

高等学校电子信息类教材

自动控制原理

• 杨庚辰 主编

Automatic Control

西安电子科技大学出版社

<http://www.xduph.com>

高等学校电子信息类教材

自动控制原理

杨庚辰 主编

西安电子科技大学出版社

(陕)新登字 010 号

内 容 简 介

本书内容主要包括：线性控制系统的数学模型——微分方程、传递函数、动态结构图、时域分析法、根轨迹法、频域分析法及系统的设计校正和试验技术；非线性控制系统的描述函数法和相平面法；采样控制系统的脉冲传递函数，采样控制系统的分析方法；Z 变换及拉普拉斯变换。

该书取材合理，结构严谨，叙述流畅，举例丰富，每章末均附有习题，既适合作各类成人教育相关专业的教材，也可用作大专院校非自动控制专业的教学用书，同时，也适合于广大读者自学使用。

自动控制原理

杨庚辰 主编

责任编辑 云立实

西安电子科技大学出版社出版发行

渭南市邮电印刷厂印刷

新华书店经销

开本 787×1092 1/16 印张 14.5 字数：344 千字

1994 年 5 月第 1 版 2001 年 9 月第 7 次印刷 印数：35 001~39 000

ISBN 7-5606-0329-7/TN·0086

定价：15.00 元

前 言

本书是根据陕西省自学考试委员会制定的电子技术专业“自动控制原理”课程的教学大纲编写的。参考教学时数为 72 学时。主要讲述经典控制理论的基本内容，并以线性系统的时域法和频域法为主，为适应新技术发展的需要，适当介绍非线性控制系统和采样控制系统。

编者在编写本书过程中，力求使内容符合教学大纲的基本要求。充分注意课程内容的精练、循序渐进、深入浅出和联系实际。既注意精减篇幅，又注意保持本门课程的系统性、连续性，以便于自学。本书各章均附有适量的例题和习题，以便读者能更好地掌握基本概念、基本理论以及分析与综合的基本方法。

本书第一、二、三、四、五、七章及附录由杨庚辰编写，第六、八章由过润秋编写。

在编写过程中，参考了兄弟院校教材的部分内容，特此说明并表示谢意。

由于编者水平有限，错误和不当之处在所难免，敬希广大读者批评指正。

编 者

1993. 12

11-3-123

目 录

第一章 绪论.....	1
第一节 引言.....	1
第二节 开环控制系统和闭环控制系统.....	1
第三节 自动控制系统分类.....	2
第四节 控制系统基本要求.....	4
习题.....	6
第二章 控制系统数学模型.....	7
第一节 微分方程.....	7
第二节 非线性微分方程线性化	11
第三节 传递函数	13
第四节 动态结构图	17
习题	25
第三章 时域分析法	28
第一节 典型输入信号	28
第二节 阶跃响应的性能指标	29
第三节 一阶系统时域分析	31
第四节 二阶系统时域分析	33
第五节 高阶系统分析	42
第六节 控制系统的稳定性	42
第七节 控制系统的稳态误差分析	47
第八节 改善系统性能的措施	51
习题	54
第四章 根轨迹法	58
第一节 根轨迹	58
第二节 根轨迹方程	59
第三节 绘制根轨迹的一般规则	61
第四节 控制系统根轨迹分析	71
第五节 参数根轨迹	79
习题	82
第五章 频域分析法	85
第一节 频率特性	85
第二节 频率特性表示方法	86
第三节 典型环节的频率特性	89

第四节	系统开环频率特性	96
第五节	奈奎斯特 H. Nyquist 稳定判据	99
第六节	稳定裕度	104
第七节	闭环频率特性	108
第八节	开环频率特性和系统阶跃响应的关系	113
习题		116
第六章	控制系统的设计、校正与试验	120
第一节	控制系统设计与校正的概念	120
第二节	串联校正	123
第三节	反馈校正	130
第四节	控制系统的试验	132
习题		140
第七章	非线性控制系统	142
第一节	非线性控制系统的基本概念	142
第二节	非线性系统的特性	143
第三节	描述函数法	145
第四节	相平面分析法	167
习题		176
第八章	采样控制系统	178
第一节	采样控制系统的基本概念	178
第二节	采样过程及采样定理	181
第三节	信号保持器	184
第四节	Z 变换	187
第五节	采样系统的数学模型	195
第六节	采样控制系统的分析	205
习题		215
附录	拉普拉斯变换	220
参考文献		226

