工科硕士研究生数学用书

GONGKE SHUOSHI
YANJIUSHENG
SHUXUE YONGSHU

工程中的矩阵理论

丁学仁　蔡高厅　编

天津大学出版社

内 容 提 要

本书是根据工科研究生教学和科研的需要，同时注意到与工科专业（本科）工程数学《线性代数》教学内容的衔接，选择工程和科技中常用的矩阵理论的基础知识编写的。内容包括：多项式矩阵、内积空间和Hermite二次型、向量和矩阵的范数、矩阵分析、特征值的估计、广义逆矩阵等。各章配有一定数量的例题和练习题，书末並附有练习题的参考答案。

本书可作为工科研究生教学的主要参考教材，也可供工程师、科技工作者和各工科专业教师更新基础知识和进修提高用。

工 程 中 的 矩 阵 理 论

丁学仁 蔡高厅 编

*

天津大学出版社出版

（天津大学校内）

天津振华印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：787×1092 毫米 1/16 印张 $14^1/_4$ 字数 355 千字

1985 年 9 月第一版　1985 年 9 月第一次印刷

印数：1—6000

统一书号：13401·1　　定价 3.00 元

前　言

用矩阵的理论和方法来处理现代工程技术中的各种问题已越来越普遍。在工程技术中引进矩阵理论不仅使工程理论的表达极为简捷，而且对理论的实质的刻划也更为深刻。这一点已被越来越多的科技教育工作者和科技实践者所认识。特别是由于计算机和计算方法的普及和发展，不仅为矩阵理论的应用开辟了广阔的前景，也使工程技术的研究发生新的变化，开拓了崭新的研究途径，例如系统工程、优化方法、稳定性理论等，无不与矩阵理论发生紧密的结合。因此矩阵的理论和方法已经成为研究现代工程技术的数学基础。古典的线性代数理论已不能满足现代工程技术的需要。我们在大学本科工程数学《线性代数》的基础上，结合各学科研究生的教学和科研工作的需要，在较短的教学时间内，精选了教学内容，编出此书作为工科研究生的数学选修课的参考教材之一。本书出版以前曾编印成讲义，在天津大学硕士研究生数学选修课中试讲过三年，此次出版，根据有关方面的意见和研究生的实际需要又进行了修改。

本书的主要内容可以分成两部分，第一部分包括第一章和第二章内容，这一部分是作为本科工程数学《线性代数》内容的衔接，为学习第二部分内容打下必要的基础。第二部分包括第三、四、五、六章内容，这一部分是考虑到当前各工科学科研究生的实际需要而选择的内容，同时也为读者今后进一步发展的需要打下必要的基础。

考虑到本书的主要教学对象是工科研究生，教学时数有限，因此着重于介绍一些基本概念、基本理论和基本方法，至于理论证明和推导的严密性则不过于苛求，只要读者能正确理解基本概念，掌握基本理论，熟练地使用基本方法即达到目的。

本书在编写过程中，承蒙张敬如教授和李恩波教授审核，提出了许多宝贵的意见和建议，并得到天津大学研究生院的大力支持和帮助，谨此致谢。此外，对本书所参考的文献和资料的作者也一并致谢。

编者水平有限，经验不足，对于书中的谬误和不当之处，如蒙赐教，不胜感谢。

编　者

1985 年 1 月于天津大学

目 录

第一章　多项式矩阵与矩阵的标准形

第一节　多 项 式 矩 阵

为了便于讨论多项式矩阵，本节首先简要地介绍变量 λ 的多项式概念及其运算法则。

设 F 为一数域，$a_k(k=0,1,2,\cdots,s)\in F$，$\lambda$ 为一变量，表达式

$$a(\lambda)=a_S\lambda^S+a_{S-1}\lambda^{S-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$
$$=\sum_{k=0}^{s}a_k\lambda^k$$

称为变量 λ 的多项式。系数 $a_k(k=0,1,2,\cdots,s)$ 在数域 F 上的多项式的全体记为 $F[\lambda]$，复系数多项式的全体记为 $C[\lambda]$，实系数多项式的全体记为 $R[\lambda]$。

当 $a_S\neq 0$ 时，则称 $a(\lambda)$ 为 s 次多项式，并记为 $deg[a(\lambda)]=s$。$a_S\lambda^S$ 称为 $a(\lambda)$ 的首项，又当 $a_S=1$ 时，称 $a(\lambda)$ 为 s 次的首一多项式。系数全都是零的多项式称为零多项式并记为 0，零多项式不定义次数。

对 $F[\lambda]$ 中的两个多项式

$$a(\lambda)=\sum_{k=0}^{m}a_k\lambda^k,\quad b(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}b_k\lambda^k$$

如果满足：

1° $m=n$，

2° $a_k=b_k$ $(k=0,1,2,\cdots,m)$，

则称 $a(\lambda)$ 与 $b(\lambda)$ 相等，并记作 $a(\lambda)=b(\lambda)$。

对 $a(\lambda)$，$b(\lambda)$（不妨设 $m\geqslant n$）可以定义以下运算：

1° 加法

$$a(\lambda)+b(\lambda)=c(\lambda)$$
$$=c_m\lambda^m+c_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+c_1\lambda+c_0,$$

其中 $c_k=a_k+b_k$，$(k=0,1,2,\cdots,m)$，对 b_k 规定 $b_{n+1}=\cdots=b_m=0$。

2° 数乘多项式

$$la(\lambda)=d(\lambda)$$
$$=d_m\lambda^m+d_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+d_1\lambda+d_0,$$

