

三年制
数学
初三上册

海淀直通车 教·学·练·考

★ 新理念
★ 新大纲
★ 新教材
★ 新体例
★ 新学法

赶快行动吧！
登上海淀直通车

一路走来，真的好喜欢你呀！
一路学来，感觉越学越起劲噢！

合计 **120点** 收录！

海淀名师五新导学丛书

- 锁定新教学大纲的全部内容与教材同步
- 展现真正名师的权威霸气
- 将全新的教育理念，快递到每一个学生手中
- 这就是特别关爱你的——海淀直通车！



● 哈尔滨出版社

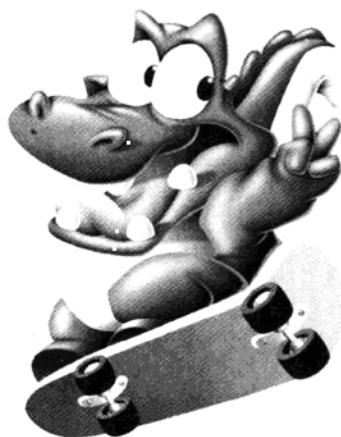
HAERBINCHUBANSHE

北京市海淀区教育局特高级教师编写组 编写

海淀名师五新导学丛书——

海淀直通车

初中三年制——数学(三年级上)



Hai Dian Zhi Tong Che

哈尔滨出版社

图书在版编目(CIP)数据

海淀直通车. 三年制初三/张光珞主编. —哈尔滨: 哈尔滨出版社, 2001. 6

(海淀名师五新导学教辅丛书)

ISBN 7-80639-525-3

I. 海... II. 张... III. 课程-初中-教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 24256 号

责任编辑:刘丽奇

装帧设计:程颖

海淀名师五新导学丛书——海淀直通车

初中三年制——数学(初三上)

王小吉 编

哈尔滨出版社

哈尔滨市南岗区贵新街 170 号

邮政编码:150006 电话:0451-6225161

E-mail: hrhcbbs@yeah.net

全国新华书店发行

哈尔滨报达人印务有限公司印刷

开本 787×1092 毫米 1/16 印张 6 字数 120 千字

2002 年 7 月第 2 版 2002 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 7-80639-525-3/G·134

定价:91.00 元(套) 本册:6.50 元

版权所有,侵权必究。举报电话:0451-6225162

前 言

《海淀名师五新导学丛书》是我们经过长期策划,在对国家教育改革精神及教辅书市场深入调研的基础上,最新推出的与新教学大纲、新版本教材同步的“素质型”教学辅导丛书。这套书凝结了北京市海淀区各位特高级名师的辛勤汗水,可以说这是他们的最新倾力之作、杰出之作。同时,考虑到各地的教学实际,我们还邀请东北、西北、华北、华中、华南地区的一线特级教师参与修改和把关。在此一并致谢。

这套书的特点一个是新,一个是精。“新”就是在新大纲、新教材的基础上,突出强调了新的教学理念,新的学习方法,新的编写体例。在各学科教学练考的编写上,突出强调知识的巩固、学习兴趣与能力的培养等多项综合素质的提高;在体例上力求全书栏目丰富,活泼新颖,不求大而全,只求专题特色及重难点突出及各学科知识的相互渗透;在学法上着重以趣味教学、多向思维的方法引导学生,帮助学生尽快掌握知识的关键点,迅速提升学习质量及创新能力。“精”就是在作者队伍的组建上求精,我们不仅选择了一线名师,而且还选择了具有丰富教学经验的各科专家和教学研究人員;在充分考虑到全国各地区教学实际的同时,精心设计了全书的结构,按现代教学方法及各科内容,科学合理地设定教学练考各部分的比例及栏目,做到以最少的篇幅达到学好、用好、考好的最佳效果;精心编写各栏目的内容,无论教学练考,都以独特的视角和见解精选精编,不搞题海战术,注重学习效果,使学生能举一反三,融会贯通。