第一章 绪 论

第一节 引 言

近几十年来,自动控制技术发展得非常迅速,已广泛地应用于工农业生产、交通运输、国防建设及航天事业等许多领域中。

所谓自动控制,是指在无人直接参与的情况下,利用控制器操纵被控对象,使被控量自动地按预先规定的规律运行。“自动”是相对于“人工操作”而言,自动控制即可代替人工操作,减轻人的重复劳动,又可在人无法忍受的环境条件下(如高温、缺氧等)工作,还可以具有人工操作达不到的速度和精度。

自动控制系统一般由控制器和被控对象组成。自动控制系统的功能及组成是多种多样的,其结构有简有繁。它可以简单到只是控制一个物理量(如温度、速度、电平),也可以是包括整个企业全部过程的大系统,还可以是抽象的社会、生态、经济系统等等。

自动控制原理是研究自动控制技术的基础理论。本世纪 50 年代,以反馈控制原理为基础的自动控制理论已经形成比较完整的体系,称为经典控制理论。它以传递函数为工具,研究单输入 - 单输出的自动控制系统的分析与设计问题。主要研究方法是时域法、频率法和根轨迹法。这些理论已经成熟,并在工程技术中得到广泛的应用。本书主要介绍这些内容。

现代控制理论是以状态空间法为基础,研究多输入 - 多输出、变参数、非线性等控制系统的理论。它是在经典控制理论的基础上发展起来的,是对经典控制理论的重大突破。由于微电子技术、计算技术、航天技术等学科的高度和工程实践的需要,现代控制理论近来得到迅速发展,它为自动控制理论和自动控制技术发展提供了美好的前景。

第二节 开环控制系统和闭环控制系统

一、开环控制系统

如果控制系统的输出量对系统的控制作用没有任何影响,称这种控制系统为开环控制系统。图 1-1 所表示的直流电动机转速控制系统就是开环控制系统。图中控制系统的输入量为给定电压 u_r , 输出量(被控制量)是电动机或负载的转速 n , 电动机激磁电压 u_f 是常量。采用电枢控制。调整电位器的旋臂的位置,可改变输入量 u_r , 从而得到不同的电机转速 n 。如果出现力矩扰动,电动机转速就随之改变,要维持给定的转速不变,就要调整电位器旋臂位置,改变输入电压 u_r , 使电动机恢复到原来给定位置。它的输出量 n 对输入量(控制作

用)无影响,故属开环控制系统。

开环控制系统的原理方框图如图 1-2 所示。

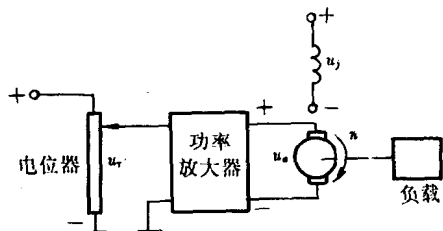


图 1-1 直流电动机转速开环控制系统

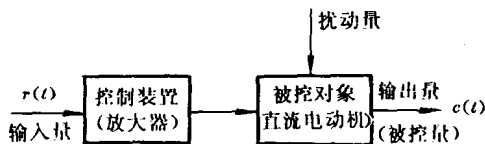


图 1-2 开环控制系统方框图

由上述工作过程可知,开环控制系统结构简单、成本低、工作稳定性好;但它不具备自动修正被控输出量偏差的能力,因此系统的精度低。

二、闭环控制系统

系统的输出量对控制作用有影响的控制系统,称为闭环控制系统。

图 1-3 所示的控制系统为直流电动机转速闭环控制系统。它的工作过程是:由测速发电机将电动机的实际转速 n 测量出来,并转换成与输入相同的物理量电压 u_f ,然后反馈到输入端,与给定电压 u_r 相比较,其偏差值 $u_e(u_e = u_r - u_f)$ 经放大后,用来控制电动机的转速 n ,使电动机保持在给定的转速状态下运转。如果有扰动使负载增大,则电机转速下降,测速发电机输出电压 u_f 减小,与给定电压 u_r 比较后的偏差电压 u_e 增大,电枢电压相应增大,从而使电机转速提高。反之亦然。这样就使系统基本上恒速运转。

