

蒋智翔 编著

材料力学

上册

清华大学出版社

内 容 简 介

本书为工科高等院校的材料力学教材。书中对材料力学基本内容部分的课程体系作了较大的变动。内容安排力求由浅入深，突出重点，以利于自学及缩短教学时间。同时，加强了某些进一步内容的基础知识及分析方法。

全书分为上下两册。上册内容为细长杆件的强度、刚度及稳定计算。可单独作为机械类型中学时专业的教材。下册内容包括超静定结构、实验应力分析、能量理论、开口薄壁杆件的非均匀翘曲以及弹性理论的基本知识。上下册合用可作为机械类型多学时专业的教材，有些章节可作为因材施教内容。

本书各章都附有思考题及习题。

材 料 力 学

(上 册)

蒋 智 翔 编 著

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

清华大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

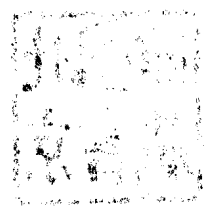
☆

开本：787×1092 1/16 印张：21 1/4 字数：540 千字

1985 年 9 月第一版 1985 年 9 月第一次印刷

印数：000001~20000

统一书号：15235·175 定价：3.80 元



序 言

目前国内材料力学课程大部分是按苏联体系于五十年代逐步建立起来的。六十年代虽然在理论联系实际方面有所改进,但总的体系结构仍基本上保持不变。这种体系的特点是学科的系统性严格,每个章节的概念及内容全面完整。对于已学过材料力学的同志,作为参考书是较适用的。但对于初次学习材料力学的学生,由于课程体系中不很注意学生的认识规律,在学习过程中往往感到目的性不明确,概念集中,方法繁多,不易掌握重点。为了解决此矛盾,在教学过程中必须按排较多的辅导课加以引导,以致辅导课在整个学时中占了较大的比重。这样,由于教学时间有限,在材料力学的大纲中,长期以来仅能包括细长杆件的基本内容,难以增添进一步的要求及现代内容。

本书对材料力学的课程体系作了较大的变动。基本思想是根据学生学习认识规律,尽量缩短学习杆件基本内容的教学时间,以便创造条件讲授进一步的内容。在课程体系的安排中,力图作到由浅入深,每个章节突出主要矛盾,使学生在在学习过程中目的性较明确,易于掌握重点及基本概念。这样就有可能在讲课后完成必要数量的基本类型习题,而辅导课起到总结提高的作用。经过编者数年多学时机械类型材料力学课程的教学实践,按此体系进行教学在保证杆件基本内容的教学质量及不增加学生负担的前提下,能够减少大量的辅导课,从而能增添一定的进一步内容,例如一般薄壁杆件的应力计算(不包括约束扭转)、实验应力分析、位移法解超静定问题、能量法基本定理及其应用以及其他的专题等。这些内容(包括实践环节)约占总学时的四分之一左右。

细长杆件强度计算的教学体系简述如下:

第一章 概述 通过拉伸(压缩)杆件的强度计算说明材料力学处理强度问题的基本方法及步骤,从而介绍材料力学的基本概念(应力、变形、应力状态等)及材料力学的分析方法,为进一步分析其他受力形式的强度计算问题准备必要的基础。拉伸(压缩)试验在第四章内讲述,本章内直接给出许用应力,不讨论材料的机械性质。超静定问题在第六及第九章内介绍。材料力学分析方法主要结合弯曲及扭转的应力分析来贯彻。

第二章 弯曲杆件强度的基本问题 主要讨论截面具有一个对称轴且在对称面内承载的细长杆件的弯曲强度计算方法。弯曲剪应力及加载不在对称面内的弯曲问题在第五章内作为弯曲强度进一步问题讲述。

第三章 杆件扭转时的强度及刚度计算 介绍圆轴及非圆截面杆件自由扭转时的强度及刚度计算方法。

第四章 复杂应力状态下的强度条件 在介绍材料在各种受力形式下变形及破坏现象的基础上,全面分析一点的应力状态及材料的破坏原因,建立强度理论。

第五章 杆件强度的进一步问题 主要包括以下两部分内容:

(1) 平面弯曲剪应力及在加载方向截面无对称轴的细长杆件的强度计算方法(弯曲中心、形心主轴等)。

(2) 曲杆、超过弹性范围时杆件的强度计算以及短粗杆件的强度计算。

由上述体系安排可以看出,在前三章内主要突出基本受力形式下细长杆件的强度计算方法,弯曲部分结合工程实际中常用的截面形式杆件着重讲述控制细长杆件强度的主要因素——正应力强度条件。这样能使开始学习材料力学的同学思路较集中,目的性明确,不需要很多辅导课即能掌握强度条件的应用。第四章内集中讨论了材料的破坏原因及一般应力状态下强度问题的分析方法,使同学对材料机械性质、应力状态与强度理论间的联系有系统深入的了解。在第四章的基础上讲述第五章的进一步内容使同学对分析各种形式杆件的强度问题有较全面的了解,同时加深同学对基本受力形式应力公式的应用条件及分析方法的理解决。

此课程体系与原材料力学体系在细长杆件强度计算部分的主要区别在于:

(1) 将拉伸(压缩)试验放在第四章内讲述。对于刚学材料力学的同学,一开始全面引入工作应力及材料机械性质的概念往往使同学感到材料力学的概念很多,比较杂乱,抓不住分析强度问题的主要方法。由于同学的基础尚不够,在此阶段要深入全面地讲述材料的机械性质也是很困难的,只能限于了解一些试验现象及强度、变形指标。从数年的教学实践来看,在建立强度条件时直接引出许用应力,同学并不感到很突然或者不好接受、分析得不够深入等。在第四章内讲述材料机械性质能较深入全面地分析材料的变形能力及破坏原因,为建立强度理论提供感性认识基础。

(2) 在拉伸(压缩)章节内不讲述超静定问题。在拉伸(压缩)章节内解决拉伸(压缩)超静定问题的方法并不是工程实际中常用的方法。讲述的主要目的是要贯彻材料力学解决超静定问题的基本方法(静力、变形及物理三方面条件)。但由于拉伸(压缩)超静定问题的变形条件较为复杂,往往在学习时形成难点,必须要安排习题课进行训练才能较好地掌握,化费了不少不必要的时间。按照本书的体系,在第二章内就推导弯曲正应力公式,完全有条件全面地贯彻材料力学解决超静定问题的基本方法,不必要以拉伸(压缩)超静定问题作为过渡。