其中 $l\in F$，$d_k=la_k$，$(k=0,1,2,\cdots,m)$。

3° 乘法

$$a(\lambda)b(\lambda)=e(\lambda)$$
$$=e_{m+n}\lambda^{m+n}+e_{m+n-1}\lambda^{m+n-1}+\cdots+e_1\lambda+e_0,$$

其中 $e_k=a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_0b_k$，$(k=0,1,2,\cdots,m+n)$ 对 a_k 规定 $a_{m+1}=\cdots=a_{m+n}$

$=0$，对b_k规定$b_{n+1}=\cdots=b_{n+m}=0$。

不难验证多项式的这些运算与数的对应运算有相同的运算规律。

本章要讨论的矩阵是以一个变量λ的多项式作元素的矩阵，这种矩阵通常称为多项式矩阵（或简称为λ—矩阵）。一个m行n列的多项式矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

其中$a_{ij}(\lambda)\in C[\lambda]$，$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$。元素是$C[\lambda]$中多项式的$m$行$n$列的多项式矩阵的全体记为$C[\lambda]^{m\times n}$，类似地，元素是$R[\lambda]$中多项式的$m$行$n$列的多项式矩阵的全体记为$R[\lambda]^{m\times n}$。

任一复数a可以看作是零次多项式或零多项式，因此通常以数作元素的数字矩阵也包含在多项式矩阵之中。为讨论问题方便起见，以后用A，B，…表示数字矩阵，用$A(\lambda)$，$B(\lambda)$，…表示多项式矩阵。

由于多项式的加法，数乘多项式，多项式乘法与数的对应运算有完全相同的运算规律，而矩阵的加法，数乘矩阵，乘法运算只牵涉到其中元素的加法和乘法运算，故对多项式矩阵自然可以仿照数字矩阵的运算来定义多项式矩阵的对应的运算。相仿也可以同样来定义子式，代数余子式及$n\times n$的多项式矩阵的行列式，以及$A(\lambda)$，$B(\lambda)\in C[\lambda]^{n\times n}$，就有$det[A(\lambda)B(\lambda)]=det[A(\lambda)]det[B(\lambda)]$等等。

第二节　多项式矩阵的Smith标准形

一般说来，多项式矩阵的子式计算出来是λ的一个多项式$\varphi(\lambda)$，当λ取$\varphi(\lambda)$的根λ_0时，可以使这个子式的值$\varphi(\lambda_0)=0$。但就一个多项式$\varphi(\lambda)$来说，有零多项式与非零多项式之区分，因此我们可以从子式是否为零多项式来定义多项式矩阵的秩。

定义1.2.1　如果多项式矩阵$A(\lambda)$有一个r（$r\geqslant 1$）级子式是非零多项式，而一切$r+1$级子式（如果有的话）全都是零多项式，则称$A(\lambda)$的秩为r，记为$rank[A(\lambda)]=r$。

零矩阵的秩等于零。

如果$n\times n$的多项式矩阵的秩等于n（或$det[A[\lambda)]\neq 0$），则称$A(\lambda)$为满秩的多项式矩阵（或非奇异多项式矩阵）。

定义1.2.2　设$A(\lambda)$是$n\times n$的多项式矩阵，如果存在$n\times n$的多项式矩阵$B(\lambda)$，使

$$A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=E, \tag{1.2.1}$$

其中E是$n\times n$的单位矩阵，则称多项式矩阵$A(\lambda)$是可逆的。并称$B(\lambda)$是$A(\lambda)$的逆矩阵，记为$A^{-1}(\lambda)$。

应当指出，如果$A(\lambda)$可逆，则其逆矩阵$A^{-1}(\lambda)$是唯一存在的。事实上，假若$B_1(\lambda)$，$B_2(\lambda)$是$A(\lambda)$的两个逆矩阵，则有

$$A(\lambda)B_1(\lambda)=B_1(\lambda)A(\lambda)=E,\quad A(\lambda)B_2(\lambda)=B_2(\lambda)A(\lambda)=E,$$

从而有

$$B_1(\lambda) = B_1(\lambda)E = B_1(\lambda)[A(\lambda)B_2(\lambda)] = [B_1(\lambda)A(\lambda)]B_2(\lambda)$$
$$= EB_2(\lambda) = B_2(\lambda).$$

众所周知，在数字矩阵中满秩矩阵一定是可逆的。这一结论是否适用于多项式矩阵？回答是否定的。这是因为，如果$A(\lambda)$可逆，则有$B(\lambda)$使

$$A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = E,$$

等式两边取行列式，得到

$$det[A(\lambda)]det[B(\lambda)] = det(E) = 1.$$

而$det[A(\lambda)]$与$det[B(\lambda)]$都是λ的多项式，其乘积是零次多项式1，由此可推知$det[A(\lambda)]$与$det[B(\lambda)]$都是零次多项式，即$det[A(\lambda)]$是非零常数。

反之，如果$det[A(\lambda)] = d$是一个非零常数。记$A(\lambda)$的伴随矩阵为$adj[A(\lambda)]$，那么

$$\frac{1}{det[A(\lambda)]}adj[A(\lambda)] = \frac{1}{d}adj[A(\lambda)]$$

也是一多项式矩阵，从而有

$$A(\lambda)\frac{1}{d}adj[A(\lambda)] = \frac{1}{d}adj[A(\lambda)]\cdot A(\lambda) = E,$$