闭环控制系统的方框图如图 1-4 所示。

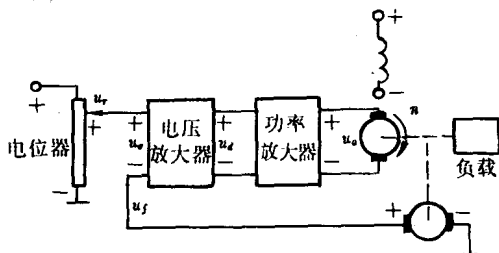


图 1-3 直流电动机转速闭环控制系统

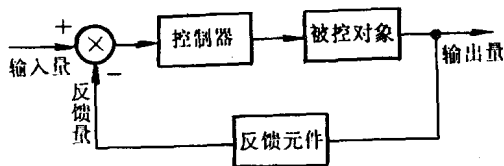


图 1-4 闭环控制系统方框图

反馈控制系统一个突出的优点是不管什么原因引起被控量偏离给定值时,就一定有相应的控制作用产生,而这种控制作用将减小或消除偏差,使被控量趋近于恢复到要求值,即有自动修正输出量的能力。但闭环控制系统不仅使用元件多,结构复杂,而且由于反馈作用,如果系统参数配合不当时,调解过程可能变得很差,甚至出现发散或等幅的振荡等不稳定情况。当然,只有按负反馈原理组成的闭环控制系统才能实现自动控制。

第三节 自动控制系统分类

自动控制系统的种类很多,应用范围也十分广泛,它们的结构、性能和控制任务也各

不相同。因此，其分类方法很多。

一、按给定输入值分类

按输入作用变化情况，控制系统可分为恒值控制系统、随动系统和程序控制系统

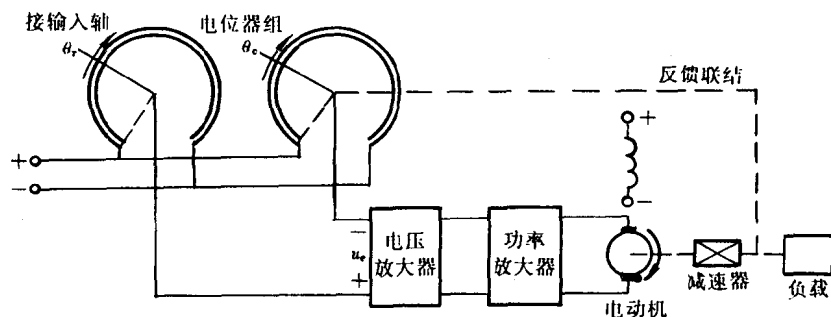
1. 恒值控制系统

在这类系统中，给定值是不变的。但由于扰动的存在，将使被控量偏离期望值，控制系统能根据偏差产生控制作用，使被控量恢复到期望值，以克服扰动作用的影响。前面所举的电动机转速控制系统，当给定值不变时，就是一恒值控制系统。

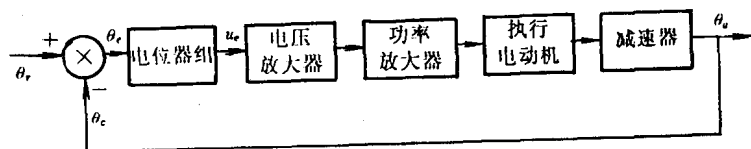
2. 随动系统

这类系统其给定值是预先不知道的随时间任意变化的函数。控制系统能够使被控量以尽可能小的误差跟随给定值(即输入量)的变化。随动系统也能克服各种扰动作用的影响。

图 1-5(a)、(b)分别为一位置随动系统的原理图及方框图。控制系统是控制工作机械的位置，使之按指令电位器(或称给定电位器)给定的规律变化。操作者移动指令电位器的滑臂，则滑臂的角度位置被转换成为电压 u_r ，被控对象的位置由反馈电位器检测并转换成