(3) 将平面弯曲剪应力及梁的剪应力校核放在第五章内作为弯曲强度进一步问题来介绍。这里主要牵涉到对在强度计算中平面弯曲剪应力的地位的看法。平面弯曲剪应力对细长杆件强度的影响在绝大部分工程实际问题中都是很次要的。对于实心截面及型钢截面,弯曲剪应力对细长杆件强度的影响是完全不必考虑的。可以证明,只有当杆件非常短粗时,弯曲剪应力对强度才有明显的影响,而此时细长杆件的弯曲正应力及剪应力的公式已不适用,利用它们进行计算只有“名义”上的意义。因此,在机械工程设计计算中,弯曲剪应力对细长杆件强度的影响都是忽略不计的。在土建工程的设计计算中只是在确定钢筋混凝土杆件的主应力方向布置钢筋时,弯曲剪应力才真正需要仔细分析。对于组合截面梁,若腹板很狭长,主要应从失稳的角度来控制,弯曲剪应力的影响也不是最主要的。实际上对于细长杆件,分析平面弯曲剪应力的主要目的不在于它对强度的影响,而在于确定弯曲中心的位置,因此只是对在加载方向截面无对称轴的梁才是需要的。这种加载情况在工程实际中是较少出现的。讲述这部分内容的目的主要是加深对平面弯曲理论的全面理解,没有必要与正应力强度条件并列,作为梁的强度计算的基本内容。

(4) 将弯曲中心、惯性矩转轴定理、曲杆、超过弹性范围时的强度分析以及短粗杆等内容集中在第五章内作为杆件强度的进一步问题来讨论。第五章的内容基本上属于下列两种性质:(i)在工程实际中不是经常遇到的,(ii)在材料力学中只是介绍基本概念,不进行全面深入地分析讨论。将这些内容放在弯曲一章(第二章)内讲述往往冲淡弯曲正应力强度条件

的基本训练,转移同学的注意力。粗看起来,这些内容都是一些独立的内容,相互间没有明显的联系。但若以细长杆件平面弯曲理论的应用条件及推导过程将它们贯串起来,仍是有一定的系统性的。结合弯曲中心及惯性矩转轴定理可以加深对平面弯曲概念的理解;结合曲杆及超过弹性范围时的强度分析可以加深对正应力推导过程所作假设的理解;结合短粗杆件可以加深对细长杆件特点的理解等。

在对细长杆件强度计算部分课程体系改革的同时,针对工程设计现代发展的需要,本书中增添了一些进一步内容。除了在有些基本章节中加深基本概念及有关内容外(例如第五章中的一般截面杆件的强度计算、第四章及第八章内的断裂力学简介等),本书主要加强实验应力分析(第十一章)及与有限单元法有关的力学理论基础两部分内容。有限单元法在工程计算中已普遍广泛应用。材料力学作为一门技术基础课,应该为学生今后学习有限单元法提供必要的力学理论基础。为此,本书中在第九章及第十章中增添了位移法解超静定问题以及能量法基本定理及其应用等有关内容。此外,为了满足个别专业及因材施教的需要,书中还增加了弹性基础上梁、薄壁杆件约束扭转及弹性理论知识等章节。

本书分为上、下两册,适用于多学时的机械及力学类专业材料力学课程。上册包括细长杆件强度、刚度及稳定计算等主要基本章节,也适用于中学时类型材料力学课程。

课程体系改革是个很复杂的问题。牵涉范围很广,与教学内容及要求、教学法及教学环节的配合等都有很密切的关系。本书对此作了初步探索。在课程体系改革的教学实践及本书的编写过程中曾得到李清佐及很多其他同志的帮助和支持,特此表示感谢。由于水平有限,书中必然会存在很多缺点及错误,欢迎同志们批评指正。

——编者
1984 年

目 录

第一章 概述

- § 1.1 材料力学的任务及研究方法..... 1
- § 1.2 拉伸(压缩)杆件的强度及变形计算..... 4
- § 1.3 一般受力杆件应力及变形的分析方法..... 12

第二章 弯曲杆件强度的基本问题

- § 2.1 杆件弯曲时的内力..... 20
- § 2.2 集中载荷作用下梁的剪力及弯矩图..... 22
- § 2.3 一般载荷作用下梁及刚架的内力图..... 26
 - (一) 分布载荷作用时的剪力及弯矩图
 - (二) 剪力、弯矩及分布载荷间的微分关系
 - (三) 叠加法画弯矩图
 - (四) 平面刚架平面内受力时的内力图
- § 2.4 细长杆件平面弯曲时的变形规律..... 40
 - (一) 应力分析的超静定性质
 - (二) 平面弯曲时横截面的变形规律
- § 2.5 平面弯曲细长梁的正应力公式及强度计算..... 43
 - (一) 正应力及曲率公式
 - (二) 惯性矩
 - (三) 强度条件
- § 2.6 拉(压)弯联合作用及斜弯曲时杆件的强度计算..... 56
 - (一) 拉(压)弯联合作用
 - (二) 斜弯曲
 - (三) 拉(压)弯组合变形的一般情况

第三章 杆件扭转时的强度及刚度计算

- § 3.1 剪应力及剪应变..... 77
 - (一) 剪应力成对定理
 - (二) 剪应变
- § 3.2 圆轴扭转时的应力及变形..... 80
 - (一) 扭矩及扭矩图
 - (二) 圆轴扭转剪应力及相对扭角计算公式
- § 3.3 圆轴扭转时的强度及刚度计算..... 83
 - (一) 强度条件
 - (二) 刚度条件
 - (三) 传动轴的传递力偶
- § 3.4 非圆截面杆件自由扭转时的应力及变形..... 87
 - (一) 矩形截面
 - (二) 开口薄壁截面

