数理经济学原理

潘吉勋

吉林大学出版社

SHULIJINGJIXUEYUANLI

数理经济学原理

潘吉勋　编著

责任编辑：崔晓光　　封面设计：杨忠白

吉林大学出版社出版　　吉林省新华书店发行
（长春市解放大路85号）　　吉林大学印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32　　1989年12月第1版
印张：6.8125　　1989年12月第1次印刷
字数：167千字　　印数：1-1 300册

ISBN 7—5601—0374—X/O·51　　定价：1.85元

序

数理经济学是一门有百余年历史的学科，由于一些不必在此加以说明的原因，直至近10年来，才被引进我国。为了培养青年学者从事这方面的研究，相继在不少院校开设了这门课程。本书的部分内容曾作为选修课在吉林大学讲授过，承许多学友的鼓励，作者把它整理充实，写成这本教材。

数理经济学是一门边缘学科，它的最显著的特征就是有效地运用数学方法发现和论证经济学的一些基本原理，这就要求我们不仅要正确地理解这些原理，而且还要熟练地掌握所使用的数学方法。

人们经常提出的一个问题是“数理经济学都用到哪些数学？”笼统地回答：“不择手段。”的确，从微积分学和线代数，到运筹学和拓扑学，涉及十几个数学分支，但又不是大规模地使用某些知识。这给初学者带来不小的麻烦和困难，针对这种情况，本书通过几个专题的论述，介绍了数理经济学的基础知识，希望能够对青年学者有所帮助。

为了基本上作到“知识自给”，第一章讲述了本书必需而大学课程又很少涉及的一些预备知识，其中不动点定理的证明将在第七章最后给出。

第二章和第三章分析了经济个体的决策行为，介绍了消费和生产环节的基本原理。

第四章到第八章，主要是运用对策论的方法研究市场机制。从不同角度考察了微观经济学的主题——均衡理论。这里所用到的数学方法对于解决数理经济学的其它难题也是富有启发性的。

经济领域的问题层出不穷，经济学是一门引人入胜的学科，本书只能涉及其中的基础部分，以作为进一步深造的垫脚

石。至于研究我国的经济问题，发展我国的数理经济学的重担，就责无旁贷地落到青年学者的肩上。

在本书的写作过程中，得到了吉林大学伍卓群教授、李荣华教授以及周钦德教授的充分理解和大力支持，吉林大学出版社的同志付出了辛勤的劳动。在此，谨向他们致以谢意。

书中的疏忽和不妥之处，欢迎读者批评指正。

作者

1988年10月于长春

符 号 说 明

$\mathbf{R}^l$：l-维欧氏空间

$\mathbf{R}^l_+$：$\mathbf{R}^l$中的非负象限

x^i：标号为i的向量

x_i：向量x的第i个分量

$x\cdot y$：向量x和y的内积

$\|x\|$：向量的范数

e^i：$\mathbf{R}^l$中第i个坐标向量

$x\geqslant y$：$x_i\geqslant y_i$，$i=1,2,\cdots,l$

$x>y$：$x\geqslant y$且$x\neq y$

$x\gg y$：$x_i>y_i$，$i=1,2,\cdots,l$

$\mathbf{S}\subset\mathbf{R}^l$：$\mathbf{S}$是$\mathbf{R}^l$中的集合

$\bar{\mathbf{S}}$：集合$\mathbf{S}$的闭包

$\operatorname{int}\mathbf{S}$：集合$\mathbf{S}$的内部

$\operatorname{cov}\mathbf{S}$：集合$\mathbf{S}$的凸包

$\mathbf{S}+\mathbf{T}$：$\{x+y\in\mathbf{R}^l\mid x\in\mathbf{S},\ y\in\mathbf{T}\}$

$\mathbf{S}-\mathbf{T}$：$\{x-y\in\mathbf{R}^l\mid x\in\mathbf{S},\ y\in\mathbf{T}\}$