(a) 位置随动系统原理图



(b) 位置随动系统方框图

图 1-5 位置随动系统

反馈电压 u_f 。当工作机械位置与指令信号位置有偏差时，通过两个电位器组成的桥式电路得到偏差电压 $u_e = u_r - u_f$ 。即当给定量 θ_r 与被控量 θ_c 不等时，电位器便有偏差电压 u_e 输出。 u_e 经放大后，使执行电动机连同工作机械和输出电位器的滑臂一起跟随给定值 θ_r ，直至 $\theta_c = \theta_r$ 。执行电动机便停止运转。不管 θ_r 以什么规律变化， θ_c 都能跟随其变化，故称之为随动系统。由图 1-5(b) 看出，这种系统属于单位反馈系统。

3. 程序控制系统

给定值按预先编制的程序变化的控制系统，称为程序控制系统。机械加工中的程序控制机床就是一个典型的例子。

二、线性系统和非线性系统

根据组成自动控制系统的主要元件的动态方程式的特征,控制系统可分为线性控制系统和非线性控制系统。

1. 线性控制系统

由线性元件组成的系统,称为线性控制系统。该系统的运动方程式用线性微分方程描述。系统的主要特点是具有齐次性和叠加性。系统响应与初始状态无关,系统的稳定性与输入信号无关。

线性微分方程式的系数为常数时,称为定常线性系统。本课程主要研究定常线性系统。

2. 非线性控制系统

在自动控制系统中,凡含有一个或一个以上非线性元件,称为非线性控制系统。非线性系统用非线性微分方程描述且不能用叠加原理,系统响应与初始状态有极大的关系。

三、连续控制系统和离散控制系统

1. 连续控制系统

系统中各部分信号都是连续函数形式的模拟量,此系统就称作连续控制系统。如前所述的直流电动机转速控制系统和随动系统都属连续控制系统。

2. 离散控制系统

所谓离散控制系统是指在控制系统的一处或数处的信号为脉冲列或数码传递系统。

如果在系统中使用了采样开关,将连续函数形式的信号转变为脉冲列形式信号去控制系统,则称此系统为采样控制系统。

如果在系统中采用了数字计算机或数字控制器,其信号是以数码形式传递,则称此系统为采样数字控制系统,或简称数字控制系统。

通常把采样控制系统和数字控制系统称为离散控制系统或采样控制系统。描述离散控制系统运动用差分方程式。同连续控制系统一样,离散控制系统也有线性和非线性离散控制系统之分。

随着现代科学和生产技术的发展,对控制技术的要求越来越高,出现了许多新的、更加复杂、性能更先进的自动控制系统。例如最优控制系统和自适应控制系统等等。

第四节 控制系统基本要求

为了使被控对象按预定的规律变化,自动控制系统必须具备一定的性能。这些性能主要包括:稳定性好、响应迅速和精度高。

一、稳定性

任何一个能够正常工作的控制系统,首先必须是稳定的。由于控制系统是具有反馈作用的闭环系统,因此,系统有可能趋向振荡或不稳定。不稳定的系统是无法工作的。

稳定的控制系统在阶跃信号或扰动信号的作用下,其响应的暂态过程应该是收敛的。如图 1-6 所示。若系统设计不当,则在阶跃信号或扰动信号的作用下,响应的幅值振荡可能成为等幅振荡,甚至成为振幅逐渐增大的发散振荡,发生这种情况的系统称为不稳定系统。

系统稳定性包括两方面的含义。一是系统稳定,叫作绝对稳定性,即通常所说的稳定性。另一方面的含义是输出响应振荡的强烈程度,称为相对稳定性。例如系统是绝对稳定的,但是在阶跃信号作用下,响应振荡很强烈,而且振荡的衰减很慢,我们就说此系统虽属稳定系统,但相对稳定性很差。

考虑到实际系统中元件的参数和特性都会产生一些变化,因此,要求系统不但必须是稳定的,而且还应有一定的稳定裕度,以保证在元件参数略有变化时,系统仍能保持稳定。

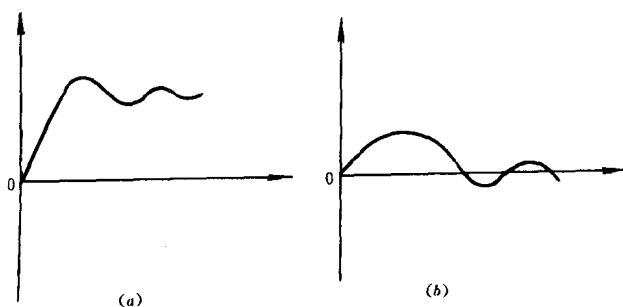


图 1-6 控制系统响应

二、快速性

在实际工作中,不仅要求系统稳定,而且要求被控量能迅速按照输入信号所规定的形式变化。即要求系统具有一定的响应速度。由于系统中总包含一些惯性元件,因此在输入信号作用下,其响应总要经过暂态过程之后才能达到稳态。调整时间就反映了系统响应的速度。