(三) 闭口薄壁截面

第四章 复杂应力状态下的强度条件

§ 4.1 单向拉伸试验	98
§ 4.2 不同形式受力条件下材料的破坏现象	103
(一) 压缩试验	
(二) 扭转试验	
§ 4.3 一点应力状态概念	105
§ 4.4 平面应力状态分析	109
(一) 应力分析	
(二) 应力圆	
§ 4.5 空间应力状态分析	117
(一) 主应力及最大剪应力	
(二) 应变分析	
(三) 弹性变形比能	
§ 4.6 强度理论及其应用	128
(一) 强度理论的目的及其分析方法	
(二) 几种常用的强度理论	
(三) 强度理论的选择及破坏类型的判断	
§ 4.7 一般组合受力时构件的强度计算	133
§ 4.8 线弹性断裂力学简介	141
(一) 理想裂纹附近的应力场 应力强度因子	
(二) 断裂准则及断裂韧性	

第五章 杆件强度的进一步问题

§ 5.1 平面弯曲时细长梁的剪应力及其对强度的影响	151
(一) 平面弯曲时细长梁的剪应力公式	
(二) 弯曲剪应力对细长梁强度的影响	
§ 5.2 短粗杆件的强度计算	163
(一) 自由变形长度较大的短粗构件	
(二) 自由变形长度很小的短粗构件——连接件	
§ 5.3 一般截面细长梁的平面弯曲	166
(一) 平面弯曲时载荷的作用方向 形心主轴	
(二) 平面弯曲时载荷作用的位置 弯曲中心	
§ 5.4 一般截面杆件的强度计算	175
§ 5.5 平面曲杆的弯曲正应力公式	179
§ 5.6 考虑塑性性能时杆件的强度计算	182
(一) 极限状态设计	
(二) 残余应力	

第六章 细长杆件的刚度计算及简单超静定结构

§ 6.1 细长杆件的变形及变位	192
(一) 杆件的变形	
(二) 杆件的变位	
(三) 刚度计算	

§ 6.2	积分法求梁的挠度曲线方程式	197
§ 6.3	等截面直梁小挠度曲线的通用方程式 初始参数法	203
§ 6.4	叠加法求构件的变位	209
	(一) 载荷叠加	
	(二) 变形叠加	
§ 6.5	变形体的虚位移原理	217
§ 6.6	单位载荷法	222
§ 6.7	图形互乘法	229
§ 6.8	弯曲剪应力对细长梁变位的影响	240
§ 6.9	简单超静定结构	242
	(一) 结构的超静定性	
	(二) 力法解超静定结构的基本步骤	
	(三) 超静定结构的特点	
第七章 中心受压杆件的稳定问题		
§ 7.1	平衡的稳定性	267
§ 7.2	压杆的弹性稳定临界载荷	269
	(一) 两端铰支的中心受压杆件	
	(二) 载荷偏心的影响	
	(三) 约束条件的影响	
§ 7.3	压杆的临界应力曲线	275
§ 7.4	压杆的稳定校核	278
	(一) 压杆的稳定条件	
	(二) 压杆稳定承载能力的影响因素	
§ 7.5	细长杆件的纵横弯曲	287
第八章 动荷及高温条件下材料的机械性质及强度计算		
§ 8.1	一般加速度运动构件的强度计算	295
§ 8.2	承受突加载荷作用时材料的机械性质及应力分析	297
§ 8.3	交变应力作用下材料的机械性质及强度计算	299
	(一) 交变应力的循环特征	
	(二) 对称循环交变应力时构件的强度计算	
	(三) 非对称循环交变应力时构件的强度计算	
	(四) 弯曲与扭转交变载荷联合作用时构件的强度计算	
	(五) 断裂力学在交变强度计算中的应用	
§ 8.4	高温时材料的机械性质	317
附录 型钢表		323

第一章 概 述

§ 1.1 材料力学的任务及研究方法

(一) 材料力学的任务

材料力学的任务总的来说是要合理地解决构件的承载能力问题。静力学的主要任务是分析处于平衡状态的构件上的外力（载荷、约束力等）及它们之间应满足的条件——静力平衡条件。在此基础上，材料力学将研究在一定的外力作用下构件的承载能力。具体来说，可分成下列三个方面：

1. 强度问题 构件在载荷作用下不发生“破坏”，保证在设计期限内能安全地工作。
2. 刚度问题 受载后所产生的位移（变形）不影响构件的“正常”工作。
3. 稳度问题 对于设计所要求的构件形状，在载荷作用下的平衡状态是稳定的。

例如，图 1—1 所示的吊车梁结构，强度的要求是很显然的。在最大起吊量作用时，必须保证吊车梁及柱子不会发生“破坏”，而且应有一定的安全裕度。在满足强度的要求下，载荷作用时，吊车梁还会产生一定的变形[如图 1—2 (a) 所示]。这种变形虽然相对吊车梁的尺寸一般都很小，甚至肉眼不易察觉，只能用仪器才能测量出，但对于吊车梁的运行会产

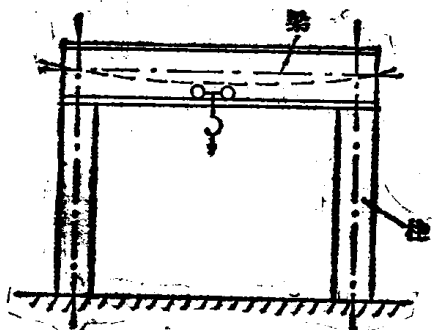


图 1—1

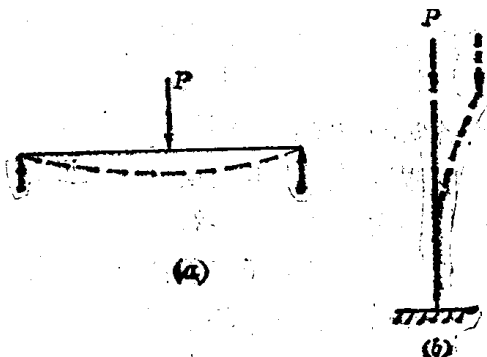


图 1—2

生不利的影响（例如产生较大的振动、吊车运行不平稳等）。为了保证吊车梁的正常运行，在设计时，对吊车梁的位移（变形）应有一定的限制。这种控制构件变形的问题即称为刚度问题。此外，柱子还会发生“不稳定”的现象。若柱子的尺寸过细过长，在压力作用下不易在直线状态时保持平衡，往往容易发生侧向弯曲[见图 1—2(b)]，以致整个结构倒塌。在设计柱子时，必须使它在直线状态的平衡是稳定的。这种控制稳定平衡的问题即称为稳度问题。

