经济数学简明教程

倪训芳 谢建民 谢明文 编著

西 南 财 经 大 学 出 版 社

责任编辑：明安联
封面设计：潘今宇

经济数学简明教程

倪训芳　谢建民　谢明文编著

西南财经大学出版社出版　西南财经大学出版社发行
四川省新华书店经销　四川教育学院印刷厂印刷

787×1092毫米 1/32 印张：17.125 字数：374千字
1989年8月第一版　1989年8月第一次印刷
印数：1—11000册

书号：ISBN 7—81017—168—2/F·128

定价：5.80元

前　言

为了满足成人教育经济类专业的教学需要，1987年春，我们根据经济类本科教学大纲和1986年全国自考指导委员会制定的成人自考命题范围，并结合成人教育的特点，编写了这本教材。在这次出版之前，本教材曾相继在四川省干部函授学院和西南财经大学专修科、夜大内部试用。

本书选材简明扼要，密切联系经济实际，在保持学科本身的系统性和逻辑性的前提下，力求深入浅出，通俗易懂。

本书由西南财经大学数学教研室倪训芳、谢建民、谢明文编写。第1、2、5章由倪训芳编写，第3、4章由谢建民编写；第6、7章由谢明文编写，由倪训芳同志主纂。这次出版前我们又分别校审了全书内容，最后讨论定稿。

本书适用于经济类各专业的函大、夜大、干部专修科和短训班的教学，对于拟参加经济类自学考试的学员和大学本科生也有一定参考价值。书中每章列有习题，书末附有答案供读者参考。此外，我们还编写了《经济数学简明教程学习指导》与本书配套发行。

这本教材的出版，得到西南财经大学教务处、成人教育处、出版社和四川省干部函授学院教务处的大力支持，特别是李吉昌和廖才文二同志的大力协助和支持，在此一并表示最诚挚的谢意，同时向关心此教材的四川省干部函授学院的领导和师生们表示衷心感谢。

由于我们水平有限，编写这类教材的经验不多，书中肯定存在不少缺点和错误，恳请读者不吝赐教。

编　者

1988.12

目　录

第一章　函数与极限

函数是微积分学研究的基本对象，是现实世界中变量之间相互依赖关系的抽象。极限方法是对函数进行全面研究的主要方法。本章分三节介绍函数、函数的极限、函数的连续性等基本概念、有关性质及运算法则。

第一节　一元函数及其图形

1—1—1　函数概念

1．常量与变量

在观察与研究自然现象、社会经济现象或技术过程时，常常遇到各种不同的量，归纳起来，可分两种类型：

1° 一些量在研究问题的过程中不变化，通常称这些量为常量（或常数）。为方便计算，把在所有问题中都具有相同的值的常量称为绝对常量或数值常量；而把在某个问题中具有相同的值、但在不同的问题中可以取不同的值的常量称为任意常数或参数常量（或参数）。

2° 一些量在研究问题的过程中起变化，即取各种不同的数值，通常称这些量为变量（或变数）。

例如，飞机在两地之间飞行过程中，飞机距地面的高度，距两地之间的距离以及汽油的储存量均是变量；乘客的

人数，行李包裹的重量则是常量。又如一段时间范围内，某商品的销售数量是变量，销售单价则是常量。

再如在直线方程$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$中：1是绝对常数，$a$、$b$是参数常数，$x$、$y$是变量。

必须注意：常量与变量的概念要依赖于研究问题的场合，同一个量在某种情况下可以看作是常量，而在另外的情况下，又可以看作是变量。例如，重力加速度g，在一般物理问题的讨论中，人们往往把它当作常量（980厘米/秒^2），而实际上在地球上各地测得的g值未尽相同，g又是变量。在纯数学中，变量一般记为x，y，z，……；常量一般记为a，b、c……。在应用数学中则往往违背这条常规，经常用变量名称的第一个字母代表该变量。例如在经济学中p代表价格（price）、c代表成本（cost）……。量x的每一个值都是一个数，因此可以用数轴上的一个点来代表，如果量x是常量，常用数轴上的一个定点表示；如果量x是变量，常用数轴上的动点来表示。

2．区间

在具体问题中，变量的取值往往有一定的范围限制，如果超出这个范围，就会使研究的问题没有意义。例如某地某日地面最低温度是5°C、最高温度是14°C，那么，该地该日的地面气温t就是一个变量，且t的取值范围是5至14。