三、精确度

要求系统稳态精度高,一般用稳态误差评价。系统在输入信号的作用下,其响应经过暂态过程进入稳态后,系统的输出值与期望值之间存在的误差,叫做稳态误差。

要求系统没有误差是不可能的。因为反馈控制系统本身就建立在偏差控制的基础上。如主反馈信号与输入信号之间不存在偏差,则系统就不会产生控制作用。控制系统产生误差的主要因素是:

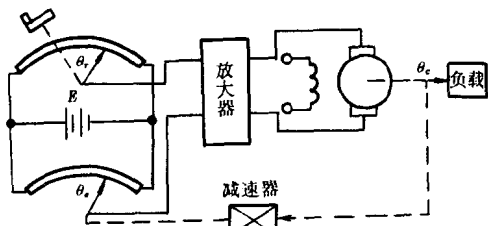
- (1) 系统本身的原理性误差。它与系统的结构有关,又与输入信号的性质有关。
- (2) 由于系统的结构和元件的特性不够完善以及非线性因素造成的误差。如传动机构中的齿隙、偏心、机械摩擦以及电磁元件的饱和、死区、磁滞等非线性因素引起的误差。
- (3) 系统内部或外部存在的各种干扰所产生的误差。如放大器中的起伏噪声、温度漂移、电磁元件中的杂散耦合、机械振动和风力矩等所引起的干扰误差。

【习 题】

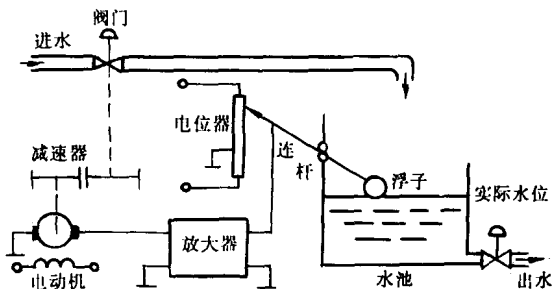
1-1 举出几个开环控制系统和闭环控制系统的例子。说明其工作原理。

1-2 题图 1-2 所示为一随动系统。试说明工作原理并画出其方块图。

1-3 习题图 1-3 所示为水位自动控制系统示意图。说明系统的工作原理、组成，并画出方块图。

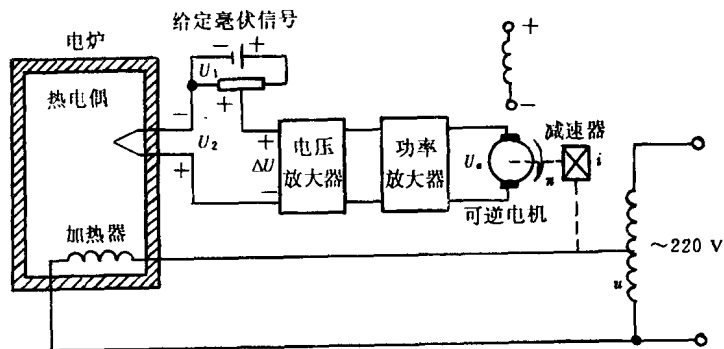


习题图 1-2



习题图 1-3

1-4 习题图 1-4 为一温度控制系统原理图。指出系统输入量和被控量，说明控制器各部分的作用，画出系统方块图。



习题图 1-4

第二章 控制系统数学模型

欲分析自动控制系统的性能,首先要建立系统的数学模型。描述系统在运动过程中各变量之间相互关系的数学表达式,称为数学模型。在经典控制理论中,采用输入-输出的描述方法,常用的数学模型有微分方程、传递函数和动态结构图。

一个物理系统,要处理的问题不同或要求达到的精度不同,可以得到不同的数学模型。在建立模型过程中,根据系统的实际结构、参数及计算所要求的精度,忽略一些次要因素,如分布参数,随时间变化的参数等,使数学模型既能准确地反映系统的动态本质,又能简化分析计算工作。