一般来说，强度问题是所有承载构件所必须满足的基本要求。刚度问题对不同类型的构件，要求是不同的。例如对于锅炉及化工容器中承受内压的筒体，一定的变形并不会影响筒体的正常工作，故在设计时不需要考虑刚度要求；但对于精密机床，主轴变形的大小将直接影响产品的精度，在设计时刚度问题将上升为主要矛盾。至于稳度问题，只是在一定的受力

形式下才会发生。例如对于前面所述的受压柱子存在着稳度问题，但对于受拉构件并不会发生稳度问题。由于丧失稳定的现象一般都是突然发生的，对结构的破坏影响很大，故对于存在稳度问题的受力形式，在设计时必须予以足够的重视。

为了合理地解决构件承载能力问题，必须正确地处理好安全与经济之间的矛盾。显然，构件的尺寸愈大，承载能力就愈大，但这样必然会耗费大量不必要的材料，同时会增加构件本身的重量。因此，材料力学的任务是在总结实践经验及科学试验结果的基础上，掌握构件受力及变形规律，从承载能力的角度出发，处理好安全与经济的矛盾。

（二）材料力学的研究对象

由于静力学与材料力学的任务不同，它们对分析对象（构件）所作的基本假设也是不同的。在静力学中分析构件的平衡条件时，在一定条件下，可近似地忽略构件的变形对平衡条件的影响，将构件抽象成不变形的“刚体”模型。这种抽象考虑了影响构件平衡的主要因素——构件的整体运动，简化了分析过程，在绝大多数情况下是合理的。但材料力学的任务是解决构件的承载能力问题，构件的变形就成为必须考虑的主要因素。显然，对于刚度及稳度问题，不考虑变形是无法研究的。即使对于强度问题，没有变形亦就无所谓“破坏”问题。在以后各章分析构件各点的受力时还可以看到，必须考虑构件受力后的变形规律才能解决内力分布的问题。因此，在材料力学中，研究对象就不能抽象成“刚体”模型，而必须将构件看成是“变形体”。

由物理学的研究可知，任何物体都是由分子或原子组成的，构件的变形本质上都是分子间作用力变化的结果。但是，实际的构件是由成千上万个分子组成的，它们的结构错综复杂，从微观的角度去研究构件的变形是很困难的。在材料力学中，并不考虑物体实际的分子结构，而是从宏观的角度出发，将构件抽象成“均匀、连续、各向同性的变形体”，即认为构件材料各处的力学性能都相同、材料内部没有任何空隙，且材料各个方向的性能也相同。这种宏观的假设对大部分金属材料来说是可以的，在一定的条件下（尤其在常温、静荷时），所得的结论与实验结果是很符合的。从宏观角度出发来分析构件的受力及变形，能使分析过程大为简化，得到适用于工程计算的实用公式。

此外，在材料力学中将研究范围一般限制在“小变形”的范围内，即认为构件变形后的形状虽然与变形前不同，但其变化程度是很小的，或者说由于构件变形所产生的位移，相对构件的原始尺寸是个微量。对于“小变形”的构件，当变形不改变受力性质的情况下，在构件的平衡或运动条件中，可以以构件的原始尺寸代替变形后的形状，不考虑变形所产生的位移对平衡或运动状态的影响。但是应该指出，对于变形体（即使是小变形体）静力学中的原理并不是都适用的，要根据具体情况进行具体分析。例如，对于变形体力的可传性性质在考虑构件内部的受力及变形情况时是不适用的。以图 1—3 所示的构件为例，在静力学中考虑构件的平衡状态时，(a)、(b)两种情况是相同的，即力 P 从 B 处沿其作用线移至 C 处并不会改变构件整体的平衡状态，因此在考虑构件整体平衡时，力 P 是可以沿其作用线迁移的。但若欲分析构件内部的受力及变形情况，(a)、(b)两种情况就有很大的差别：情况 (a) 时整个构件都承受力 P 的作用，而情况 (b) 时只是 AC 段才受力 P 的作用，显然情况 (a) 的构件 B 点的位移要比情况 (b) 的大。由此可见，在分析构件内部的受力及变形时，外力作用点的位置是不能变动的，即此时力的可传性性质不适用。当构件上作用力偶

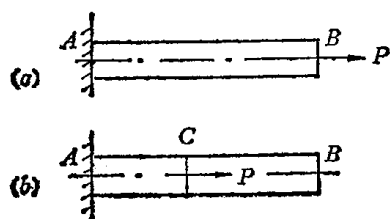


图 1—3

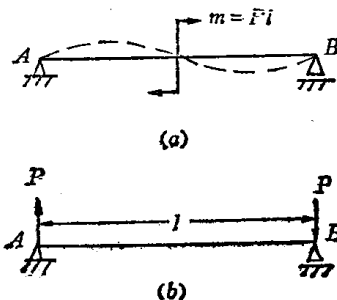


图 1—4

时也有着同样性质的问题。例如图 1—4 所示的构件，(a)、(b) 两情况下承受相同力矩偶 $m = Pl$ 的作用时，A、B 两处的反力相同。但对于情况 (a)，构件会发生明显的变形（如图中虚线所示），而情况 (b) 时构件基本上不变形（当两个 P 力的作用点刚好在支座 A 及 B 处时，构件完全不变形）。因此，在分析构件内部受力及变形时，力偶也是不能随意在所在平面内移动的。

此外，对构件的形状而言，材料力学中是以“细长杆件”（简称杆件）作为其主要研究对象。所谓“细长杆件”是指杆件的长度 l 比其横截面尺寸 b, h 要大很多，即 $l/h \gg 1$ ， $b \approx h$ （见图 1—5）。工程中常见的梁、轴、连杆等构件都可简化成细长杆件。细长杆件的长度方向可用轴线来表示，与轴线垂直的截面称为杆件的“横截面”，轴线即为各截面形心的连线。轴线为直线的杆件简称为直杆，如图 1—5 (a)；轴线为曲线的杆件简称为曲杆，如图 1—5 (b)；各横截面的形状及面积都相同的直杆简称为等直杆。

