

经济数学简明教程

倪训芳 谢建民 谢明文 编著



西南财经大学出版社

责任编辑：明安联

封面设计：潘令宇

经济数学简明教程

倪训芳 谢建民 谢明文编著

西南财经大学出版社出版 西南财经大学出版社发行
四川省新华书店经销 四川教育学院印刷厂印刷

787×1092毫米 1/32 印张：17.125 字数：374千字

1989年8月第一版 1989年8月第一次印刷

印数：1—11000册

书号：ISBN 7-51017-169-2/F·128

定价：5.80元

前 言

为了满足成人教育经济类专业教学需要,1987年春,我们根据经济类本科教学大纲和1986年全国自考指导委员会制定的成人自考试题范围,并结合成人教育的特点,编写了这本教材。在这次出版之前,本教材曾相继在四川省干部函授学院和西南财经大学专修科、夜大内部试用。

本书选材简明扼要,密切联系经济实际,在保持学科本身的系统性和逻辑性的前提下,力求深入浅出,通俗易懂。

本书由西南财经大学数学教研室倪训芳、谢建民、谢明文编写。第1、2、5章由倪训芳编写,第3、4章由谢建民编写;第6、7章由谢明文编写,由倪训芳同志主纂。这次出版前我们又分别校审了全书内容,最后讨论定稿。

本书适用于经济类各专业的函大、夜大、干部专修科和短训班的教学,对于拟参加经济类自学考试的学习员和大学本科生也有一定参考价值。书中每章列有习题,书末附有答案供读者参考。此外,我们还编写了《经济数学简明教程学习指导》与本书配套发行。

这本教材的出版,得到西南财经大学教务处、成人教育处、出版社和四川省干部函授学院教务处的大力支持,特别是李吉昌和廖才文二同志的大力协助和支持,在此一并表示最诚挚的谢意,同时向关心此教材的四川省干部函授学院的领导和师生们表示衷心感谢。

由于我们水平有限,编写这类教材的经验不多,书中肯定存在不少缺点和错误,恳请读者不吝赐教。

编 者

1988.12

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 一元函数及其图形.....	1
1-1-1 函数概念.....	1
1-1-2 函数的几种简单性质.....	17
1-1-3 初等函数.....	21
1-1-4 经济学中的几个常见函数与曲线.....	25
第二节 极限.....	32
1-2-1 极限概念.....	32
1-2-2 无穷小量与无穷大量.....	38
1-2-3 极限运算法则.....	41
1-2-4 极限存在准则·两个重要极限.....	46
第三节 连续.....	50
1-3-1 连续函数的概念.....	50
1-3-2 连续函数的性质.....	56
习题一.....	59
第二章 一元函数微分学	65
第一节 导数概念.....	65
2-1-1 导数概念引例.....	65
2-1-2 导数的定义.....	67
2-1-3 导数的几何意义.....	70
2-1-4 函数可导与连续的关系.....	72

第二节 求导方法	73
2-2-1 用导数的定义求导法	74
2-2-2 函数的和、差、积、商的求导法则	76
2-2-3 反函数的求导法则	80
2-2-4 复合函数的求导法则	81
2-2-5 求导公式和求导法则小结	83
2-2-6 隐函数及其求导法则	86
2-2-7 对数求导法	87
2-2-8 高阶导数及其求法	88
第三节 微分	90
2-3-1 微分概念	90
2-3-2 微分法则、微分形式不变性	94
第四节 导数的应用	97
2-4-1 中值定理	97
2-4-2 罗彼塔法则	100
2-4-3 函数的性态与作图	105
2-4-4 导数在经济分析中的应用	121
习题二	141
第三章 一元函数积分学	148
第一节 不定积分	148
3-1-1 原函数与不定积分的概念	148
3-1-2 换元积分法	153
3-1-3 分部积分法	160
第二节 定积分	163
3-2-1 定积分的概念	163
2	

3-2-2	定积分的性质	169
3-2-3	牛顿——莱布尼茨公式	172
3-2-4	定积分的换元积分法和分部积分法	175
3-2-5	广义积分	178
第三节	积分在经济分析中的应用	182
3-3-1	不定积分应用实例	182
3-3-2	定积分应用实例	184
习题三		190
第四章	线性代数初步	197
第一节	行列式	197
4-1-1	二阶行列式与三阶行列式	197
4-1-2	n 阶行列式	202
4-1-3	克莱姆法则	210
第二节	矩阵	214
4-2-1	矩阵的概念	214
4-2-2	矩阵的运算	220
4-2-3	矩阵的初等变换及其应用	236
第三节	向量简介	245
4-3-1	向量的概念与运算	245
4-3-2	向量组的线性相关性	250
4-3-3	向量组的极大无关组	256
第四节	线性方程组	263
4-4-1	一般线性方程组解的判定	264
4-4-2	齐次线性方程组的解法	271
4-4-3	非齐次线性方程组的解法	279