变量的取值范围就是变量的变化范围，通常用区间表示。区间的定义如下：

定义1 介于两个实数之间的全体实数叫做区间，此二

实数叫做区间的端点。

设a，b是相异二实数，且$a<b$，通常我们把满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的一切实数x的集合叫做闭区间，用记号$[a, b]$表示。即

$$[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\};$$

满足不等式$a<x<b$的一切实数x的集合叫做开区间，用记号(a, b)表示。即

$$(a, b)=\{x|a<x<b\};$$

满足不等式$a\leqslant x<b$或$a<x\leqslant b$的一切实数x的集合叫做半开（半闭）区间，用记号$[a, b)$或$(a, b]$表示。即

$$[a, b)=\{x|a\leqslant x<b\}, (a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}$$

区间$[a, b]$、(a, b)、$[a, b)$、$(a, b]$的几何意义是数轴上以a、b为端点（闭则包含端点，开则不包含端点）的线段上点的全体。两端点之间的距离$b-a$叫做区间长，如图1—1所示。

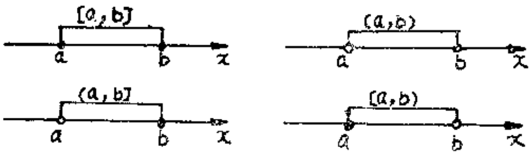

图1—1

以后在不需要辩明所论区间是否包含端点的场合，我们就简单说"区间"，且用"圆括弧"表示。

以上a、b均为有限区间。此外还有无限区间：

全体实数的集合$(-\infty, +\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$；

不小于a的全体实数的集合$[a, +\infty)=\{x|a\leqslant x\}$；

大于a的全体实数的集合$(a,\ +\infty)=\{x|a<x\}$；

不大于b的全体实数的集合$(-\infty,\ b]=\{x|x\leqslant b\}$；

小于b的全体实数的集合$(-\infty,\ b)=\{x|x<b\}$。

其几何表示如图1—2所示。

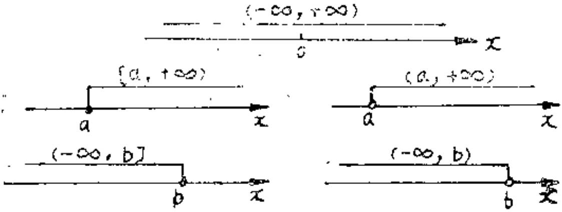

图1—2

记号“$-\infty$”和“$+\infty$”分别读作“负无穷大”与“正无穷大”，应当注意，它们都不是具体的数，仅仅是用以说明区间它一端或两端无限制的记号。

以后，我们还要用到与区间有关的邻域概念。

设x_0、δ为两个实数，且$\delta>0$，我们把满足不等式

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta \qquad \text{即}\ |x-x_0|<\delta$$

的一切实数x的全体称为点x_0的δ邻域。它是以点x_0为中心，δ为半径的开区间$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，如图1—3所示。

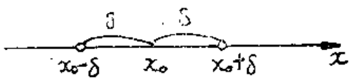

图1—3

3. 函数的概念

在某个自然现象或经济技术过程中，不仅可能有几个量

同时变化着，而且这几个变量有可能不是孤立的，而是相互联系、相互依赖地遵循一定的规律变化着。如

例 1 球的半径r与该球的体积v互相联系着，其关系为

$$v=\frac{4}{3}\pi r^3,\qquad \text{其中}\quad 0<r<+\infty,$$

当半径r在区间$(0,\ +\infty)$内任意取定一个数值时，由上式就可以确定球体积的对应数值。

例2 某商品的销售单价为a（元），则销售数量x与销售收入R（元）互相联系，其关系为

$$R=ax.\qquad \text{其中}\quad x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots.$$

当销售数量x在自然数集1，2，3，……中任意取定一个数值时，由上式就可以确定销售收入R的对应数值。这里a是正参数常数。

例 3 某气象站用自动温度记录仪记下一昼夜气温的变化情况，图1—4是温度记录仪在坐标纸上画出的温度变化曲线图，（其中横坐标是时间t，纵坐标是温度T），它形象地表示出温度T随时间变化而变化的规律：对于某一确定的t（$0\leqslant t\leqslant 24$），就有一个确定的T值与它对应，例如，当$t=t_0$时，有$T=T_0$。

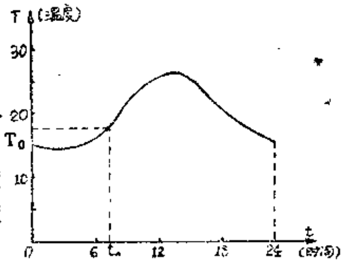

图1-4

曲线反映了温度T与时间t两个变量之间的相互关系。

例 4 某城市百货批发总站记录了该城市毛线历年的月

销售量（单位：百斤），并将近10年来的平均月销售量列成下表：

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平均月销售量 S	81	84	45	48	9	5	6	17	94	161	144	123