海淀直通车,让你直接接受海淀名师指导,享受最新教研成果,直达知识彼岸——这就是我们的心愿。

哈尔滨出版社

Hai Dian
Zhi Tong Che



全套丛书各科主要栏目

- 小学语文** 达标起跑线、词汇七彩珠、语句一读通、阅读百花园、习作五色土、趣味小天地等。
- 小学数学** 达标起跑线、知识路路通、例题早知道、病题早入院、数学碰碰车等。
- 初中语文** 导学入门、习作精点、知识窗、看一看、想一想、记一记、乐一乐、期末检测、中考模拟测试等。
- 初中数学** 知识导学、知识平台、情境大展示、数学乐园、期末检测、中考模拟测试等。
- 初中英语** 词汇点播、难点精解、语法精析、英语大平台、第二课堂、小幽默、指点迷津、汉英差异、错例分析、趣味英语、生活英语指南、中考题型动态、中考模拟测试等。
- 初中政治** 导学入门、重难点分析、想想评评、知识重现测试、迁移思辨测试、期末检测等。
- 初中物理** 导学入门、疑点解惑、典型例题、错例分析、难题点睛、生活实验应用、动手做做、趣味小实验、中考题型动态、中考模拟测试。
- 初中化学** 达标要求、疑点解惑、经典例题、错例分析、难题点睛、生活实验应用、动手做做、趣味小实验、中考题型动态、中考模拟测试。

Hai Dian
Zhi Tong Che



目 录

(代 数 部 分)

第十二章 一元二次方程	(1)
一 一元二次方程	(1)
§ 1 用公式解一元二次方程	(1)
§ 2 用因式分解法解一元二次方程	(4)
§ 3 一元二次方程的根的判别式	(5)
§ 4 一元二次方程的根与系数的关系	(7)
§ 5 二次三项式的因式分解(用公式法)	(10)
§ 6 一元二次方程的应用	(13)
§ 7 可化为一元二次方程的分式方程	(16)
综合迁移测试	(20)
能力提升测试	(22)
数学乐园	(24)
二 简单的二元二次方程组	(27)
§ 8 由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组	(27)
§ 9 由一个二元二次方程和一个可分解为两个二元一次方程 的方程组成的方程组	(31)
综合迁移测试	(33)
能力提升测试	(34)

(几 何 部 分)

第六章 解直角三角形	(36)
一 锐角三角函数	(36)
§ 1 正弦和余弦	(36)
§ 2 正切和余切	(40)
§ 3 用计算器求锐角三角函数值和由锐角三角函数值求锐角	(46)
综合迁移测试	(48)
能力提升测试	(50)
二 解直角三角形	(52)
§ 4 解直角三角形	(52)
§ 5—6 应用举例, 实习作业	(56)

MAF 75/01

综合迁移测试	(60)
能力提升测试	(61)
数学乐园	(63)
第七章 圆	(66)
一 圆的有关性质	(66)
§ 1 圆	(66)
§ 2 过三点的圆	(69)
§ 3 垂直于弦的直径	(71)
§ 4 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系	(75)
§ 5 圆周角	(77)
§ 6 圆的内接四边形	(79)
综合迁移测试	(82)
能力提升测试	(84)
期末试卷	(86)
参考答案	(89)

第十二章 一元二次方程

一元二次方程

§1 用公式解一元二次方程

* 知识导学



1. 知道一元二次方程的含义;
2. 初步掌握用直接开平方法解一元二次方程, 会用直接开平方法解形如 $(x-a)^2 = b (b \geq 0)$ 的方程;
3. 初步掌握用配方法解一元二次方程, 会用配方法解数字系数的一元二次方程;
4. 掌握一元二次方程的求根公式的推导, 能够运用求根公式解一元二次方程.

* 知识平台



1. 整式方程: 方程的两边都是未知数的整式的方程叫做整式方程.
2. 一元二次方程: 在整式方程中, 只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是 2, 这样的整式方程叫做一元二次方程.
3. 一元二次方程的一般形式: $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$.
4. 直接开平方法
此法用在解形如 $(x-a)^2 = b (b \geq 0)$ 及 $(x-a)^2 = (cx-b)^2$ 的一元二次方程, 由 $x-a = \sqrt{b}$, $x-a = -\sqrt{b}$ 及 $x-a = (cx-b)$, $x-a = -(cx-b)$, 再解关于 x 的一元一次方程, 求出原方程的解.

5. 配方法

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 均可通过配方化为 $a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0$ 这种形式, 当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时, 用开平方法求出方程的解, 当二次项系数化为 1 时, 配方法更容易进行. 配方法是很重要的数学方法, 也是二次三项式恒等变形的一种重要形式.