习题四	288
第五章 经济数学方法	303
第一节 投入产出分析	303
5-1-1 投入产出表	303
5-1-2 直接消耗系数与完全消耗系数	307
5-1-3 投入产出数学模型	312
5-1-4 平衡方程组的解	316
5-1-5 投入产出分析方法的简单应用	320
第二节 线性规划	326
5-2-1 线性规划问题及其数学模型	326
5-2-2 线性规划的图解法	333
5-2-3 线性规划的单纯形方法	341
习题五	365
第六章 概率论初步	374
第一节 随机事件及其概率	375
6-1-1 随机事件与样本空间	375
6-1-2 事件的概率	381
6-1-3 条件概率及其应用	388
6-1-4 独立试验序列概型	399
第二节 随机变量及其分布	402
6-2-1 随机变量及其分布函数	402
6-2-2 离散型随机变量及其分布	404
6-2-3 连续型随机变量及其分布	413
第三节 随机变量的数字特征	423

6-3-1	数学期望	424
6-3-2	方差	432
第四节	大数定律与中心极限定理	437
6-4-1	大数定律	438
6-4-2	中心极限定理	441
	习题六	445
第七章	数理统计初步	453
第一节	样本分布	453
7-1-1	总体与样本	453
7-1-2	统计量及其分布	456
第二节	参数估计	462
7-2-1	评价估计量优劣的标准	462
7-2-2	点估计	464
7-2-3	区间估计	465
第三节	假设检验	471
7-3-1	假设检验的基本思想	472
7-3-2	假设检验的方法	473
第四节	线性回归及其应用	480
7-4-1	一元线性回归方程的建立	481
7-4-2	相关程度的检验	486
7-4-3	线性回归分析的应用	489
	习题七	495
	附表(一) 泊松分布数值表	500
	附表(二) 标准正态分布函数表	503
	附表(三) χ^2 分布的上侧临界表	505

附表(四) t 分布双侧临界值表.....	507
附表(五) 检验相关系数的临界值表.....	509
习题参考答案.....	514
习题一.....	510
习题二.....	511
习题三.....	514
习题四.....	518
习题五.....	524
习题六.....	528
习题七.....	531

第一章 函数与极限

函数是微积分学研究的基本对象，是现实世界中变量之间相互依赖关系的抽象。极限方法是对函数进行全面研究的主要方法。本章分三节介绍函数、函数的极限、函数的连续性等基本概念、有关性质及运算法则。

第一节 一元函数及其图形

1—1—1 函数概念

1. 常量与变量

在观察与研究自然现象、社会经济现象或技术过程时，常常遇到各种不同的量，归纳起来，可分两种类型：

1° 一些量在研究问题的过程中不变化，通常称这些量为常量（或常数）。为方便计算，把在所有问题中都具有相同的值的常量称为绝对常量或数值常量；而把在某个问题中具有相同的值、但在不同的问题中可以取不同的值的常量称为任意常数或参数常量（或参数）。

2° 一些量在研究问题的过程中起变化，即取各种不同的数值，通常称这些量为变量（或变数）。

例如，飞机在两地之间飞行过程中，飞机距地面的高度，距两地之间的距离以及汽油的储存量均是变量；乘客的

人数，行李包裹的重量则是常量。又如一段时间范围内，某商品的销售数量是变量，销售单价则是常量。

再如在直线方程 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 中：1是绝对常数， a 、 b 是参数常数， x 、 y 是变量。

必须注意：常量与变量的概念要依赖于研究问题的场合，同一个量在某种情况下可以看作是常量，而在另外的情况下，又可以看作是变量。例如，重力加速度 g ，在一般物理问题的讨论中，人们往往把它当作常量（980厘米/秒²），而实际上在地球上各地测得的 g 值未尽相同， g 又是变量。在纯数学中，变量一般记为 x ， y ， z ，……；常量一般记为 a ， b ， c ……。在应用数学中则往往违背这条常规，经常用变量名称的第一个字母代表该变量。例如在经济学中 p 代表价格（price）、 c 代表成本（cost）……。量 x 的每一个值都是一个数，因此可以用数轴上的一个点来代表，如果量 x 是常量，常用数轴上的一个定点表示；如果量 x 是变量，常用数轴上的动点来表示。

2. 区间

在具体问题中，变量的取值往往有一定的范围限制，如果超出这个范围，就会使研究的问题没有意义。例如某地某日地面最低温度是5°C、最高温度是14°C，那么，该地该日的地面气温 t 就是一个变量，且 t 的取值范围是5至14。

