

【解析】(1) 因为 $\{c_{n+1} - c_n\}$ 是等比数列, 则

10. (2000 年全国高考题)

$\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列, 且 $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1} - a_n = 0 (n \in \mathbb{N}^+)$, 则它的通项公式是 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$

11. (1996 年全国高考题)

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项的和为 30, 前 $2m$ 项的和为 100, 则它的前 $3m$ 项的和为 ()

- A. 130 B. 170
C. 210 D. 260

第一次将 3+X 考试的综合性特点融会到每一年级、每一学科。

正所谓——
3+X, 从初中开始



编委会

黄冈教练 双栏链接

总策划：龙门书局


主 编：周益新

编 委：周益新 龚霞玲 傅荣强

刘道芬 胡国华 汪芳慧

南秀全 钱国芳 商瑞国

执行编委：张启男 田 旭



目录



第 1 章

集合与简易逻辑

- ▶ 1.1 集合 (2)
- ▶ 1.2 子集、全集、补集 (12)
- ▶ 1.3 交集、并集 (19)
- ▶ 1.4 含绝对值的不等式解法 (29)
- ▶ 1.5 一元二次不等式解法 (38)
- ▶ 1.6 逻辑联结词 (48)
- ▶ 1.7 四种命题 (55)
- ▶ 1.8 充分条件与必要条件 (63)
- ▶ 本章综合创新复习及研究性学习 (71)

第 2 章

函 数

- ▶ 2.1 映射 (79)
- ▶ 2.2 函数 (87)
- ▶ 2.3 函数的单调性和奇偶性 (100)
- ▶ 2.4 反函数 (109)
- ▶ 2.5 指数 (116)
- ▶ 2.6 指数函数 (121)
- ▶ 2.7 对数 (131)
- ▶ 2.8 对数函数 (138)
- ▶ 2.9 函数的应用举例 (149)
- ▶ 2.10 实习作业 (155)
- ▶ 本章综合创新复习及研究性学习 (160)

第 3 章

数 列

- ▶ 3.1 数列 (166)

▶	3.2	等差数列	(178)
▶	3.3	等差数列的前 n 项和	(189)
▶	3.4	等比数列	(199)
▶	3.5	等比数列的前 n 项和	(210)
▶	3.6	研究性课题:分期付款中的有关计算	(221)
▶		本章综合创新复习及研究性学习	(225)



第 1 章

集合与简易逻辑

新学 书源工匠松社合十知正了以数外最要理技世代



简单命题;逻辑联结词“或,且,非”;复合命题;复合命题的真假的判断;四种命题;四种命题的相互关系;充要条件.

1.1

集 合



知识提炼 方法表解

黄冈
教
练
双
栏
链
接

知识点	题型	解题规律
(一) 概念	1 判断对象 a_1, a_2, \dots, a_n 能否构成集合	鉴定对象 a_1, a_2, \dots, a_n 确定或不确定的客观标准: 存在,能;不存在,否.
	2 判断对象 a 是否是集合 A 的元素	若对象 a 是集合 A 的元素,则 $a \in A$; 否则 $a \notin A$.
	3 已知集合 $\{f_1(a), f_2(a), \dots, f_n(a)\}$, 求 a 的取值范围.	$\{a \mid f_i(a) \neq f_j(a)\}$. 其中 $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$.
(二) 表示方法	1 写出由对象 a_1, a_2, \dots, a_n 构成的集合	$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
	2 写出适合条件 $p(x)$ 的对象 x 构成的集合	$\{x \mid p(x)\}$
	3 在数轴上表示集合 $A = \{x \mid a \leq x \leq b\}; B = \{x \mid x < c, \text{ 或 } x > d, c < d\}$.	
	4 写出集合 $\{x \mid p(x), x \in A\}$ 的所有元素. 其中, A 是 $\mathbf{N}, \mathbf{N}^*, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 之一.	首先写出适合条件式 $p(x)$ 的集合, 然后在其中找出 $x \in A$ 的 x .