所以$A(\lambda)$是可逆的。于是我们得到：一个$n\times n$的多项式矩阵$A(\lambda)$可逆的充分必要条件是$det[A(\lambda)]$等于一个非零常数。可逆的多项式矩阵又称为单（么）模态矩阵。显然单模态矩阵一定是满秩的，但满秩矩阵不一定是单模态矩阵。例如

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^3+1 & -1 \\ \lambda^2-\lambda & \lambda \end{pmatrix},$$

$rank[A(\lambda)] = 2$，但$det[A(\lambda)] = \lambda^4+\lambda^2$，故$A(\lambda)$不可逆，$A(\lambda)$是满秩矩阵但不是单模态矩阵。

在数字矩阵中，为了确定矩阵的秩，曾经引进初等变换的概念，在多项式矩阵中，可类似地引进初等变换的概念。

定义1.2.3 下面三种变换：

1° 任意两行互换位置；

2° 某一行乘以非零数a；

3° 某一行乘以多项式$\varphi(\lambda)$再加到另一行上去；

称为多项式矩阵的初等行变换。类似地可以定义初等列变换。初等行变换与初等列变换，统称为初等变换。

为了书写方便，用$[i,j]$表示第i，j两行（列）互换位置，用$[i(a)]$表示第i行（列）乘以非零数a，用$[i+j(\varphi)]$表示第j行（列）乘以多项式$\varphi(\lambda)$后，再加到第i行（列）上去。

为了建立多项式矩阵的初等变换与矩阵乘法的联系，下面引进初等矩阵的定义。

定义1.2.4 由单位矩阵E经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵。

显然每个初等变换都有一个初等矩阵与之相对应。

互换E的第i，j两行（列）的位置，就得到

$$
P_{ij}=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} & & & (i\text{列}) & & (j\text{列}) & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & \vdots & & \vdots & \\
 & & & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\
 & & & \vdots & 1 & \vdots & \\
 & & & \vdots & \ddots & \vdots & \\
 & & & \vdots & 1 & \vdots & \\
 & & & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ (i\text{行}) \\ \\ \\ \\ (j\text{行}) \\ \\ \\ \\ \end{array}.
$$

E 的第 i 行（列）乘以非零数 a，就得到

$$
P_i(a)=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} & & & (i\text{列}) & & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & 1 & \vdots & & & \\
 & & & a & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ (i\text{行}). \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

E 的第 j 行（i 列）乘以多项式$\varphi(\lambda)$后，再加到第 i 行（j 列）上去，就得到

$$
P_{ij}(\varphi)=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} & & (i\text{列}) & & (j\text{列}) & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\
 & & 1 & \cdots & \varphi(\lambda) & \cdots & \\
 & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & 1 & \cdots & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ (i\text{行}) \\ \\ (j\text{行}) \\ \\ \\ \end{array}.
$$

因为$det(P_{ij})=-1$，$det(P_i(a))=a\neq 0$，$det(P_{ij}(\varphi))=1$，所以初等矩阵都是单模态矩阵。它们的逆矩阵分别为

$$
P_{ij}^{-1}=P_{ij},\quad P_i^{-1}(a)=P_i\left(\frac{1}{a}\right),\quad P_{ij}^{-1}(\varphi)=P_{ij}(-\varphi),
$$

因此初等矩阵的逆矩阵是同类型的初等矩阵。

有了初等矩阵，就可以建立起对多项式矩阵作初等变换与初等矩阵乘法的联系。

设$A(\lambda)$是一$m\times n$ 的多项式矩阵，对$A(\lambda)$ 作一次初等行变换化为$B(\lambda)$，就相当于在$A(\lambda)$的左边乘上一个相应的$m\times m$的初等矩阵而得到$B(\lambda)$。对$A(\lambda)$作一次初等列变换化为$B(\lambda)$，就相当于在$A(\lambda)$的右边乘上一个相应的 $n\times n$ 的初等矩阵而得到$B(\lambda)$。例如

$$
A(\lambda)\xrightarrow{[i,\ j]}B(\lambda),\text{相当于}P_{ij}A(\lambda)=B(\lambda),
$$

$$
A(\lambda)\xrightarrow[{[i(a)]}]{}B(\lambda),\text{相当于}A(\lambda)P_i(a)=B(\lambda),
$$

$$
A(\lambda)\xrightarrow{[i+j(\varphi)]}B(\lambda),\text{ 相当于}P_{ij}(\varphi)A(\lambda)=B(\lambda).
$$

注意：变换记号写在箭号→上面表示作行变换，写在箭号→下面表示作列变换。

定义1.2.5 设$A(\lambda)$，$B(\lambda)$都是$m\times n$ 的多项式矩阵，如果$A(\lambda)$可以经过有限次初等

变换化为$B(\lambda)$，就说$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价，记为$A(\lambda)\simeq B(\lambda)$。

按等价的定义，易证多项式矩阵的等价关系有以下性质：

1° 反身性：任何$A(\lambda)$与其自身等价。

2° 对称性：$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价，则$B(\lambda)$与$A(\lambda)$等价。

3° 传递性：$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价，$B(\lambda)$与$C(\lambda)$等价，则$A(\lambda)$与$C(\lambda)$等价。