简化的数学模型通常是一个线性微分方程式。它描述的系统称为线性系统。如线性微分方程的系数是常数,称相应的系统为线性定常系统。本书主要研究线性定常系统。凡能用微分方程描述的系统,都是连续时间系统。如果系统中含有数字计算机或数字元件,须用差分方程来描述,称这种系统为离散时间系统。若系统中存在非线性,须用非线性微分方程来描述,称这种系统为非线性系统。

第一节 微分方程

微分方程是自动控制系统数学模型最基本的形式。传递函数、动态结构图都可由它演化而来。用解析法列写微分方程的一般步骤是:

- ①根据系统或元件的工作原理,确定系统和各元件的输入、输出变量。
- ②从输入端开始,按照信号的传递顺序,依据各变量所遵循的物理或化学定律,按技术要求忽略一些次要因素,并考虑相邻元件的彼此影响,列出微分方程,一般为微分方程组。
- ③消去中间变量,求得描述输入量与输出量关系的微分方程式。
- ④标准化。将与输入变量有关的各项放在等号右侧,与输出变量有关的各项放在等号左侧,并按降幂排列。最后将系数归化为具有一定物理意义的形式。

例 2-1 试列写图 2-1 所示的 RC 无源网络的微分方程。给定输入量为 u_r , 输出量为 u_c 。

解 根据克希霍夫定律,可写出

$$u_r = Ri + \frac{1}{C} \int idt \quad (2-1)$$

$$u_c = \frac{1}{C} \int idt \quad (2-2)$$

式中 i 为流经电阻 R 和电容器 C 的电流。从上面二

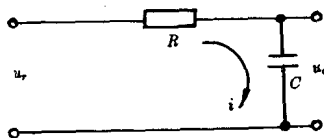


图 2-1 RC 网络

式中消去中间变量 i , 得

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r \quad (2-3)$$

令 $RC = T$, 上式可写作

$$T \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r \quad (2-4)$$

T 称为 RC 网络的时间常数。 RC 网络的动态数学模型为一个一阶常系数微分方程。

例 2-2 图 2-2 所示为一由弹簧、质量、阻尼器组成的机械振动系统。试写出系统的数学模型。输入量为外力 F , 输出量为位移 y 。

解 根据牛顿定律有

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_i \quad (2-5)$$

式中 $\sum F_i$ 为作用在物体 m 上的合力, $\sum F_i = F - F_s - F_k$ 。其中阻尼器的粘滞摩擦阻力

$$F_k = f \frac{dy}{dt} \quad (2-6)$$

弹簧力

$$F_s = Ky \quad (2-7)$$

将式(2-6)、(2-7)代入(2-5), 并标准化, 得机械系统的动态运动方程式为

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + Ky = F \quad (2-8)$$

它为一个二阶常系数微分方程。

例 2-3 求图 2-3 所示的有源网络的微分方程。给定 u_r 为输入量, u_c 为输出量。

解 运算放大器工作时, $u_b \approx 0$ (称 B 点为虚地), 故 $i_1 = i_2$ 。根据电流定律有

$$C_1 \frac{du_r}{dt} + \frac{u_r}{R_1} = -\frac{u_c}{R_2} \quad (2-9)$$

或

$$C_1 R_1 \frac{du_r}{dt} + u_r = -\frac{R_1}{R_2} u_c$$

$$\tau \frac{du_r}{dt} + u_r = -Ku_c \quad (2-10)$$

式中, $\tau = C_1 R_1$, $K = \frac{R_1}{R_2}$, 微分方程是一个一阶常系数微分方程。

例 2-4 试列写电枢控制的他激直流电动机的微分方程。以电枢电压为输入量, 以电机转角为输出量。

电动机原理如图 2-4 所示, 图中,

R_a ——电枢电阻;

L_a ——电枢电感;

i_a ——电枢电流;