知识点	题型	解题规律
(三) 分类	判断集合 A 是有限集还是无限集	用 $\text{card}(A)$ 表示集合 A 的元素个数. $\text{card}(A)$ 有限或无限时, 集合 A 分别是有限集或无限集.
(四) 空集	1 用 \emptyset 表示数学问题的解	数学问题的解需要用集合表示时, 若其解是空集, 则统一用 \emptyset 来表示.
	2 用文字语言、符号语言、图形语言表示空集 \emptyset .	三种语言表述的对象是确定的, 但是它们又不存在的.
	3 已知集合 $\{x f(a) \leq x \leq g(a)\}$ 是空集 \emptyset , 求 a 的取值范围.	$ a f(a) > g(a) $



重难点突破 对号入座

要点聚焦

(一) 概念

1. 判断对象 a_1, a_2, \dots, a_n 能否构成集合

【知识要点】

判断一组对象能否构成一个集合, 关键要看是否有一个明确的客观标准来鉴定这些对象能否确定下来. “存在”或“不存在”都属于能确定的范畴. 如: 所有比较小的

典例精析

【例 1】 下面各组对象能否构成集合:

- (1) 所有漂亮的人;
- (2) 所有大于 0 的负数;
- (3) 不大于 3, 不小于 0 的所有整数;
- (4) 所有正偶数.

【解析】 (1) 所有漂亮的人不能构成集合. 这是因为找不到鉴定人的漂亮与否的客观标准, 对集合而言, “漂亮的人”这样的对象存在或不存在是无法鉴定的, 也即不确定.

(2) 所有大于 0 的负数能构成集合, 它是空集.



数,比5大的几个数,小一点的三角形等都不能构成一个集合.原因是以上这些对象均为不可确定的.

总之,鉴定对象 a_1, a_2, \dots, a_n 确定或不确定的客观标准:

存在,这些对象就能构成集合;不存在,这些对象就不能构成集合.

2. 判断对象 a 是否是集合 A 的元素

【知识要点】

若对象 a 是集合 A 的元素,则 $a \in A$; 否则 $a \notin A$.

3. 已知集合 $\{f_1(a), f_2(a), \dots, f_n(a)\}$, 求 a 的取值范围

【知识要点】

一个集合中不会出现两个相同的元素,这就是所谓集合的元素的互异性.

(二) 表示方法

1. 写出由对象 a_1, a_2, \dots, a_n 构成的集合

【知识要点】

将 a_1, a_2, \dots, a_n 一一列举出来,写在大括号内(列举法).

这是因为大于0的客观标准是存在的,即一切正数都大于0,而大于0的负数是不存在的.所以说所有大于0的负数能构成集合,它是空集,用符号 \emptyset 来表示.

(3) 不大于3,不小于0的所有实数 x 满足

$$0 \leq x \leq 3.$$

其中的整数是0,1,2,3.

所以,不大于3,不小于0的所有整数能构成集合,即 $\{0,1,2,3\}$.

(4) 所有正偶数能构成集合,这个集合是

$$\{n \mid n = 2m, m \in \mathbf{N}^*\}.$$

【例2】判断对象 $2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}$ 是否是集合 $A = \{x \mid x > 4\}$ 的元素.

【解析】由 $2\sqrt{3} = \sqrt{12} < \sqrt{16} = 4, 3\sqrt{2} = \sqrt{18} > \sqrt{16} = 4$, 得

$$2\sqrt{3} \notin A, 3\sqrt{2} \in A.$$

【例3】设集合 $A = \{k^2 - k, 2k\}$, 求实数 k 的取值范围.

【解析】根据集合的元素的互异性,得

$$k^2 - k \neq 2k.$$

解得 $k \neq 0, k \neq 3$.

所以,实数 k 的取值范围是

$$\{k \mid k \in \mathbf{R}, \text{且 } k \neq 0, k \neq 3\}.$$

【例4】写出由方程 $x^2 - x - 4 = 0$ 的根构成的集合.

【解析】方程 $x^2 - x - 4 = 0$ 的根是

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

所以,所求的集合为 $\left\{ \frac{1 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right\}$.



2. 写出适合条件 $p(x)$ 的对象 x 构成的集合

【知识要点】

描述法:

$$\{x | p(x)\}.$$

3. 在数轴上表示集合 $A = \{x | a \leq x \leq b\}$;

$B = \{x | x < c, \text{ 或 } x > d, c < d\}$

【知识要点】

在数轴上表示集合, 要注意端点的值是否在集合内. 在, 实心点; 不在, 空心点. 而端点的值在不在集合内, 又要看“ \leq, \geq ”中的“ $=$ ”成立与否.