如果$m\times n$的多项式矩阵$A(\lambda)$经过s次初等行变换，t次初等列变换化为多项式矩阵$B(\lambda)$，应用初等变换与初等矩阵的关系，则有相应的$m\times m$的初等矩阵P_1，P_2，…，P_s及相应的$n\times n$的初等矩阵Q_1，Q_2，…，Q_t，使

$$B(\lambda)=P_s\cdots P_2P_1A(\lambda)Q_1Q_2\cdots Q_t.$$

记$P(\lambda)=P_s\cdots P_2P_1$，$Q(\lambda)=Q_1Q_2\cdots Q_t$，则$P(\lambda)$，$Q(\lambda)$为单模态矩阵，使

$$B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda).$$

在数字矩阵中，曾经指出，如果$m\times n$数字矩阵A的秩为r，可以经过有限次初等变换化为

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中E_r为$r\times r$的单位矩阵。对多项式矩阵也有类似的结果，这就是把$A(\lambda)$化为$smith$标准形问题。下面先证明一个引理。

引理 设$A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))$是$m\times n$的多项式矩阵，如果$a_{11}(\lambda)\neq 0$，且$a_{11}(\lambda)$不能除尽某个元素$a_{ij}(\lambda)$，则存在$B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))\simeq A(\lambda)$，$b_{11}(\lambda)\neq 0$，且$deg[b_{11}(\lambda)]<deg[a_{11}(\lambda)]$.

证明 根据不能被$a_{11}(\lambda)$除尽的元素$a_{ij}(\lambda)$所在的位置分为以下三种情形。

1° 在第一行有某元素$a_{1j}(\lambda)$不能被$a_{11}(\lambda)$除尽，于是有

$$a_{1j}(\lambda)=a_{11}(\lambda)\varphi(\lambda)+b(\lambda),$$

其中$b(\lambda)\neq 0$，且$deg[b(\lambda)]<deg[a_{11}(\lambda)]$。这时对$A(\lambda)$作以下初等列变换，得

$$A(\lambda)P_{1j}(-\varphi)P_{1j}=B(\lambda)$$

(其中$P_{1j}(-\varphi)$，P_{1j}为$n\times n$初等矩阵)，则$B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))\simeq A(\lambda)$，其左上角元素$b_{11}(\lambda)=b(\lambda)\neq 0$，且$deg[b_{11}(\lambda)]<deg[a_{11}(\lambda)]$。

2° 在第一列有某元素$a_{i1}(\lambda)$不能被$a_{11}(\lambda)$除尽，可仿照1°证明之。

3° 某元素$a_{ij}(\lambda)$（$i\geqslant 2$，$j\geqslant 2$）不能被$a_{11}(\lambda)$除尽，$a_{11}(\lambda)|a_{1j}(\lambda)$，（$j=1,\cdots,n$），$a_{11}(\lambda)|a_{i1}(\lambda)$，（$i=1,\cdots,m$）不妨设

$$a_{i1}(\lambda)=a_{11}(\lambda)\psi(\lambda),$$

这时对$A(\lambda)$作以下初等行变换，得

$$P_{1i}(1)P_{i1}(-\psi)A(\lambda)=\hat{A}(\lambda),$$

这时$\hat{A}(\lambda)=(\hat{a}_{ij}(\lambda))$的元素$\hat{a}_{11}(\lambda)=a_{11}(\lambda)$，$\hat{a}_{1j}(\lambda)=a_{ij}(\lambda)+(1-\psi(\lambda))a_{1j}(\lambda)$，显然$\hat{a}_{1j}(\lambda)$不能被$\hat{a}_{11}(\lambda)$除尽，这就归结为情形1°。

由引理的证明过程可知，$B(\lambda)$的左上角的元素$b_{11}(\lambda)$总可表示为$A(\lambda)$的元素的组合。

定理1.2.1 设$A(\lambda)$是$m\times n$的多项式矩阵，且$A(\lambda)\neq 0$，则

$$A(\lambda)\simeq\begin{pmatrix}S(\lambda) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

其中$S(\lambda)=diag[d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)]$，$r\geqslant 1$，$d_i(\lambda)$为首一多项式，且$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$，（$i=1,2,\cdots,r-1$）。

证明 因为$A(\lambda)\neq 0$，故$A(\lambda)$至少有一元素不为零多项式。不妨设$a_{11}(\lambda)\neq 0$，否则可以经过第一类型的初等变换，得到一个与$A(\lambda)$等价的多项式矩阵，使其左上角元素为不为零多项式。

现在对$A(\lambda)$的行数m作数学归纳法

当$m=1$时，$A(\lambda)=(a_{11}(\lambda),a_{12}(\lambda),\cdots,a_{1n}(\lambda))$，

如果$a_{11}(\lambda)$不能整除$a_{1j}(\lambda)$，（$j=2,\cdots,n$），由引理可找到$B_1(\lambda)\simeq A(\lambda)$，其左端第一个元素$b_1(\lambda)\neq 0$，且$deg[b_1(\lambda)]<deg[a_{11}(\lambda)]$。如果$b_1(\lambda)$还不能整除$B_1(\lambda)$的全部元素，又可找到$B_2(\lambda)\simeq B_1(\lambda)$，其左端第一个元素$b_2(\lambda)\neq 0$，且$deg[b_2(\lambda)]<deg[b_1(\lambda)]$，如此继续下去，可得到