该表表示了某城市毛线的销售量S与月份t间的相互联系，t的取值只能是1、2、3、…、12，而且当月份t在1、2、3、…、12中任意取定一个数值时，从表中便可以确定一个平均月销售量S的对应数值。

上面几个例题，虽然具体的实际意义不同，但它们具有如下共同特征，即：抛开各例中所表示的具体内容，我们看到，它们都表达了两个变量之间的相互依赖关系，这种相依关系给出了一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量总有一个确定的值与它对应，两个变量之间的这种对应关系我们称它为函数关系，微积分学的主要任务之一，就是揭示变量之间的联系和规律。下面我们给出函数定义。

定义 2　设有两个变量x和y，如果对于变量x在其变化范围内的每一个确定的值，变量y按照某对应法则总有唯一确定的值与它对应，则称变量y是变量x的函数，并记作$y=f(x)$。其中：

x称为自变量，y也称为因变量；

x的取值范围称为函数的定义域，常记作D，一般用区间表示。

$f(x)$中的"f"①反映因变量y与自变量x的对应法则。

对自变量x在函数定义域D内取定的某个数值x_0，按对应法则f(　　)确定的因变量值，称为$y=f(x)$在点$x=x_0$的函数值，记作$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$。

当x取遍D中的每一个值时，对应的全体函数值构成的集合，称为函数的值域，常记作E。一般也用区间表示。

利用函数概念，可以说：例1中，球体积v是球半径r的函数，并可记作$v=f(r)$；例2中，商品的销售收入R是销售数量x的函数，并可记作$R=R(x)$；例3中，气温T是时间t的函数，并可记为$T=T(t)$；例4中，毛线的月平均销售量S是月份t的函数，并可记作$S=S(t)$。

从函数的定义可见，两个变量间的函数关系由两个要素决定：一是自变量的取值范围，即函数的定义域D；一是变量之间的对应法则。这两者确定了，值域E也就随之确定。

关于函数定义域D的确定，一般原则如下：

对于反映实际问题的函数关系，函数的定义域由所研究问题的实际意义确定。如例1的定义域是$(0, +\infty)$；例2的定义域是自然数集；例3的定义域是$[0, 24]$；例4是定义域是$t=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$。

在数学的一般研究中，函数的定义域，一般由表达这个函数关系的式子（或其他表达形式）确定，函数$y=f(x)$的定义域规定为使函数表达式保持有意义的一切x的值。

---

①对应法则有时也用"φ"、"g"、"F"……表示，相应地，函数记作$\varphi(x)$、$g(x)$、$F(x)$。有时为了简化符号，还常常将函数关系记作$y=y(x)$。

例5 求下列函数的定义域：

（1）$y=x^2$ （2）$y=\frac{1}{x^2-1}$

（3）$y=\sqrt{x^2-3x+2}$ （4）$y=\lg(9-3x)$

（5）$y=\sqrt{x^2-3x+2}+\lg(9-3x)$。

解 （1）不论x取什么值时，都可以由关系式$y=x^2$确定出对应值y，所以函数$y=x^2$的定义域$D_1=(-\infty,+\infty)$。

（2）因$x^2-1\neq0$即$x\neq\pm1$时函数才有意义（零不能作除数）。所以函数$y=\frac{1}{x^2-1}$的定义域是除去$x=\pm1$的一切实数。即$D_2=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$。

（3）因$x^2-3x+2\geqslant0$时，即$x\leqslant1$或$x\geqslant2$时，函数才有意义（负数不能开偶次方根），所以函数$y=\sqrt{x^2-3x+2}$的定义域$D_3=(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$。

（4）因$9-3x>0$，即$x<3$时函数才有意义（负数和零无对数），所以函数$y=\lg(9-3x)$的定义域$D_4=(-\infty,3)$。

（5）因y的表达式由两项组成，所以，其定义域应是各项定义域的交集。

由（3）知，前一项的定义域$D_3=(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$；由（4）知，后一项的定义域$D_4=(-\infty,3)$。故函数$y=\sqrt{x^2-3x+2}+\lg(9-3x)$的定义域$D_5=D_3\cap D_4=(-\infty,1]\cup[2,3)$。

关于函数值及函数值域E的确定，下面举例说明。

例6 求函数$y=\frac{1}{1+x^2}$ 在$x=2$时的函数值。

解 由函数定义得： $y|_{x=2}=\frac{1}{1+(2)^2}=\frac{1}{5}$