4. 写出集合 $\{x | p(x), x \in A\}$ 的所有元素, 其中 A 是 $\mathbf{N}, \mathbf{N}^*, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 之一

【知识要点】

在给定的集合中, 先写出适合条件式 $p(x)$ 的集合, 然后再在这样的集合中, 找出 $x \in A$ 的所有 x . 如, 本例中, $(2x-1)(x+2)(x^2+1)=0$ 的根有两个: $\frac{1}{2}, -2$; 但 $\frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}$, 所以结果只有 -2 .

其实, $\{x | p(x), x \in A\}$ 中的 x 受到两个条件的

【例 5】 写出所有奇数构成的集合.

【解析】 \because 奇数都可表成 $2n-1 (n \in \mathbf{Z})$ 的形式,

\therefore 所求的集合为 $\{x | x = 2n-1, n \in \mathbf{Z}\}$.

【方法技巧】 偶数都可表成 $2n (n \in \mathbf{Z})$ 的形式.

【例 6】 在数轴上表示下列集合:

(1) $\{x | 2 \leq x \leq 5\}$;

(2) $\{x | x < -2, \text{ 或 } x > 3\}$.

【解析】 (1) 在数轴上表示集合 $\{x | 2 \leq x \leq 5\}$, 如图 1-1-1 所示.

(2) 在数轴上表示集合 $\{x | x < -2, \text{ 或 } x > 3\}$, 如图 1-1-2 所示.

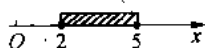


图 1-1-1

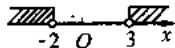


图 1-1-2

【例 7】 写出下列集合中的所有元素:

(1) $A = \{x | (2x-1)(x+2)(x^2+1)=0, \text{ 且 } x \in \mathbf{Z}\}$;

(2) $B = \{(x, y) | x+y=6, \text{ 且 } x \in \mathbf{N}^*, y \in \mathbf{N}^*\}$;

(3) $C = \{x | x = \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b}, \text{ 且 } a, b \in \mathbf{R}\}$.

【解析】 (1) $\because x \in \mathbf{Z}$,

\therefore 方程 $(2x-1)(x+2)(x^2+1)=0$ 的根为 $x = -2$.

$\therefore A$ 中只有一个元素 -2 .

(2) $(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$.

(3) 将 $x = \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b}$ 化简: 当 $a > 0, b > 0$ 时, $x = 2$; 当 $a < 0, b < 0$ 时, $x = -2$; 当 a, b 异号时, $x = 0$.

$\therefore C$ 中的所有元素为 $2, -2, 0$.



限制,首先是 $p(x)$, 然后是 $x \in A$.

(三) 分类

判断集合 A 是有限集还是无限集

【知识要点】

集合 A 中元素的个数 $\text{card}(A)$ 是有限的, A 称为有限集; 否则, A 称为无限集.

如, 本例中方程 $0 \cdot x + 0 = 0$ 的解集就是无限集 \mathbf{R} .

(四) 空集

1. 用 \emptyset 表示数学问题的解

【知识要点】

空集在解数学问题时占有很重要的地位, 并有它自己专用的符号 \emptyset . 今后凡是方程、不等式乃至其他数学问题的解是空集时, 统一用 \emptyset 表示.

2. 用文字语言、符号语言、图形语言表示空集

【知识要点】

本例是从三个角度去认识空集 \emptyset , 虽然 \emptyset 中一个元素也没有, 但它毕竟是客观存在的, 表现形式更是多种多样的. 以后你会陆续地了解到用 \emptyset 表述数学问题的内涵的优

【评析】解第(2)小题时, 可令 $x=1, 2, 3, 4, 5$; 然后依 $x+y=6$ 可计算出 $y=5, 4, 3, 2, 1$.

【例 8】已知方程 $ax+b=0$. 当 a, b 满足什么条件时, 方程的解集是有限集; 当 a, b 满足什么条件时, 方程的解集是无限集?

【解析】

当 $a \neq 0$ 时, 方程 $ax+b=0$ 的解集为 $A = \{x \mid x = -\frac{b}{a}\}$. 此时 $\text{card}(A) = 1$, 方程的解集是有限集.

当 $a=0$, 且 $b=0$ 时, 方程 $ax+b=0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 方程的解集是 \mathbf{R} , 它是无限集.

【例 9】讨论下列方程或不等式的解集:

- (1) 方程 $x+2=x+5$;
- (2) 不等式 $m < x < n$, 且 $m > n$;
- (3) 方程 $x^2+x+1=0$.