$$A(\lambda)\simeq B_1(\lambda)\simeq B_2(\lambda)\simeq\cdots,$$

其左端第一个元素依次为

$$a_{11}(\lambda)\neq 0,\ b_1(\lambda)\neq 0,\ b_2(\lambda)\neq 0,\ \cdots,$$

它们的次数满足不等式

$$deg[a_{11}(\lambda)]>deg[b_1(\lambda)]>deg[b_2(\lambda)]>\cdots,$$

但多项式的次数是非负整数，不能无止境地降低，最终将得到$B_s(\lambda)\simeq A(\lambda)$，其左端第一个元素为$b_s(\lambda)\neq 0$，且$deg[b_s(\lambda)]<deg[a_{11}(\lambda)]$，$b_s(\lambda)$能整除$B_s(\lambda)$的全部元素，不妨令$B_s(\lambda)=(b_s(\lambda),b_{12}(\lambda),\cdots,b_{1n}(\lambda))$，从而有$b_{1j}(\lambda)=b_s(\lambda)\varphi_{1j}(\lambda)$，（$j=2,3,\cdots,n$），对$B_s(\lambda)$作初等变换

$$B_s(\lambda)P_{12}(-\varphi_{12})\cdots P_{1n}(-\varphi_{1n})=(b_s(\lambda),\ 0,\cdots,0)$$

于是得到

$$A(\lambda)=(a_{11}(\lambda),\cdots,a_{1n}(\lambda))\simeq(b_s(\lambda),\ 0,\cdots,0)$$

即当$m=1$时，定理的结论成立。

假设对$m-1$行定理的结论成立。下面考虑m行时的情形。

设$A(\lambda)$是$m\times n$的多项式矩阵，$a_{11}(\lambda)\neq 0$。如果$a_{11}(\lambda)$不能整除$A(\lambda)$的全部元素，反复应用引理，最终将得到$(b_{ij}(\lambda))=B(\lambda)\simeq A(\lambda)$，$b_{11}(\lambda)\neq 0$，且$deg[b_{11}(\lambda)]<deg[a_{11}(\lambda)]$，$b_{11}(\lambda)$能整除$B(\lambda)$的全部元素，不妨设$b_{ij}(\lambda)=b_{11}(\lambda)\varphi_{ij}(\lambda)$，（$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$），再对$B(\lambda)$作以下初等变换，就有

$$P_{m1}(-\varphi_{m1})\cdots P_{21}(-\varphi_{21})B(\lambda)P_{12}(-\varphi_{12})\cdots P_{1n}(-\varphi_{1n})$$

$$=\begin{pmatrix}b_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \hat{b}_{22}(\lambda) & \cdots & \hat{b}_{2n}(\lambda)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \hat{b}_{m2}(\lambda) & \cdots & \hat{b}_{mn}(\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}(\lambda) & 0\\ 0 & \hat{A}_1(\lambda)\end{pmatrix},$$

$\hat{A}_1(\lambda)$是$(m-1)\times(n-1)$的多项式矩阵，其元素

$$\hat{b}_{ij}(\lambda)=b_{ij}(\lambda)-b_{1j}(\lambda)\varphi_{i1}(\lambda),\ \begin{pmatrix}i=2,\cdots,m\\ j=2,\cdots,n\end{pmatrix}.$$

显然$b_{11}(\lambda)$能整除$\widehat{A}_1(\lambda)$的全部元素。由于$\widehat{A}_1(\lambda)$是$m-1$行的多项式矩阵，按归纳法假设有

$$\widehat{A}_1(\lambda) \simeq \begin{pmatrix} s_1(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中$s_1(\lambda)=diag(d_2(\lambda),\ \cdots,\ d_r(\lambda))$，且$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$，$(i=2,\cdots,r-1)$ 由于$d_2(\lambda)$ 是$\widehat{A}_1(\lambda)$的元素的组合，$b_{11}(\lambda)$ 又能整除$\widehat{A}_1(\lambda)$的所有元素，由此有 $b_{11}(\lambda)$ 能整除 $d_2(\lambda)$。根据归纳法原理定理得证。

本定理最后得到的多项式矩阵

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & 0\cdots & 0 & 0\cdots 0 \\ 0 & d_2(\lambda)\cdots & 0 & 0\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots & d_r(\lambda) & 0\cdots 0 \\ 0 & 0\cdots & 0 & 0\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots & 0 & 0\cdots 0 \end{pmatrix},$$

称为$A(\lambda)$的*Smith*标准形。

例 1 用初等变换把多项式矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

化为*Smith*标准形。

解

$$A(\lambda)\xrightarrow[{[1+3]}]{}\begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}\xrightarrow{[3-1]}\begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[{[2-1(\lambda^2)]}]{}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}\xrightarrow[{[3-1(\lambda)]}]{}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[{[3+2]}]{}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{pmatrix}\xrightarrow{[3(-1)]}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{pmatrix}.$$

例 2 用初等变换把多项式矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda-a & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-a & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-a & 0 & 0 & -1 \\ b^2 & 1 & 0 & \lambda-a & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 1 & 0 & \lambda-a & 0 \\ 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & \lambda-a \end{pmatrix}.$$