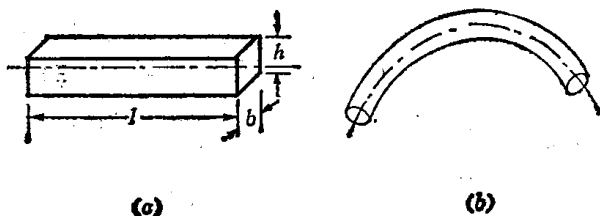


图 1—5

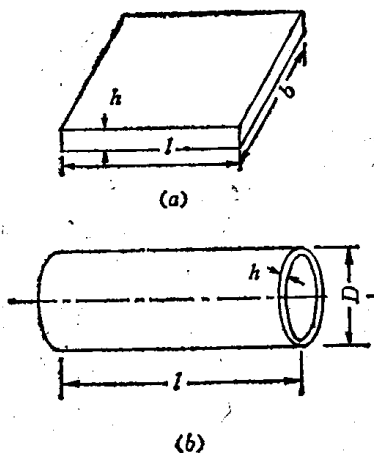


图 1—6

除了“细长杆件”外，工程中还会遇到如图 1—6 所示的薄板、薄壳形状的构件。它们几何形状的特点是厚度比长度及宽度尺寸要小很多 ($l \approx b$, $h/l \ll 1$)。一般可用中心面来表示它们长度及宽度方向的形状。中心面是指厚度中点的轨迹面。若中心面为平面[图 1—6(a)]，构件可简化为“薄板”，例如化工容器中的管板、房屋建筑中的楼板等。若中心面为曲面[图 1—6(b)]，构件可简化为“薄壳”，例如锅炉中的汽包、反应堆压力壳以及圆屋顶等。薄板及薄壳的强度分析方法与细长杆件是很类同的，但数学分析过程较为复杂。掌握了细长杆件强度的计算方法也就为进一步分析板、壳强度问题打下了必要的理论基础。

(三) 材料力学的研究方法

材料力学的任务是从强度、刚度及稳度角度出发，解决工程实际中构件的承载能力问

题, 因此要求所提供的计算公式便于工程实际使用。为了达到此目的, 必须在前面所述的研究对象的范围内抓住影响承载能力的主要因素, 忽略某些次要的因素。主次要因素的分析是不能主观想象的, 必须通过大量的实践及试验研究才能逐步地了解。材料力学的分析方法是通过实验现象的观察及分析, 对构件的变形或受力情况作出某些简化假设, 在此基础上推导出便于应用的计算公式, 然后再通过实践或实验验证这些计算公式的正确性。这种分析方法是应用科学普遍的分析方法。可以看出, 实验在分析过程中占了非常重要的地位。它既是简化假设的实践基础, 也是验证计算公式正确性的依据。理论推导只有在前提(假设)正确的基础上才能得出正确的结论。此外, 应该指出由于计算公式是在一定的简化假设基础上推导出的, 所得计算公式必然是在一定的使用范围内才有足够的精确度。使用范围的大小决定于简化假设所基于的实验研究的范围。因此在应用这些计算公式时, 应注意在推导公式中所作的简化假设及它们的使用范围, 不能随意搬用。

在材料力学的分析过程中, 为了简化计算, 有时还对构件的载荷、约束等作一定的抽象。例如将构件约束情况抽象成“理想”约束, 即看成绝对的固定端或对转动没有任何约束的铰支座等; 将作用在较小区域内的分布力以集中力来代替等等。在很多情况下, 这种抽象化是建立在反映构件受力的主要影响因素的基础上的, 对简化计算是必要的, 也是有效的。前面曾指出, 在材料力学中力的可传性及等效力系的概念一般来说是不适用的。但若在外力作用点附近很小的区域内(相对于构件的尺寸而言), 以等效力系来代替构件实际所受的外力, 则可认为只是对此区域附近范围内的受力及变形情况有显著的影响, 而对离此区域较远处的受力及变形情况的影响很小, 可以忽略不计。上述结论称为圣维南原理。它虽然至今尚没有严格的理论证明, 但已为大量的实验结果所证实。对于细长杆件, 利用圣维南原理来简化计算过程将带来很大的方便。例如图 1-7 所示的情况, 若以集中力 P 来代替在小面积上作用的分布载荷, 则其影响范围基本上为分布载荷所作用的面积的尺寸大小(图中以阴线所示部份)。因此, 只要 a 或 b 比杆件长度小很多, 这种以等效力系来替换的影响是局部的, 对杆件大部分区域的影响可忽略不计。

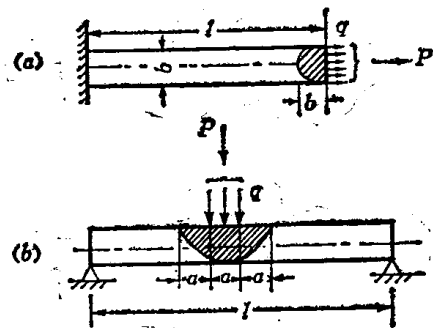


图 1-7

最后应说明, 材料力学是一门技术基础课程。它是为工程设计提供分析构件承载能力的理论基础。实际构件的形状、载荷及工作条件等都是较为复杂的, 与材料力学的研究对象及所作的简化抽象会有一些差异, 在应用材料力学计算公式解决实际问题时必须注意它们的使用范围。另一方面, 在工程设计中, 承载能力问题是构件必须满足的条件, 但不一定是设计中所需满足的全部条件。设计中需考虑的问题是多方面的, 除了承载能力外, 还有加工工艺、产品标准化甚至使用方便美观等等。这些问题将在以后的专业课程中具体讨论。