【解析】(1) 原方程化为 $2=5$, 这显然不成立, 所以原方程的解集为 \emptyset .

(2) 没有 x 满足题设的不等式, 所以原不等式的解集为 \emptyset .

(3) 原方程的根的判别式 $\Delta = -3 < 0$, 所以原方程的解集为 \emptyset .

【例 10】用文字语言、符号语言、图形语言分别表示空集.

【解析】文字语言: 不含任何元素的集合.

如: “大于零的负数”、“ $1+x^2=0$ 的实根”构成的集合都是空集.

符号语言: \emptyset .

如, $\{x \mid x > 0, \text{ 且 } x < 0\} = \emptyset$.

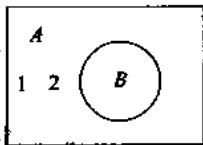


图 1-1-3



越性,有时没有它还真不行.

3. 已知集合 $\{x | f(a) \leq x \leq g(a)\}$ 是空集 \emptyset , 求 a 的取值范围

【知识要点】

设 a, b, x 是三个实数, 把 a, b, x 写在下面的不等式里面:

$$a \leq x \leq b.$$

(1) 要使得 x 存在, 必须且只需 $a \leq b$.

(2) 要使得 x 不存在, 必须且只需 $a > b$.

这些道理, 你不妨在数轴上表示 a, b, x 去试一试, a, b 可选为具体的数.

图形语言: 如图 1-1-3, B 为空集.

【例 11】若关于 x 的不等式 $2a - 1 \leq 2x \leq 5 - a$ 的解集为空集, 求实数 a 的取值范围.

【解析】不等式 $2a - 1 \leq 2x \leq 5 - a$ 等价于

$$a - \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} - \frac{a}{2}.$$

原不等式的解集为 \emptyset , 也即不等式

$$a - \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} - \frac{a}{2}$$

的解集为 \emptyset .

如果 $a - \frac{1}{2} \leq \frac{5}{2} - \frac{a}{2}$ 成立, 那么 x 是存在的.

所以, 必须且只需

$$a - \frac{1}{2} > \frac{5}{2} - \frac{a}{2},$$

解得 $a > 2$.

所以, 实数 a 的取值范围是 $\{a | a > 2\}$.



同步闯关 发散点拨

同步闯关

1. 用另一种方法表示下列集合:

- (1) $\{ \text{绝对值不大于 3 的整数} \}$;
- (2) $\{ \text{能被 3 整除, 且小于 10 的正数} \}$;
- (3) $\{ x | x = |x|, x < 5, \text{且 } x \in \mathbb{Z} \}$.

2. 已知集合 $A = \{ x | ax^2 + 2x + 1 = 0, \text{且 } a, x \in \mathbb{R} \}$.

- (1) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值, 并求出这个元素;
- (2) 若 A 中最多含有一个元素, 求 a 的取值范围.

3. 已知集合 $M = \{ x | x \leq \sqrt{12} \}$, $a = \sqrt{12}$, 则下列关系中正确的是 ()

- A. $a \in M$ B. $a \notin M$
C. $|a| \in M$ D. $|a| \notin M$

发散点拨

(1) 对方程的次数要讨论 ($a=0, a \neq 0$).

(2) A 可能含有一个元素, A 也可能为 \emptyset .

以上也就是说 (1)、(2) 都需要分类讨论.



4. 下列集合中,表示同一个集合的是 ()

- A. $M = \{(3,2)\}, N = \{(2,3)\}$
 B. $M = \{3,2\}, N = \{2,3\}$
 C. $M = \{(x,y) | x+y=1\}, N = \{y | x+y=1\}$
 D. $M = \{1,2\}, N = \{(1,2)\}$

5. 设 $M = \{1,2\}$,下面表示方法正确的是 ()

- A. $2 \notin M$ B. $1 \notin M$
 C. $1,2 \in M$ D. $1 \in M$, 或 $1 \notin M$

6. 用适当的符号填空:

- (1) $\sqrt{2}$ _____ \mathbf{Q} , $1 - \sqrt{2}$ _____ \mathbf{Q} ;
 (2) $\frac{1}{2}$ _____ \mathbf{N}^* , 0 _____ \mathbf{N}^* ;
 (3) 0 _____ \mathbf{Z} , $2 + \sqrt{3}$ _____ \mathbf{R} .

7. 设 $\frac{1}{2} \in \{x | x^2 - ax - \frac{5}{2} = 0\}$, 求集合 $\{x | x^2 - \frac{19}{2}x - a = 0\}$ 的所有元素的积.