化为$Smith$标准形。

解

$$A(\lambda)\xrightarrow[\substack{[1,\ 4]\\ [2,\ 5]\\ [3,\ 6]}]{}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \lambda-a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda-a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda-a \\ \lambda-a & 0 & 0 & b^2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-a & 0 & 0 & b^2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-a & 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{[4+1(\lambda-a)]\\ [5+2(\lambda-a)]\\ [6+3(\lambda-a)]}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \lambda+a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda-a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda-a \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-a)^2+b^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-a)^2+b^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-a)^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{[4+1(\lambda-a)]\\ [5+2(\lambda-a)]\\ [6+3(\lambda-a)]}]{}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-a)^2+b^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-a)^2+b^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-a)^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{[4-5((\lambda-a)^2+b^2)]\\ [5-6((\lambda-a)^2+b^2)]}]{}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -[(\lambda-a)^2+b^2]^2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -[(\lambda-a)^2+b^2]^2 & [(\lambda-a)^2+b^2] \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[{[4+6((\lambda-a)^2+b^2)^2]}]{}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & [(\lambda-a)^2+b^2]^3 & -[(\lambda-a)^2+b^2]^2 & [(\lambda-a)^2+b^2] \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[{[6-5((\lambda-a)^2+b^2)]}]{[6+4((\lambda-a)^2+b^2)^2)]}\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&[(\lambda-a)^2+b^2]^3&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{[4,5]\\[5,6]}]{\substack{[1(-1)]\\[2(-1)]\\[3(-1)]}}\begin{pmatrix}1&&&&&\\&1&&&&\\&&1&&&\\&&&1&&\\&&&&1&\\&&&&&[(\lambda-a)^2+b^2]^3\end{pmatrix}.$$

第三节　行列式因子、不变因子、初等因子

定义1.3.1　设$rank[A(\lambda)]=r\geqslant 1$，对正整数$k$，只要$1\leqslant k\leqslant r$，$A(\lambda)$中必然有非零的$k$级子式，用首一多项式$D_k(\lambda)$表示$A(\lambda)$中所有非零的$k$级子式的最高公因式，则称$D_k(\lambda)$为$A(\lambda)$的$k$级行列式因子。

由定义可知，当$rank[A(\lambda)]=r\geqslant 1$时，$A(\lambda)$共有$r$个行列式因子$D_1(\lambda)$，$D_2(\lambda)$，…$D_r(\lambda)$。它们是由$A(\lambda)$所唯一确定的。因为$D_{k-1}(\lambda)$能整除每一个$k-1$级子式，而每一个$k$级子式按一行展开来看，都可以表示为以多项式为系数的k个$k-1$级子式的组合，从而有$D_{k-1}(\lambda)|D_k(\lambda)$。由此得到$r$个多项式

$$D_1(\lambda),\ \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)},\ \frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)},\ \cdots,\ \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$$

都是首一多项式，它们都是由多项式矩阵$A(\lambda)$所唯一确定的。我们便有

定义1.3.2　设$rank[A(r)]=r\ (\geqslant 1)$，则称$r$个首一多项式

$$D_1(\lambda),\ \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)},\ \frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)},\ \cdots,\ \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$$

为$A(\lambda)$的不变因子或不变多项式。

下面我们将证明第二节定理1.2.1中，$A(\lambda)$的$Smith$标准形中的$d_1(\lambda)$，$d_2(\lambda)$，…，$d_r(\lambda)$正好是$A(\lambda)$的不变因子。为此先证明

定理1.3.1　设$A(\lambda)$，$B(\lambda)$是等价的$m\times n$的多项式矩阵，则$A(\lambda)$与$B(\lambda)$有相同的秩与相同的各级行列式因子。

证明　只需证明$A(\lambda)$经过一次初等行变换化为$B(\lambda)$，其秩与行列式因子是不变的即可。

记$A(\lambda)$，$B(\lambda)$的k级行列式因子依次为$D_k^A(\lambda)$与$D_k^B(\lambda)$。

1°　设$B(\lambda)=P_{ij}A(\lambda)$，这时$B(\lambda)$的任一$k$级子式不是等于$A(\lambda)$的某一$k$级子式就是与$A(\lambda)$的某一$k$级子式反号，因此$D_k^A(\lambda)|D_k^B(\lambda)$。而$A(\lambda)=P_{ij}^{-1}B(\lambda)=P_{ij}B(\lambda)$，由上所

证有$D_k^B(\lambda)|D_k^A(\lambda)$，再由$D_k^A(\lambda)$，$D_k^B(\lambda)$均为首一多项式，故$D_k^A(\lambda)=D_k^B(\lambda)$。

2° 设$B(\lambda)=P_i(a)A(\lambda)$，这时$B(\lambda)$的任一$k$级子式不是等于$A(\lambda)$的某一$k$级子式，就是等于$A(\lambda)$的某一$k$级子式的$a$倍。因此$D_k^A(\lambda)|D_k^B(\lambda)$。而$A(\lambda)=P_i^{-1}(a)B(\lambda)=P_i\left(\frac{1}{a}\right)B(\lambda)$，由上所证有$D_k^B(\lambda)|D_k^A(\lambda)$，再由$D_k^A(\lambda)$，$D_k^B(\lambda)$均为首一多项式，故$D_k^A(\lambda)=D_k^B(\lambda)$。

3° 设$B(\lambda)=P_{ij}(\varphi)A(\lambda)$，这时$B(\lambda)$的$k$级子式可分为三类：一是不包含第$i$行的$k$级子式，这类子式等于$A(\lambda)$中对应的$k$级子式；二是既包含第$i$行也包含第$j$行的$k$级子式，按行列式性质这类子式也等于$A(\lambda)$中对应的$k$级子式；三是仅包含第$i$行而不包含第$j$行的$k$级子式，根据行列式性质，这类子式可按第$i$行分成两部分之和。若记$B(\lambda)$的这类$k$级子式为$b(\lambda)$，则有$b(\lambda)=a(\lambda)\pm\varphi(\lambda)c(\lambda)$，其中$a(\lambda)$，$c(\lambda)$为$A(\lambda)$的$k$级子式。综合上面三类$k$级子式，有$D_k^A(\lambda)|D_k^B(\lambda)$。而$A(\lambda)=P_{ij}^{-1}(\varphi)B(\lambda)=P_{ij}(-\varphi)B(\lambda)$。由上所证，有$D_k^B(\lambda)|D_k^A(\lambda)$。又$D_k^A(\lambda)$，$D_k^B(\lambda)$都是首一多项式，故$D_k^A(\lambda)=D_k^B(\lambda)$。