6. 公式法

由配方法可知任何一个一元二次方程均可化为 $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, 当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时, 方



程的根为 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 此式说明一元二次方程的根是由系数 a, b, c 确定的, 因此, 把它叫做一元二次方程的求根公式, 用求根公式求一元二次方程的根的方法叫做公式法.

用公式法解一元二次方程的关键是正确地把方程化为一般式, 并找出 a, b, c .

* 情景展示



例1 下列方程中, 哪些是关于 x 的一元二次方程?

- (1) $x^2 = 5$; (2) $5x(x-2) = 4 - 3x + 2x^2$; (3) $5x - 1 = \frac{4}{3x-1}$
 (4) $3x^2 - xy + 3y^2 = 0$; (5) $\sqrt{x^2 - 7} = 2$; (6) $x^4 + 3x^2 - 1 = 4x(x-3)$

答: (1), (2) 是一元二次方程.

评注 判断一个方程是否是一元二次方程, 首先要看它是不是整式方程, 其次在整式方程的前提条件下, 通过化简整理后, 再看未知数的最高次数是不是等于 2.

例2 求 m 为什么实数时, 关于 x 的方程 $(m^2 - 4)x^2 + (m - 2)x + m = 0$ 是一元二次方程?

解: 要使此方程为一元二次方程, 则须 $m^2 - 4 \neq 0$, 即 $m \neq \pm 2$.

$\therefore m \neq \pm 2$ 时, 所给方程为一元二次方程.

评注 在解关于含字母系数的一元二次方程时, 首先要确定谁是未知数, 谁是系数; 其次才是当二次项系数不为 0 时方程才是一元二次方程.

例3 用适当方法解下列一元二次方程.

(1) $49(x-2)^2 - 25 = 0$

(2) $x^2 - 6x + 2 = 0$

(3) $(4x-3)(3x-1) = 4$

解: (1) 原方程可化为 $(x-2)^2 = \frac{25}{49}$

两边开平方, 得 $x-2 = \pm \frac{5}{7}$ $\therefore x_1 = 2 + \frac{5}{7}, x_2 = 2 - \frac{5}{7}$.

(2) 原方程可化为 $x^2 - 6x = -2$

配方 $(x-3)^2 = 7$ 两边开平方得 $x-3 = \pm\sqrt{7}$

$\therefore x_1 = 3 + \sqrt{7}, x_2 = 3 - \sqrt{7}$

(3) 原方程可化为 $12x^2 - 13x - 1 = 0$ $\therefore a = 12, b = -13, c = -1, b^2 - 4ac = 217$

$$\therefore x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{217}}{2 \times 12} = \frac{13 \pm \sqrt{217}}{24}$$

$$\therefore x_1 = \frac{13 + \sqrt{217}}{24}, x_2 = \frac{13 - \sqrt{217}}{24}$$



鉴定题

选择题

- 若 $(m-2)^2 + \sqrt{m+2n} = 0$, 下列方程中是一元二次方程的只有 ()
 A. $(1+n)x^2 + 6x + m = 0$ B. $(n-1)x + (\sqrt{3}+m)x^2 = 0$
 C. $(m^2-4)x^2 + (4+n)x + mn = 0$ D. $(2-m)x^2 + (n-3)x + 2 = 0$
- 解方程 $3x^2 + 27 = 0$ 得 ()
 A. $x = \pm 3$ B. $x = -3$ C. 无实数根 D. 以上答案都不对
- 一元二次方程 $2\sqrt{2}x - x^2 - 2 = 0$ 用求根公式求解, 先求 a, b, c 的值, 正确的是 ()
 A. $a = 2\sqrt{2}, b = -1, c = -2$ B. $a = 1, b = -2\sqrt{2}, c = 2$
 C. $a = -1, b = -2\sqrt{2}, c = -2$ D. $a = -1, b = 2\sqrt{2}, c = 2$
- 用配方法解方程: $x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$ 正确的是 ()
 A. $(x - \frac{2}{3})^2 = 1, x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = -\frac{1}{3}$ B. $(x - \frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}, x = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$
 C. $(x - \frac{2}{3})^2 = -\frac{8}{9}$, 原方程无实数根 D. $(x - \frac{1}{3})^2 = -\frac{8}{9}$, 原方程无实数解

用适当方法解下列各方程

- $(2x+3)^2 = 5$
- $x^2 - 2x - 1 = 0$
- $3x^2 + 7x + 1 = 0$
- $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$
- $x^2 - 8x - 1665 = 0$
- $(x-7)(x+3) + (x+1)(x+5) = 6x$

解答题

- 方程 $(a-2)x^{a^2-2} + (a+1)x + 4 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程, 求 a 的值.