$\mathbf{S}\times\mathbf{T}$：$\{(x,y)\mid x\in\mathbf{S},\ y\in\mathbf{T}\}$

$\mathbf{S}/\mathbf{T}$：$\{x\in\mathbf{S},\ x\notin\mathbf{T}\}$

f：$\mathbf{S}\to\mathbf{T}$　表示从集合$\mathbf{S}$到$\mathbf{T}$的映射（或函数）

φ：$\mathbf{S}\rightrightarrows\mathbf{T}$　表示从集合$\mathbf{S}$到$\mathbf{T}$的集值映射

ϕ：空集

$|\mathbf{S}|$：集合$\mathbf{S}$中的元素个数

目　录

引　论

一种科学，只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。

卡尔·马克思

在浩翰的知识海洋里，在科学发展的历史长河中，经济学是思想最活跃，内容最丰富的一个学术领域。在这块科学园地中，学派林立，学说纷纭，它们不断地推动经济学的发展，其势头经久不衰。伴随着其它学科的日新月异的发展，学科之间出现了更为实质性的互相渗透。经济学也不例外，数学已经深深地进入了经济学，其重要标志就是计量经济学和数理经济学被系统地建立起来。通常，人们把两者合而为一地称为数量经济学，许多人为此做出了杰出的贡献，自1969年设立诺贝尔经济学奖以来，半数以上的获奖者都是因为有效地应用数学而获得成功的。可见，现代数学给经济学研究带来了巨大的活力。实践将继续证明，数学在经济的定性分析和定量研究方面将发挥越来越大的作用。

数理经济学是沿着一般经济均衡理论的研究这条主线而逐渐形成的。著名的英国古典经济学家 Adam Smith 在其经典著作《国富论》(1776)中有过这样的论述：

“每个人都在力图应用他的资本，来使其生产能够得到最大的价值。……他在这样做时，被一只无形的手引导到他意想不到的目标。由于他追求自身的效用，也经常促进了社会的利益。”

在这段讳莫如深的论述中，L. Walras[1]发现了合理的内核(1874—1877)，他把“无形的手”理解为价格体系，把“社会利益”理解为供需平衡。他提出用一组方程描写国家经济的数学模型，试图说明存在一种均衡价格体系，协调自由经济中

的生产活动和消费活动，使得供需达到平衡．这就是一般均衡理论的雏型．但这部理论远不是尽善尽美的，因为数学远没有提供充足的工具去加以论证，关键的“存在性证明”就是一个悬而未决的大问题．

在此后的半个多世纪里，在这个方面具有划时代意义的工作，当推一代数学大师J．von Neumann[2]在本世纪20年代开创的对策论，他与经济学家O．Morgenstern[3]合作发表了著名的《对策论与经济行为》（1944）一书，澄清了经济的均衡理论和分配理论中许多含糊其词的概念，为经济活动的研究提供了恰当的数学模型，开辟了攻克经济均衡理论的道路．J.K．Arrow[4]和G．Debreu[5]在总结前人工作的基础上，最后完成了一般均衡理论的数学论证（1954）．他们分别于1972年和1983年获得了诺贝尔奖的殊荣，其主要功绩盖源于此．

与均衡理论几乎是并生的分配理论是从F．Y．Edgeworth[6]和V．Pareto[7]开始的（1881）．大体上也是因为缺乏合适的数学工具的原因，这方面的工作进展缓慢．直至本世纪50年代，由于对策论的发展，才得以旧调重弹，使得分配理论的研究获得了新的生机．

对策论在经济理论的研究中占有特殊重要的地位，它的形成与发展，一直是与数理经济学紧密相联的．它从经济问题中吸取营养，从数学武库中寻求工具，出色地解决了许多经济中的疑难问题．同时，也使自身学科不断完善和丰满．它在社会科学的其它方面的应用也日益引起人们的广泛关注．

科学研究工作总是相辅相成，彼此相通的．进入本世纪60年代以来，数理经济学进入了综合发展时期，拓扑学、泛函分析、测度论、控制论和计算数学等纷纷介入经济学领域，学科之间的互相印证互相推动，为数理经济学展示了广阔的发展前景．