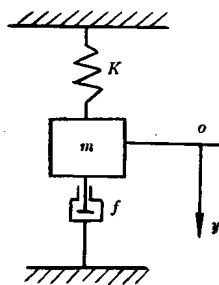


图 2-2 机械振动系统

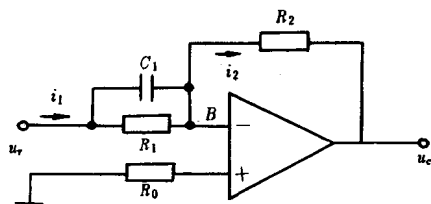


图 2-3 有源网络

u_a ——电枢输入电压；
 i_f ——固定激磁电流；
 E_b ——电枢反电势；
 θ_m ——电机转角；
 f_m ——电动机粘滞摩擦系数；
 J_m ——电动机转动惯量。

解 因为激磁电流为固定值，故激磁磁通为常量。

由克希霍夫定律，得到电枢回路的微分方程为

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + E_b = u_a \quad (2-11)$$

电动机电枢反电势 E_b 与电枢角速度成正比，即

$$E_b = K_b \frac{d\theta_m}{dt} \quad (2-12)$$

K_b 为反电势系数。

根据刚体转动的牛顿定律，得电枢力矩平衡微分方程式

$$J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + f_m \frac{d\theta_m}{dt} = M \quad (2-13)$$

电动机电磁转矩 M 正比于电枢电流 i_a ，即

$$M = K_a i_a \quad (2-14)$$

K_a 为力矩常数。

将上面四个公式依次代入，并消去中间变量，得

$$L_a J_m \frac{d^3\theta_m}{dt^3} + (L_a f_m + R_a J_m) \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + (R_a f_m + K_a K_b) \frac{d\theta_m}{dt} = K_a u_a \quad (2-15)$$

直流电动机的运动方程式为一三阶常数微分方程。通常，电枢绕组的电感 L_a 较小，若忽略不计，则运动方程简化为

$$J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + \left(f_m + \frac{K_a K_b}{R_a} \right) \frac{d\theta_m}{dt} = \frac{K_a}{R_a} u_a \quad (2-16)$$

令

$$T_m = \frac{R_a J_m}{R_a f_m + K_a K_b} \quad \text{—— 电动机机电时间常数}$$

$$K_m = \frac{K_a}{R_a f_m + K_a K_b} \quad \text{—— 电动机增益系数}$$

则式(2-16)简化为

$$T_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + \frac{d\theta_m}{dt} = K_m u_a \quad (2-17)$$

例 2-5 某位置随动系统的原理图如图 2-5 所示。系统输入轴角位移为 τ ，输出轴角位移为 c 。列写系统的微分方程。

解

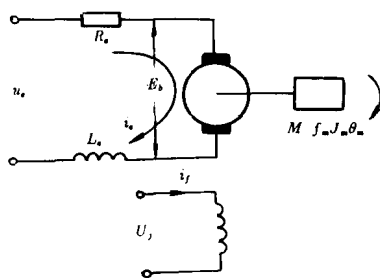


图 2-4 直流电动机原理图

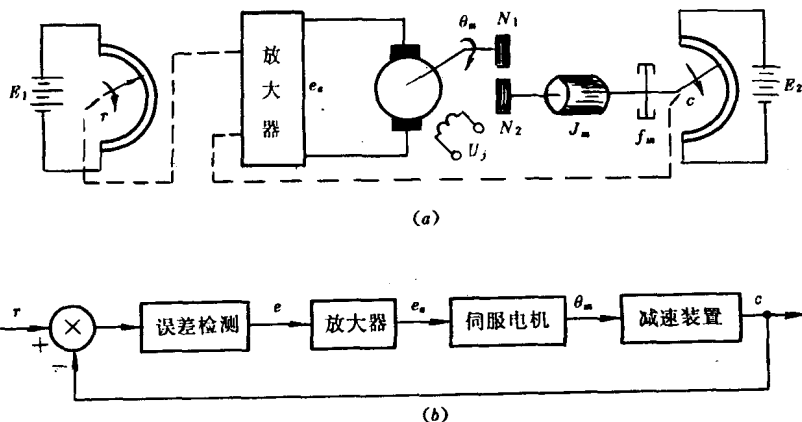


图 2-5 位置随动系统

(1) 误差检测器的输出电压正比于输入轴与输出轴的角偏差

$$e = K_e(r - c) \quad (2-18)$$

K_e 为检测器的比例系数。

(2) 放大器的输出电压正比于输入电压 (忽略放大器时常数)

$$e_a = K_f e \quad (2-19)$$

K_f 为放大器的放大倍数。

(3) 根据例 2-4 的结果, 直流伺服电动机的运动方程式为

$$J_m \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + \left(f_m + \frac{K_a K_b}{R_a} \right) \frac{d\theta_m}{dt} = \frac{K_a}{R_a} e_a \quad (2-20)$$