§ 1.2 拉伸(压缩)杆件的强度及变形计算

本节中先以拉伸(压缩)杆件为例, 说明材料力学中处理强度及变形计算的方法。

(一) 拉伸(压缩)杆件的强度计算

1. 内力

强度问题是研究杆件在载荷作用下不发生“破坏”的条件。因此在分析杆件的强度时,应首先研究载荷对杆件内部的作用情况。



图 1—8

今以图 1—8 所示的两端承受通过轴线的一对 P 力作用的直杆为例进行分析。杆件在受到外力 P 作用后将发生变形,即杆件内部各质点间的相对位置将发生变化,因此质点间的相互作用力也将发生变化。由载荷所引起的各质点间的相互作用力的变化量在材料力学中称之为内力。实质上它表示各质点间相互作用力由载荷引起的“附加内力”。由于材料力学不从微观的角度研究质点间的实际作用力,因此将此“附加内力”简称为“内力”。

由于内力是杆件内部的相互作用力,求内力时必须将杆件分成两部分才能使内力体现出来。求杆件内力的一般方法是假想以一横截面将杆件在所欲求内力处截开,例如图 1—9 中以 mm_1 截面将杆件截开成两部分。此时一部分对另一部分的作用即可以内力来表示。由于假设杆件是连续的,在横截面内的内力也必然是连续分布的。作用在横截面各微面积 ΔF 上的内力称为微内力,微内力在整个横截面内的合力称为该横截面的内力,如图 1—9 中的 N (或 N') 所示。由于整个杆件在载荷作用下处于平衡状态,杆件每一部分也必然处于平衡状态。因此根据截开后杆件任一部分的平衡条件,即可求出内力 N 的大小。对于图 1—9 所示的情况,若考虑左边部分杆件的平衡条件 $\sum X = 0$,得 $N = P$ 。可以看出此时内力 N 通过且平行于杆件轴线。这种内力称之为轴向力。内力仅为轴向力的杆件称为拉伸(压缩)杆件。 N 实际上表示右边部分杆件对左边部分杆件总的作用力。若考虑右边部分的平衡,同样可求得横截面的内力 $N' = P$ 。内力 N 及 N' 是作用力与反作用力的关系,它们必然大小相等、方向相反,但分别作用在两部分杆件上。

上述求内力的方法称为截面法。它是材料力学中求内力的基本方法,不但对拉伸(压缩)杆件适用,而且对承受其他各种形式载荷的杆件也是适用的。求出轴向力的数值后应进一步确定它的正负号。在静力学平衡方程式中力的正负号是根据它的方向来定的,例如若定义向右的力为正,则向左的力为负。但若仍利用这种方法来定义内力的正负号,将得到非常矛盾的结果。由图 1—9 可看出,若左段杆的轴向力 N 向右,右段杆的轴向力 N' 必然向左。这样,对于同一截面,从左段杆求得的轴向力是正的,而从右段杆求得的是负的,即同一截面的轴向力既是正的,又是负的,显然这样的结论是不合理的。主要原因在于内力总是成对出现的,而上述定义力的正负号的方法是建立在向量坐标的基础上的。

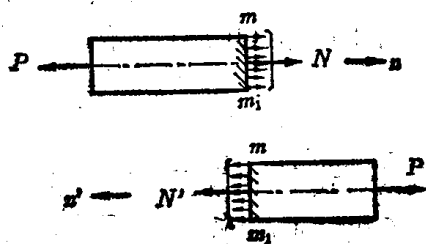


图 1—9

在静力学中研究的是力对物体的作用,即力所产生的平衡或运动状态,因此以向量坐标来定义运动的方向是合理的,但杆件的内力是与它的变形状态相对应的,仍用向量坐标来定义其正负号就不适用了。一个物理量正负号的规定应与它的物理本质相适应。由图 1—9 可看出,当杆件产生伸长变形时,它的轴向力方向总是与横截面的外法线方向一致; N 与外法线 n 方向一致; N' 与 n' 方向一致。因此,可以定义当轴向力方向与该截面的外法线方向一致时,轴向力是正的,表示拉力;反之,若轴向力方向与该截面的外法线方向相反时,轴

向力是负的，表示压力，（如图 1—10 所示）。这种规定方法是与变形状态协调的，不论对于左段杆或右段杆都能得到相同的轴向力正负号。

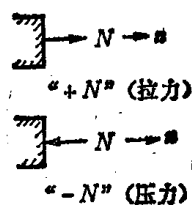


图 1—10

当杆件上作用两个以上的载荷时，仍可用截面法求出内力，但由于此时各段的内力不相同，必须分别以不同的截面将杆件截成两部分以求出各段的内力。以图 1—11 所示的杆件为例。求 AB 段内力时，可用 1—1 截面将杆件截开。考虑左边杆件平衡条件，求得 $N_1 = 2P$ 。由于 N_1 的方向与横截面外法线方向一致，故是正的（拉力）。同理以 2—2 截面将杆件截开，可求得 BC 段的内力为 $N_2 = P$ 。 N_2 的方向与外法线方向相反，故是负的（压力）。为了更清楚地表示轴向力沿杆轴的分布情况，以轴线方向为横坐标，轴向力为纵坐标，画出轴向力图，如图 1—11(c) 所示。

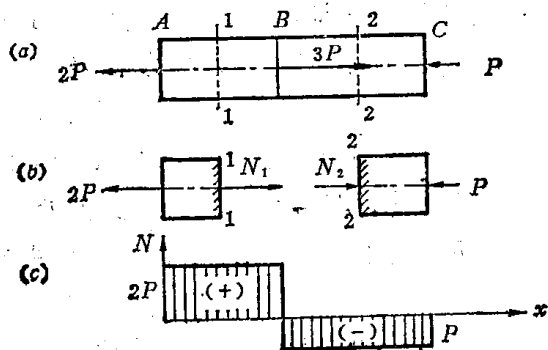


图 1—11

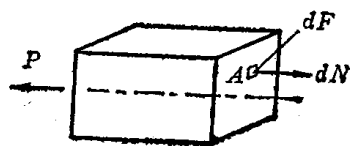


图 1—12

2. 应力

求得拉伸（压缩）杆件的轴向力后，尚不足以说明杆件的受力程度。轴向力 N 表示横截面内总的内力的数值。当两杆件的内力 N 相同时，横截面的面积 F 愈大，杆件就愈安全； F 愈小，杆件就愈危险。因此，为了反映杆件的实际受力程度，必须寻找另一物理量来描述横截面内各点的微内力的大小。