用数学方法处理某些社会科学问题，经常遇到许许多多的

困难，所要研究的事物是错综复杂的，需要考虑的因素甚多，对其自身的认识往往很不充分，用社会科学所表述的规律还可能是含糊其词的。因此，在使用数学工具时，就不能象处理自然科学那样得心应手。在用数学方法解决经济问题时，总是要排除一些次要因素的考虑，把问题限制在某个范围内加以研究和论证。与数学进入其它学科（诸如医学和生物学）的初期相仿，常常招致人们的怀疑和贬低。尽管如此，坚冰毕竟打开，数学在社会科学领域里将会是大有用武之地的。实践已经证明，用数学方法对经济问题所作的定性分析是严谨的，用推理方式代替文字或图表的描述是可靠的，令人信服的；用定量分析方法代替经验估算可以避免不必要的失误。

在我们对数学的作用作出乐观估价的同时，必须清醒地意识到数学所处地位。企图把所有的经济问题都纳入数理经济学的想法是荒唐的，也是不现实的。数学总是其它学科的合作伙伴，它着眼于“能做什么”和“怎样做得更好”，这大概正是它在一些边缘学科中获得成功所遵循的路线，这条路线已经并将继续在经济研究领域里得到贯彻，数学家与经济学家的通力合作是发展数理经济学的必由之路。

数理经济学已经作为人类的共同知识财富被肯定下来，但是真正被引进到我国还是近几年的事情。由于许多学者的大力倡导和积极工作，数理经济学的研究和应用正在逐步展开。我们相信在建设具有中国特色的社会主义的历史进程中，新的研究课题将会不断涌现，数理经济学是会大有作为的。

微观经济学和宏观经济学是经济学的两大分支，分别以经济个体和国民经济总体为研究对象。总体是由个体组成的，在这个意义上来说，微观经济学是经济学的基础。本书运用现代数学方法，以其严密的逻辑阐述了微观经济学的基本概念和原理，着重表现在某些经济学的假设（尽管经济学界对其中某些假设可能还有争议）之下，如何运用数学方法去分析和论证经

济规律。学习和掌握了这些人类智慧的成果，将会使我们更有能力去迎接新的研究课题的挑战。

〔附注〕

1）L. Walras(1834—1910) 瑞士经济学家，洛桑大学经济学教授，洛桑学派代表人物。一般均衡理论创始人。著有《纯粹政治经济学原理》(1874)。

2）J. von Neumann(1903—1957) 美籍匈牙利数学家。少年就学德国，是当时被誉为德国的三个“神童”中的一个。30年代移居美国，任Princeton大学数学教授。在许多方面有开创性贡献。1928发表第一篇对策论论文；1929—1932年间发表了《量子力学的数学基础》这一奠基性著作，30年代，领先开辟了泛函分析中无界算子谱论及拓扑线性空间的研究，1937年发表了经济均衡增长模型的论文，1944年与O. Morgenstern合作出版了《对策论与经济行为》一书，本书是这一领域中具划时代意义的文献。40年代末期，是美国第一代电子计算机的创始人，50年代曾任美国总统艾森豪维尔的顾问。

3）O. Morgenstern(1902—1978) 美籍奥地利经济学家。1935年任维也纳大学经济学教授，1938年移居美国。选择Princeton大学任教，以便与von Nenmann合作，1944年任该校教授，发表了许多数理经济学方面的论文。

4）K.J.Arrow(1921—) 美国数理经济学家，美国Harvard大学教授。1942—1946年在美国空军服务。战后从事经济和运筹学研究，他发表的“不可能性定理”为经济学界所称道。曾担任过美国经济学会会长，肯尼迪总统的经济顾问等职。1972年与英国经济学家J. Hicks同时荣获诺贝尔经济学奖。

5）G.Debreu(1921—) 美籍法国数理经济学家，美国California大学经济和数学教授。1944—1945年在法军服务，1949年移居美国任教。主要从事数理经济学研究。曾担任过美国经济学会会长等职。发表了《价值论》和《数理经济论文集》著作。1983年荣获诺贝尔经济学奖。

6）F.R. Edgeworth(1845—1926) 英国著名经济学家。发表了《数学心理学》(1881)和《政治经济学论文集》(1925)等著作。

7）V. Pareto(1848—1923) 著名的意大利经济学家，瑞士洛桑大学教授．发展了Walras的一般均衡理论．发表了《政治经济学》和《数理经济学》等重要著作．