8. 用列举法表示下列集合:

- (1) 12 的正约数的集合为 _____;
 (2) 20 以内的质数的集合为 _____;
 (3) $\{x | x^2 - 4 = 0\} =$ _____;
 (4) $\{x | x^4 - 1 = 0, x \in \mathbf{R}\} =$ _____.

9. 被 6 除余 1 的正整数的集合是 _____.

10. 用列举法把由“1,2,3”三个数字排成的无重复数字的三位数的集合表示出来.

你可以
先排 1 在百
位的情况:

2-3
1-3-2

次排 2
在百位的情
况:

1-3
2-3-1

后排 3 在
百位的情况:

1-2
3-2-1

本例虽
然很简单,
但它体现了
分类讨论思
想. 将来你
会明白的.
不会分类讨
论思想, 高
考过不了
关!



智能升级 潜能测试

智能升级

【例 12】 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | ax^2 - 3x + 2 = 0, a \in \mathbf{R}\}$.

- (1) 若 A 是空集, 求 a 的取值范围;
 (2) 若 A 中只有 1 个元素, 求 a 的值, 并

潜能测试

11. 设集合

$$A = \{-4, 2a-1, a^2\},$$

$$B = \{a-5, 1-a, 9\},$$

且 A 与 B 有且只有一个公



把这个元素写出来;

(3) 若 A 中最多含有 1 个元素, 求 a 的取值范围.

【解析】集合 A 是方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 在实数范围内的解集.

(1) A 是空集, 方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 无解.

由 $\Delta = (-3)^2 - 8a < 0 (a \neq 0)$, 得 $a > \frac{9}{8}$.

$\therefore a$ 的取值范围是 $\{a \mid a > \frac{9}{8}\}$.

(2) 当 $a = 0$ 时, 方程只有 1 个解为 $x = \frac{2}{3}$;

当 $a \neq 0$ 时, 由 $\Delta = (-3)^2 - 8a = 0$, 得 $a = \frac{9}{8}$. 这时方程有 2 个相等的实根 $x = \frac{4}{3}$.

\therefore 当集合 A 满足条件, 即 A 中只有 1 个元素时, $a = 0$, 或 $a = \frac{9}{8}$; 这时 A 中的元素是 $\frac{2}{3}$, 或 $\frac{4}{3}$.

(3) A 中最多含有一个元素, 包括 A 是空集和 A 中只有一个元素两种情形.

由(1),(2)的结果, 得

$$a = 0, \text{ 或 } a \geq \frac{9}{8}.$$

$\therefore a$ 的取值范围是 $\{a \mid a \geq \frac{9}{8}\} \cup \{0\}$.

【评析】本题考查了方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 的解的个数. 应注意以下两点:

①方程的外型是一元二次方程, 其实不全然. 当 x^2 项的系数 $a = 0$ 时, 方程是一元一次方程, 这点应特别注意.

②第(3)小题“ A 中最多含有 1 个元素”这句话含有两方面内容: 一是 A 为空集, 即方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 无解; 二是集合 A 只有一个元素, 即方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 只有一个实根; 应

共元素 9, 求 a 的值.

12. (1) 设 x, y 都是非零实数, 用列举法将 $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{xy}{|xy|}$ 可能取得的值组成的集合表示出来;

(2) 用列举法表示不超过 10 的非负偶数的集合, 并用另一种方法表示出来;

(3) 用描述法写出直角坐标平面内坐标轴上的点的集合.

(4) 把集合 $\{(x, y) \mid \begin{cases} x+2y=2002 \\ x+3y=2003 \end{cases}\}$ 用列举法表示出来.

13. 二次方程 $x^2 - 2(k+4)x + 2(k^2 - 2) = 0$ 的两个根都是正数, 求 k 的取值范围.

14. 设 P 表示平面内的点, A, B, O 分别是平面内的三个定点, 下列集合表示什么图形?

(1) $\{P \mid PA = PB\}$;

(2) $\{P \mid PO = 3\}$;

(3) $\{P \mid PA = PB = PO\}$

(认定此时 A, B, O 三点不共线).

15. 下面给出的五个集合是同一个集合吗? 分别指出每个集合是否为有限集. 若是有限集, 用列举法把它表示出来.

(1) $\{x \in \mathbb{N} \mid -1 \leq x \leq 10\}$;