设在拉伸杆件的横截面内围绕 A 点的微面积 ΔF 上的微内力为 ΔN ，如图 1—12 所示。对于拉伸（压缩）杆件， ΔN 是垂直于横截面的。 A 点的受力程度可用物理量

$$\sigma = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta F} = \frac{dN}{dF} \quad (1-1)$$

来表示。式中 σ 称为 A 点的正应力。所谓“正”应力是指垂直于应力作用截面的应力。可以看出，正应力 σ 愈大， A 点的受力程度就愈厉害。因此，正应力 σ 是衡量拉伸（压缩）杆件受力程度的重要物理量。其量纲为[力]/[长度]²，国际单位为 Pa（帕）（1Pa = 1N/m²）。

由式 (1—1) 可知

$$N = \int_F \sigma dF \quad (1-2)$$

它表示微内力 σdF 与轴向力 N 间的静力学合力条件，即微内力 σdF 在整个横截面 F 内的合力等于轴向力 N 。但若已知轴向力 N ，由于尚不知道正应力 σ 在横截面内的分布规律，从合力条件 (1—2) 内无法求出 σ 的数值。对于两端承受轴向均匀分布载荷的等截

面拉伸（压缩）直杆，由实验结果可知，变形前杆件表面上与轴线垂直的线段（例如图 1—13 中的 mm_1 及 nn_1 线）变形后仍保持直线，但相对地平移了一段距离，如 $m'm_1'$ 及 $n'n_1'$ 所示。由此可以假定整个横截面在变形后仍保持平面，但各横截面间相对地平移了一段距离，即横截面上各点的变形是相同的。由于假设材料是均匀的，可以推理出横截面上各点的受力程度也是相同的，即在整个横截面内 $\sigma = \text{常数}$ 。这样，由式（1—2）即可求得

$$\sigma = \frac{N}{F} \quad (1-3)$$

即内力在横截面内是均匀分布的。式中 N 为横截面内的轴向力， F 为横截面面积。

应该注意，拉伸（压缩）杆件横截面上内力均匀分布的结论〔式（1—3）〕只有在下列情况下才是正确的：1）内力 N 通过且平行于杆件轴线；2）杆件所承受的轴向载荷沿横截面方向是均匀分布的，3）等截面直杆（等直杆）。

若杆件的内力虽与杆件轴线平行，但不通过轴线（图 1—14），可以看出变形后杆件将

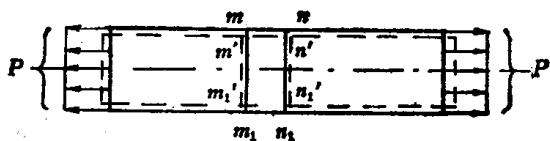


图 1—13

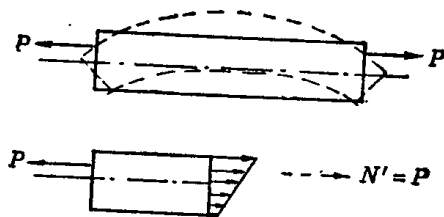


图 1—14

发生弯曲，横截面上的内力将不均匀分布，式（1—3）也不再适用。

当载荷为集中力时（图 1—15），在靠近两端处，内力是不均匀分布的，产生局部应力现象。横截面愈接近端部，这种局部应力现象愈显著。由圣维南原理可知，只有在离杆件端部一定距离 $l' > d$ （ d 为杆件横截面尺寸）处，内力才可近似地认为是均匀分布的。随着横截面远离端部，局部应力现象逐渐减弱，内力趋向均匀分布。

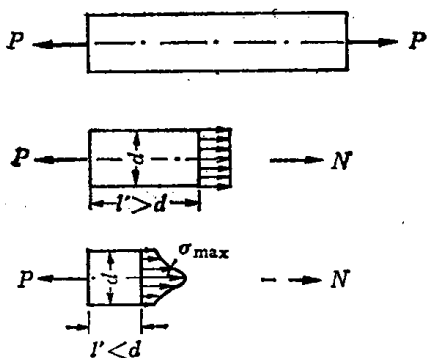


图 1—15

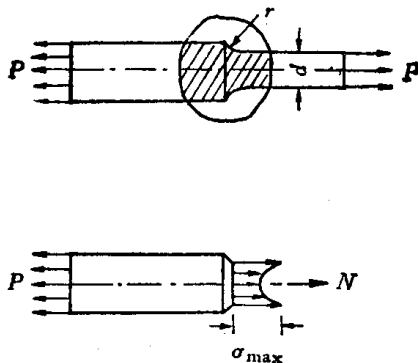


图 1—16

对于变截面杆件，在横截面变化处附近区域，也会产生局部应力现象（图 1—16）。这种由于几何形状变化所产生的局部应力现象一般称为应力集中现象。形状变化愈剧烈（ r/d 愈小），应力集中现象愈显著，故工程实际中为了减小应力集中现象，一般在形状变化处都要求有一定半径 r 的圆角过渡。应力集中现象也具有局部的性质。在形状变化处附近应力集中现象很显著，随着离形状变化处的距离的增加，应力集中现象逐渐减弱。

3. 强度条件

为了使杆件不致发生“破坏”，必须使载荷所产生的最大正应力 $\sigma_{\max}$ 小于“破坏”时杆件横截面上的正应力 σ^0 （称为危险应力）。考虑一定的安全裕度后，可写成

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma] \quad (1-4)$$

式(1-4)称为拉伸(压缩)杆件的强度条件，它是进行拉伸(压缩)杆件强度计算的主要依据。式中 $[\sigma]$ 称为拉伸(压缩)杆件的许用应力，其值为

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{k} \quad (1-5)$$

式中 k 称为安全系数。显然 $k > 1.0$ 。具体数值应根据构件的工作条件、重要程度以及长期的实践经验来决定。危险应力 σ^0 是由试验测出的，它是材料的机械性能。根据 σ^0 及 k ，即可按式(1-5)求出许用应力 $[\sigma]$ 。对于各种不同的构件， $[\sigma]$ 值在设计手册中都有具体的规定。