第一章　数学准备

这一章汇集了本书中所需的一些数学基础知识。这些知识不仅在数理经济学中有着重要应用，而且每节标题都已形成了系统的理论，并且有着更为广泛的用途。在处理这部分内容时，我们本着两条原则：其一，使得本书基本上做到知识自给；其二，叙述力求简练节约，以便及早地接触本书的正题。

第一节　凸集和凸函数

关于这个题目的研究，已构成为当今非常活跃的数学分支——凸分析的基础，在优化理论、对策论和数理经济学中都有重要的应用。

1．有限维空间的结构

本书是在有限维空间中讨论问题，有必要对这方面的知识作些简单地回顾。

众所周知，在 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中，定义了线性运算*）：

$$x+y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \cdots,\ x_n+y_n),\quad x,y\in\mathbf{R}^n$$

$$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n),\qquad \alpha\in\mathbf{R},\ x\in\mathbf{R}^n$$

规定了内积和范数：

$$x\cdot y=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i,\qquad x,y\in\mathbf{R}^n$$

$$\|x\|=(x\cdot x)^{\frac{1}{2}},\qquad x\in\mathbf{R}^n$$

*）考虑到与通常惯例相一致，书中的向量的坐标表示总采用列向量。但为了节省篇幅，在不引起混淆的情况下，也采用横写方式。

它们满足：

$$|x\cdot y|\leqslant\|x\|\|y\| \qquad \text{(Cauchy不等式)}$$

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\| \qquad \text{(三角不等式)}$$

在此范数之下，$\mathbf{R}^n$ 构成完备的赋范线性空间，依惯常的方法，可定义序列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=x^0$，$x^0$点的邻域，集合的内点，开集和闭集等概念。

设集合$\mathbf{A}\subset\mathbf{R}^n$，包含$\mathbf{A}$的最小闭集称为集合$\mathbf{A}$的闭包，记作 $\overline{\mathbf{A}}$。

集合$\mathbf{A}$的全部内点构成的集合称为$\mathbf{A}$的内部，记作 int $\mathbf{A}$，显然，如果$x^0\in$ int $\mathbf{A}$，则必存在$x\in\mathbf{A}$，使得 $x\gg x^0$ （见图 1）。

定义1.1.1 称集合$\mathbf{A}$为**紧集**，如果$\mathbf{A}$中的任意序列$\{x^n\}$都有收敛的子列，且极限仍在$\mathbf{A}$中。

下面的定理是众所周知的。

定理1.1.2 (Bolzano-Weierstrass)集合$\mathbf{A}\subset\mathbf{R}^n$是紧集当且当$\mathbf{A}$是有界闭集。

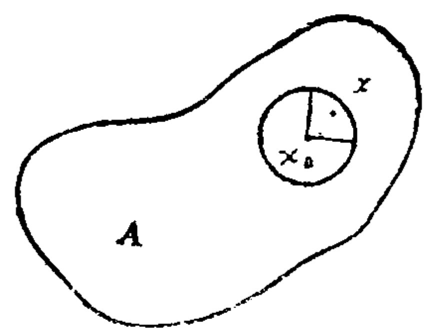

图 1

2. 凸集和凸包

现在，我们引进凸性概念。我们知道，在有限维空间$\mathbf{R}^n$，联结两点$x^1,x^2\in\mathbf{R}^n$的直线段是点集

$$\{x\in\mathbf{R}^n\mid \alpha x^1+(1-\alpha)x^2,\ 0\leqslant\alpha\leqslant1\}$$

通常记此线段为$[x^1,x^2]$，相应地，开线段记为 (x^1,x^2)*)。

定义1.1.3 称集合$\mathbf{S}\subset\mathbf{R}^n$是**凸集**，如果$\mathbf{S}$中任意两点的联线仍在$\mathbf{S}$中，即对任意 $x^1,x^2\in S^n$及$0\leqslant\alpha\leqslant1$，总有 $\alpha x^1+(1-\alpha)x^2\in\mathbf{S}$。

*）关于线段的这种表示法，不必区别端点的次序