当$A(\lambda)$的一切i级子式为零时，则$A(\lambda)$的一切i级子式的最大公因式为零，从而$B(\lambda)$的一切i级子式的最大公因式也为零，于是$B(\lambda)$的一切k级子式为零，反之亦然。由此便得定理的结论。

由定理1.2.1及1.3.1可得下面的推论：

推论 1 设多项式矩阵$A(\lambda)$的$Smith$标准形为

$$\begin{pmatrix} S(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=B(\lambda),$$

其中$S(\lambda)=diag(d_1(\lambda),\ d_2(\lambda),\ \cdots,\ d_r(\lambda))$，则$d_1(\lambda)$，…，$d_r(\lambda)$是$A(\lambda)$的不变因子。

证明 因为$A(\lambda)\simeq B(\lambda)$，故$A(\lambda)$与$B(\lambda)$有相同的各级行列式因子。下面求$B(\lambda)$的各级行列式因子，因为$d_1(\lambda)$能整除$B(\lambda)$的一切元素，故$D_1^B(\lambda)=d_1(\lambda)$。在$B(\lambda)$中不为零的的子式只有主子式，故不为零二级主子式一定是形为$d_i(\lambda)d_j(\lambda)$（$i\neq j$），而$d_1(\lambda)d_2(\lambda)|d_i(\lambda)d_j(\lambda)$，所以$D_2^B(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)$。仿此推理，一般地有

$$D_i^B(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_i(\lambda),\quad (i=1,2,\cdots,r),$$

于是有

$$d_1(\lambda)=D_1^B(\lambda)=D_1^A(\lambda),$$

$$d_2(\lambda)=\frac{D_2^B(\lambda)}{D_1^B(\lambda)}=\frac{D_2^A(\lambda)}{D_1^A(\lambda)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$d_r(\lambda)=\frac{D_r^B(\lambda)}{D_{r-1}^B(\lambda)}=\frac{D_r^A(\lambda)}{D_{r-1}^A(\lambda)},$$

即$d_1(\lambda)$，$d_2(\lambda)$，…，$d_r(\lambda)$是$A(\lambda)$的不变因子。

由于$D_i^A(\lambda)$（$i=1,\cdots,r$）是由$A(\lambda)$唯一确定的，故$d_i(\lambda)$（$i=1,\cdots,r$）也是由$A(\lambda)$唯一确定的，于是有

推论 2 多项式矩阵$A(\lambda)$的Smith标准形是唯一的。

定理1.3.2 设$A(\lambda)$，$B(\lambda)$是$m\times n$的多项式矩阵，则以下命题是等价的：

1° $A(\lambda)\simeq B(\lambda)$。

2° $A(\lambda)$，$B(\lambda)$有相同的各级行列式因子。

3° $A(\lambda)$，$B(\lambda)$有相同的不变因子。

4° $A(\lambda)$，$B(\lambda)$有相同的Smith标准形。

5° 存在$m\times m$的单模态矩阵$P(\lambda)$与$n\times n$的单模态矩阵$Q(\lambda)$，使$B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$。

证明 采用循环证法：

1°⇒2°⇒3°⇒4°⇒1°，然后1°⇒5°⇒1°。

1°⇒2°：由定理1.3.1即得。

2°⇒3°：若$A(\lambda)$与$B(\lambda)$有相同的行列式因子$D_i^A(\lambda)=D_i^B(\lambda)$，$(i=1,2,\cdots,r)$从而有

$$d_1^A(\lambda)=D_1^A(\lambda)=D_1^B(\lambda)=d_1^B(\lambda),$$

$$d_i^A(\lambda)=\frac{D_i^A(\lambda)}{D_{i-1}^A(\lambda)}=\frac{D_i^B(\lambda)}{D_{i-1}^B(\lambda)}=d_i^B(\lambda),\quad (i=2,3,\cdots,r)。$$

3°⇒4°及4°⇒1°显然。

1°⇒5°：由等价定义可知，有$m\times m$的初等矩阵P_1，…，P_s及$n\times n$的初等矩阵Q_1，…，Q_t使

$$B(\lambda)=P_s\cdots P_1A(\lambda)Q_1\cdots Q_t$$

记$P(\lambda)=P_s\cdots P_1$，$Q(\lambda)=Q_1\cdots Q_t$，则$P(\lambda)$，$Q(\lambda)$为单模态矩阵，从而有$B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$。