由式(1-4)可看出，最大应力 $\sigma_{\max}$ 与内力 N 及横截面积 F 有关。对于等截面杆件，显然 $\sigma_{\max}$ 发生在内力最大的横截面内。对于变截面杆件，必须综合考虑内力及横截面尺寸的变化情况，才能确定 $\sigma_{\max}$ 的位置及数值。

在工程设计中，分析构件的强度问题时，强度条件(1-4)可应用于下列三种情况：

(1) 强度校核 已知载荷(P)、杆件尺寸(F)及材料($[\sigma]$)，要求确定杆件是否有足够的强度，即检验式(1-4)中的不等号是否成立：

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma]$$

不等号成立，表示有足够的强度，杆件是安全的；否则杆件强度不够，是危险的。

(2) 截面选择(设计) 已知载荷(P)及杆件材料($[\sigma]$)，要求确定杆件横截面所需的最小尺寸，即求出

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]}$$

(3) 许可载荷 已知杆件的尺寸(F)及材料($[\sigma]$)，要求确定此杆件或整个结构所能承受的最大载荷。杆件的许可内力由式(1-4)为

$$[N] = [\sigma]F$$

求得 $[N]$ 后，即可按静力学平衡条件求得此杆件或整个结构的许可载荷。

例 1-1 起重机托架在铰链 A 处装有滑轮。由铰车 D 引出钢索经滑轮起吊荷重 P (图 1-17)。若 $P = 20\text{kN}$ ， AC 杆是截面积为 $60 \times 40\text{mm}^2$ 的矩形截面， AB 杆是直径 $d = 30\text{mm}$ 的圆形截面，材料许用应力 $[\sigma] = 11\text{MPa}$ 。试对 AB 杆及 AC 杆进行强度校核。

解：

(1) 确定各杆件的内力

画出铰链 A 的示力图。钢索 AD 的内力 $N_{AD} = P$ 。假设 AC 杆受压， AB 杆受

拉。它们对铰链 A 的作用力方向如图中 N_{AC} 及 N_{AB} 所示。

根据铰链 A 的平衡条件可求出 N_{AC} 及 N_{AB} 值。由于 AC 杆与 AB 杆相互垂直，取图如所示的 x 及 y 方向（沿着 AC 及 AB 方向）的投影方程式进行计算较为方便。

$$\Sigma X = 0 \quad N_{AC} - N_{AD} \cos 60^\circ - P \cos 30^\circ = 0$$

$$\Sigma Y = 0 \quad N_{AB} + N_{AD} \cos 30^\circ - P \cos 60^\circ = 0$$

得 $N_{AC} = 1.366P = 1.366 \times 20 = 27.3 \text{ kN}$

$$N_{AB} = -0.366P = -0.366 \times 20 = -7.32 \text{ kN}$$

N_{AC} 为正值表示所假设的方向与实际方向一致。 N_{AB} 为负值表示所假设的方向与实际方向相反，即 AB 杆也为受压杆件。

(2) 求出各杆的应力值

$$\sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{F_{AC}} = \frac{27.3}{60 \times 40} = 1.138 \times 10^{-2} \text{ kN/mm}^2 = 11.38 \text{ MPa} \quad (-)$$

$$\sigma_{BC} = \frac{|N_{BC}|}{F_{BC}} = \frac{7.32}{\frac{\pi}{4}(30)^2} = 1.036 \times 10^{-2} \text{ kN/mm}^2 = 10.36 \text{ MPa} \quad (-)$$

在求应力值时，内力一般取绝对值。应力的正负号根据杆件的实际受力情况确定。由于 AC 及 AB 杆都受压，故 σ_{AC} 及 σ_{AB} 都为压应力，以括号内的负号表示。

(3) 对各杆进行强度校核

已知 $[\sigma] = 11 \text{ MPa}$ 。 AB 杆的 $\sigma_{AB} = 10.36 \text{ MPa} < [\sigma]$ ，故 AB 杆是安全的。 AC 杆的 $\sigma_{AC} = 11.38 \text{ MPa}$ 大于 $[\sigma]$ 3.8%。工程计算中一般规定在校核已有的结构强度时，若工作应力超过许用应力，但不超过 5%，仍可认为此杆件是安全的（考虑到许用应力的安全系数中有一定的裕度）。故 AC 杆也可认为有足够的强度。

例 1—2 一变截面柱在 A 及 C 处承受外力的作用，如图 1—18 所示。若柱子材料的抗压许用应力 $[\sigma] = 40 \text{ MPa}$ ，试设计此柱各段正方形截面所需的边长。

解：

(1) 确定各段柱子的内力

由截面法可知， AC 段的内力 $N_1 = 40 \text{ kN}$ ， BC 段的内力 $N_2 = 30 + 40 = 70 \text{ kN}$ ，且都为压力。

(2) 设计截面尺寸

由强度条件可知， AC 段所需的截面积为

$$F_{AC} \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{40}{40 \times 10^{-3}} = 1000 \text{ mm}^2$$

故正方形截面的边长

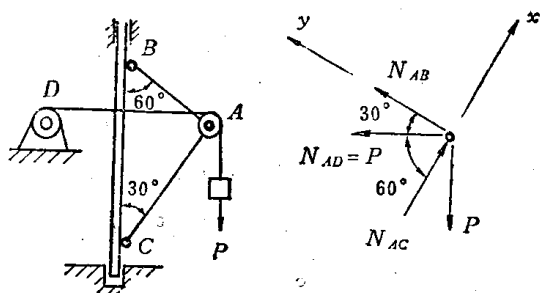


图 1—17

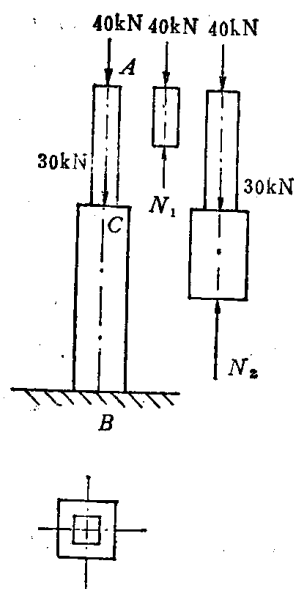


图 1—18