变量的取值范围就是变量的变化范围，通常用区间表示。区间的定义如下：

定义1 介于两个实数之间的全体实数叫做区间，此二

实数叫做区间的端点。

设 a, b 是相异二实数，且 $a < b$ ，通常我们把满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的一切实数 x 的集合叫做闭区间，用记号 $[a, b]$ 表示，即

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\};$$

满足不等式 $a < x < b$ 的一切实数 x 的集合叫做开区间，用记号 (a, b) 表示，即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\};$$

满足不等式 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 的一切实数 x 的集合叫做半开（半闭）区间，用记号 $[a, b)$ 或 $(a, b]$ 表示，即

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}, (a, b] = \{x | a < x \leq b\}$$

区间 $[a, b]$ 、 (a, b) 、 $[a, b)$ 、 $(a, b]$ 的几何意义是数轴上以 a, b 为端点（闭则包含端点，开则不包含端点）的线段上点的全体。两端点之间的距离 $b - a$ 叫做区间长，如图1—1所示。

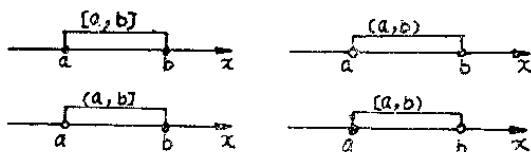


图1—1

以后在不需要辩明所论区间是否包含端点的场合，我们就简单说“区间”，且用“圆括弧”表示。

以上 a, b 均为有限区间。此外还有无限区间：

全体实数的集合 $(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}$ ；

不小于 a 的全体实数的集合 $[a, +\infty) = \{x | a \leq x\}$ ；

大于 a 的全体实数的集合 $(a, +\infty) = \{x | a < x\}$;
 不大于 b 的全体实数的集合 $(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$;
 小于 b 的全体实数的集合 $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$.
 其几何表示如图1—2所示.

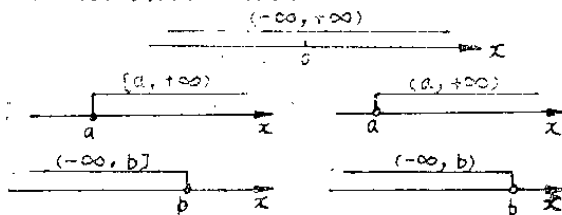


图1—2

记号“ $-\infty$ ”和“ $+\infty$ ”分别读作“负无穷大”与“正无穷大”，应当注意，它们都不是具体的数，仅仅是用以说明区间的一端或两端无限制的记号。

以后，我们还要用到与区间有关的邻域概念。

设 x_0 、 δ 为两个实数，且 $\delta > 0$ ，我们把满足不等式

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad \text{即} \quad |x - x_0| < \delta$$

的一切实数 x 的全体称为点 x_0 的 δ 邻域。它是以点 x_0 为中心， δ 为半径的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ，如图1—3所示。

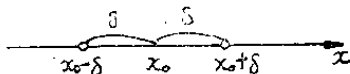


图1—3

3. 函数的概念

在某个自然现象或经济技术过程中，不仅可能有几个量

同时变化着，而且这几个变量有可能不是孤立的，而是相互联系、相互依赖地遵循一定的规律变化着。如

例1 球的半径 r 与该球的体积 v 互相联系着，其关系为

$$v = \frac{4}{3} \pi r^3, \quad \text{其中 } 0 < r < +\infty,$$

当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式就可以确定球体积的对应数值。

例2 某商品的销售单价为 a （元），则销售数量 x 与销售收入 R （元）互相联系，其关系为

$$R = ax, \quad \text{其中 } x = 1, 2, 3, \dots.$$

当销售数量 x 在自然数集 $1, 2, 3, \dots$ 中任意取定一个数值时，由上式就可以确定销售收入 R 的对应数值。这里 a 是正参数常数。

例3 某气象站用自动温度记录仪记下一昼夜气温的变化情况，图1—4是温度记录仪在坐标纸上画出的温度变化曲线图，（其中横坐标是时间 t ，纵坐标是温度 T ），它形象地表示出温度 T 随时间变化而变化的规律：对于某一确定的 t （ $0 \leq t \leq 24$ ），就有一个确定的 T

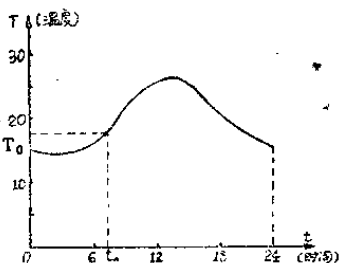


图1-4

值与它对应，例如，当 $t = t_0$ 时，有 $T = T_0$ 。

曲线反映了温度 T 与时间 t 两个变量之间的相互关系。

例4 某城市百货批发总站记录了该城市毛线历年的月

销售量(单位:百斤),并将近10年来的平均月销售量列成下表:

月 份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平 均 月 销 售 量 S	81	84	45	48	9	5	6	17	94	161	144	123