(4) 减速器的运动方程式为

$$c = \frac{N_1}{N_2} \theta_m = n \theta_m \quad (2-21)$$

式中

$$n = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{—— 齿轮减速器传动比的倒数。}$$

(5) 将式(2-18)、(2-19)、(2-20)、(2-21)合并, 消去中间变量 e 、 e_a 、 θ_m , 得

$$J_m \frac{d^2 c}{dt^2} + \left(f_m + \frac{K_a K_b}{R_a} \right) \frac{dc}{dt} + \frac{K_a K_e K_f n}{R_a} c = \frac{K_a K_e K_f n}{R_a} r \quad (2-22)$$

令: $K = K_e K_f K_a n / R_a$ —— 为系统的增益常数;

$F = f_m + (K_a K_b / R_a)$ —— 为系统的阻尼系数;

$\omega_n = \sqrt{K / J_m}$ —— 为系统的无阻尼自然频率;

$\zeta = \frac{F}{2\omega_n J_m} = \frac{F}{2\sqrt{K J_m}}$ —— 为系统的阻尼比。

则式(2-22)改写为

$$\frac{d^2 c}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dc}{dt} + \omega_n^2 c = \omega_n^2 r \quad (2-23)$$

第二节 非线性微分方程线性化

严格地讲, 控制系统元部件的输入-输出特性, 几乎不同程度地都具有非线性关系。只是在很多情况下, 非线性因素较弱, 被近似看作线性特性。但是有一些元部件, 非线性程度比较严重, 其动态数学模型为非线性微分方程。而非线性微分方程, 求解非常困难。因此, 在理论研究时总是力图将非线性问题在合理可能的条件下简化处理成线性问题。假如非线性元件的变量, 在动态过程中对某一工作状态偏离很小, 那么元件的输出量与输入量之间, 可近似为线性关系。基本方法如下。

①设元件的输入量 $x(t)$ 和输出量 $y(t)$ 的非线性函数为

$$y = f(x) \quad (2-24)$$

在系统工作点 (x_0, y_0) 的邻域内, 式(2-24) $y(t)$ 可表示成台劳级数, 即

$$y = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f(x_0)}{dx^2} (x - x_0)^2 + \dots \quad (2-25)$$

式中

$$\begin{aligned} \frac{df(x_0)}{dx} &= \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \\ \frac{d^2f(x_0)}{dx^2} &= \left. \frac{d^2f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} \end{aligned}$$

因为变量 x 偏离工作点 x_0 的范围较小, 所以增量 $(x - x_0)$ 的高次项可以忽略不计, 故可近似得到

$$y = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx} (x - x_0)$$

即

$$y - y_0 = K(x - x_0) \quad (2-26)$$

式中

$$\begin{aligned} y_0 &= f(x_0) \\ K &= \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \end{aligned}$$

式(2-26)表达了非线性元件在工作点处进行小偏差线性化的基本方程。

②设多变量系统的输入量 x_1, x_2 和输出量 y 的非线性函数为

$$y = f(x_1, x_2) \quad (2-27)$$

则系统在工作点 (y_0, x_{10}, x_{20}) 的邻域内, 式(2-27)的台劳级数为

$$\begin{aligned} y &= f(x_{10}, x_{20}) + f_{x_1}(x_{10}, x_{20})(x_1 - x_{10}) + f_{x_2}(x_{10}, x_{20})(x_2 - x_{20}) \\ &\quad + \frac{1}{2!} [f_{x_1 x_1}(x_{10}, x_{20})(x_1 - x_{10})^2 + 2f_{x_1 x_2}(x_{10}, x_{20})(x_1 - x_{10})(x_2 - x_{20}) \\ &\quad + f_{x_2 x_2}(x_{10}, x_{20})(x_2 - x_{20})^2] + \dots \end{aligned} \quad (2-28)$$

同理, 由于各变量在工作点处偏离很小, 忽略高阶无穷小项, 近似得