5°⇒1° 设$P(\lambda)$，$Q(\lambda)$为单模态矩阵，使

$$B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda),$$

欲证$A(\lambda)\simeq B(\lambda)$，只需证明单模态矩阵$P(\lambda)$，$Q(\lambda)$可表示为初等矩阵之积。

因为$P(\lambda)$是单模态矩阵，因此$det[P(\lambda)]=a\neq 0$，从而$P(\lambda)$的各级行列式因子为

$$D_n(\lambda)=D_{n-1}(\lambda)=\cdots=D_1(\lambda)=1$$

不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=\cdots=d_n(\lambda)=1$$

所以$P(\lambda)\simeq E$. 从而有初等矩阵$P_1,\cdots,P_s$，$\widehat{P}_1$，…，$\widehat{P}_t$，使

$$\begin{aligned}P(\lambda)&=P_s\cdots P_1E\widehat{P}_1\cdots\widehat{P}_t\\&=P_s\cdots P_1\widehat{P}_1\cdots\widehat{P}_t.\end{aligned}$$

仿此可证$Q(\lambda)$也可表示为初等矩阵之积，那么$A(\lambda)$经过有限次初等变换化为$B(\lambda)$，于是$A(\lambda)\simeq B(\lambda)$。

为了进一步讨论多项式矩阵等价的充要条件，下面引进初等因子的概念（以下内容在复数域内进行讨论）。

定义1.3.3 设$A(\lambda)$是$m\times n$的多项式矩阵，$rank[A(\lambda)]=r$。不变因子为$d_1(\lambda)$，$d_2(\lambda)$，…，$d_r(\lambda)$，$d_{i-1}(\lambda)|d_i(\lambda)$，$(i=2,3,\cdots,r)$。把$d_i(\lambda)$在复数域$C$上分解成质

多项式的方幂之积：

$$d_1(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{12}}\cdots(\lambda-\lambda_j)^{k_{1j}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{k_{1t}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$d_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{i2}}\cdots(\lambda-\lambda_j)^{k_{ij}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{k_{it}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$d_r(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{r1}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{r2}}\cdots(\lambda-\lambda_j)^{k_{rj}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{k_{rt}},$$

其中$\lambda_i\neq\lambda_j$（$i\neq j$），$k_{rj}>0$（$j=1,2,\cdots,t$），其它$k_{ij}\geqslant 0$（$i=1,2,\cdots,r-1$，$j=1,2,\cdots,t$），则称其中$k_{ij}>0$的一切$(\lambda-\lambda_j)^{k_{ij}}$（$i=1,2,\cdots r$，$j=1,2,\cdots,t$）为$A(\lambda)$的初等因子。

要注意，在计算初等因子的个数时，重复的初等因子按重数计算，全部初等因子称为$A(\lambda)$的初等因子组。

$$(\lambda-\lambda_j)^{k_{1j}},\ (\lambda-\lambda_j)^{k_{2j}},\cdots,(\lambda-\lambda_j)^{k_{r-1,j}},\ (\lambda-\lambda_j)^{k_{rj}},$$

称为与$(\lambda-\lambda_j)$相当的初等因子，由$d_{i-1}(\lambda)|d_i(\lambda)$，有

$$k_{1j}\leqslant k_{2j}\leqslant\cdots\leqslant k_{r-1,j}\leqslant k_{rj}\qquad(j=1,2,\cdots,t).$$

这就说明与$(\lambda-\lambda_j)$相当的初等因子中，方幂最高的必定出现在不变因子$d_r(\lambda)$的分解式中，方幂次高的出现在$d_{r-1}(\lambda)$中，如此顺推下去，便知与$(\lambda-\lambda_j)$相当的初等因子在不变因子的分解式中出现的位置是唯一确定的。

定理1.3.3 设$A(\lambda)$，$B(\lambda)$是$m\times n$的多项式矩阵，那么$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价的充分必要条件是它们有相同的秩和相同的初等因子组。

证明 必要性显然。

充分性 设$rank[A(\lambda)]=rank[B(\lambda)]=r$，并且$A(\lambda)$与$B(\lambda)$有相同的初等因子组。下面我们由初等因子和秩唯一地作出不变因子。在初等因子组中将与$(\lambda-\lambda_j)$相当的初等因子按降幂排列，如果与$(\lambda-\lambda_j)$相当的初等因子不足r个时，就在后面补上几个1，使之凑成r个，所得初等因子排列为

$$(\lambda-\lambda_j)^{k_{rj}},\ (\lambda-\lambda_j)^{k_{r-1,j}},\cdots,(\lambda-\lambda_j)^{k_{2j}},\ (\lambda-\lambda_j)^{k_{1j}},$$

显然，$(\lambda-\lambda_j)^{k_{rj}}$（$j=1,2,\cdots,t$）是$d_r^A(\lambda)$的因式，$(\lambda-\lambda_j)^{k_{r-1,j}}$是$d_{r-1}^A(\lambda)$的因式，如此顺推下去，其结果是

$$d_i^A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}\cdots(\lambda-\lambda_j)^{k_{ij}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{k_{it}}$$

$$(i=1,2,\cdots,r).$$

再由$B(\lambda)$与$A(\lambda)$有相同的秩与相同的初等因子组，从而也有

$$d_i^B(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{i1}}\cdots(\lambda-\lambda_j)^{k_{ij}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{k_{it}},$$

所以

$$d_i^A(\lambda)=d_i^B(\lambda),\quad(i=1,2,\cdots,r)$$

此即$A(\lambda)\simeq B(\lambda)$。

应当注意，定理中$rank[A(\lambda)]=rank[B(\lambda)]$的条件是必不可少的，也就是说：两个多项式矩阵虽有相同的初等因子组，但它们可能不等价。例如

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(\lambda-1)(\lambda-2)&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad B(\lambda)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-1)(\lambda-2)\end{pmatrix},$$