该表表示了某城市毛线的销售量 S 与月份 t 间的相互联系, t 的取值只能是1、2、3、 $\cdots$ 、12,而且当月份 t 在1、2、3、 $\cdots$ 、12中任意取定一个数值时,从表中便可以确定一个平均月销售量 S 的对应数值。

上面几个例题,虽然具体的实际意义不同,但它们具有如下共同特征,即:抛开各例中所表示的具体内容,我们看到,它们都表达了两个变量之间的相互依赖关系,这种相依关系给出了一种对应法则,根据这一法则,当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时,另一个变量总有一个确定的值与它对应,两个变量之间的这种对应关系我们称它为函数关系,微积分学的主要任务之一,就是揭示变量之间的联系和规律。下面我们给出函数定义。

定义 2 设有两个变量 x 和 y ,如果对于变量 x 在其变化范围内的每一个确定的值,变量 y 按照某对应法则总有唯一确定的值与它对应,则称变量 y 是变量 x 的函数,并记作 $y=f(x)$ 。其中:

x 称为自变量, y 也称为因变量;

x 的取值范围称为函数的定义域,常记作 D ,一般用区间表示。

$f(x)$ 中的“ f ”^①反映因变量 y 与自变量 x 的对应法则。

对自变量 x 在函数定义域 D 内取定的某个数值 x_0 ，按对应法则 $f(\quad)$ 确定的因变量值，称为 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ 。

当 x 取遍 D 中的每一个值时，对应的全体函数值构成的集合，称为函数的值域，常记作 E 。一般也用区间表示。

利用函数概念，可以说：例1中，球体积 v 是球半径 r 的函数，并可记作 $v=f(r)$ ；例2中，商品的销售收入 R 是销售数量 x 的函数，并可记作 $R=R(x)$ ；例3中，气温 T 是时间 t 的函数，并可记为 $T=T(t)$ ；例4中，毛线的月平均销售量 S 是月份 t 的函数，并可记作 $S=S(t)$ 。

从函数的定义可见，两个变量间的函数关系由两个要素决定：一是自变量的取值范围，即函数的定义域 D ；一是变量之间的对应法则。这两者确定了，值域 E 也就随之确定。

关于函数定义域 D 的确定，一般原则如下：

对于反映实际问题的函数关系，函数的定义域由所研究问题的实际意义确定。如例1的定义域是 $(0, +\infty)$ ；例2的定义域是自然数集；例3的定义域是 $[0, 24]$ ；例4是定义域是 $t=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ 。

在数学的一般研究中，函数的定义域，一般由表达这个函数关系的式子（或其他表达形式）确定，函数 $y=f(x)$ 的定义域规定为使函数表达式保持有意义的一切 x 的值。

①对应法则有时也用“ φ ”、“ g ”、“ F ”……表示，相应地，函数记作 $\varphi(x)$ 、 $g(x)$ 、 $F(x)$ 。有时为了简化符号，还常常将函数关系记作 $y=y(x)$ 。

例5 求下列函数的定义域:

$$(1) y = x^2 \qquad (2) y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$(3) y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \qquad (4) y = \lg(9 - 3x)$$

$$(5) y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \lg(9 - 3x).$$

解 (1) 不论 x 取什么值时, 都可以由关系式 $y = x^2$ 确定出对应值 y , 所以函数 $y = x^2$ 的定义域 $D_1 = (-\infty, +\infty)$.

(2) 因 $x^2 - 1 \neq 0$ 即 $x \neq \pm 1$ 时函数才有意义(零不能作除数). 所以函数 $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ 的定义域是除去 $x = \pm 1$ 的一切实数. 即 $D_2 = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(3) 因 $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ 时, 即 $x \leq 1$ 或 $x \geq 2$ 时, 函数才有意义(负数不能开偶次方根), 所以函数 $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ 的定义域 $D_3 = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

(4) 因 $9 - 3x > 0$, 即 $x < 3$ 时函数才有意义(负数和零无对数), 所以函数 $y = \lg(9 - 3x)$ 的定义域 $D_4 = (-\infty, 3)$.

(5) 因 y 的表达式由两项组成, 所以, 其定义域应是各项定义域的交集.

由(3)知, 前一项的定义域 $D_3 = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$; 由(4)知, 后一项的定义域 $D_4 = (-\infty, 3)$. 故函数 $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \lg(9 - 3x)$ 的定义域 $D_5 = D_3 \cap D_4 = (-\infty, 1] \cup [2, 3)$.

关于函数值及函数值域 E 的确定, 下面举例说明.

例6 求函数 $y = \frac{1}{1 + x^2}$ 在 $x = 2$ 时的函数值.

解 由函数定义得: $y|_{x=2} = \frac{1}{1 + (2)^2} = \frac{1}{5}$