§2 用因式分解法解一元二次方程

* 知识导学



会用因式分解法解某些一元二次方程.

* 知识平台



因式分解法 此法适用于一个一元二次方程右边为零,左边能用十字相乘或用平方差公式或能用提取公因式的方程.它避免了用公式法解时的复杂计算,提高了计算速度和准确程度.

* 情景展示



例1 用因式分解法解下列方程.

$$(1) x^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{2})x - \sqrt{10} = 0$$

$$(2) (3x - 1)^2 - 2(3x - 1) - 3 = 0$$

$$(3) 2x^2 + (a + b)x - a(a - b) = 0$$

解: (1)原方程可变形为 $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{2}) = 0$

$$\therefore x + \sqrt{5} = 0 \text{ 或 } x - \sqrt{2} = 0$$

$$\therefore x_1 = -\sqrt{5}, x_2 = \sqrt{2}$$

(2)原方程可变形为 $[(3x - 1) - 3][(3x - 1) + 1] = 0$

$$\therefore (3x - 1) - 3 = 0 \text{ 或 } (3x - 1) + 1 = 0$$

$$\therefore x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = 0$$

(3)原方程可变形为 $[2x - (a - b)][x + a] = 0$

$$\therefore 2x - (a - b) = 0 \text{ 或 } x + a = 0$$

$$\therefore x_1 = \frac{a - b}{2}, x_2 = -a$$

 填空

1. 方程 $5x(2x - 1) = 0$, 则 $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 方程 $3x^2 + 7x = 0$, 则 $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 方程 $25x^2 - 9 = 0$, 则 $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.



4. 方程 $(5x-3)-3(5x-3)^2=0$, 则 $x_1=$ _____, $x_2=$ _____.

5. 方程 $(y-2)(y-3)=2$, 则 $y_1=$ _____, $y_2=$ _____.

用因式分解法解下列方程

6. $x^2-12x+20=0$

7. $x^2-5x-24=0$

8. $8x^2-2x-15=0$

9. $6x^2+13x-28=0$

10. $(3y+1)(2y-3)=2(3y+1)$

11. $\sqrt{2}x^2-3x+\sqrt{2}=0$

12. $2(x-4)^2-3(x-4)-5=0$

13. 关于 x 的方程 $2ax^2-a^2x-2bx+ab=0$

§3 一元二次方程的根的判别式

* 知识导学



1. 理解一元二次方程的根的判别式的意义;
2. 会用一元二次方程的根的判别式判定根的情况;
3. 会用一元二次方程的根的判别式确定方程中字母的取值范围.

* 知识平台



一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$), 用配方法总可以化为 $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, 因为 $a \neq 0$, 所以 $4a^2 > 0$, 由平方根的意义可知, b^2-4ac 的符号可以决定一元二次方程根的情况.

b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式, 用“ Δ ”表示, 即 $\Delta = b^2-4ac$.

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$).

$\Delta = b^2-4ac > 0 \iff$ 方程有两个不相等的实数根;

$\Delta = b^2-4ac = 0 \iff$ 方程有两个相等的实数根;

$\Delta = b^2-4ac < 0 \iff$ 方程没有实数根.

* 情景展示



例1 不解方程,判别下列方程的根的情况.

(1) $4x(x-1)-3=0$

(2) $3x^2-2\sqrt{6}x+2=0$

(3) $\sqrt{3}y^2-\sqrt{2}y+2=0$.

解: (1)原方程可化为 $4x^2-4x-3=0$, 其中 $a=4, b=-4, c=-3$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 4 \times (-3) = 16 + 48 > 0$$

$\therefore$ 原方程有两个不相等的实根.

(2)原方程中, $a=3, b=-2\sqrt{6}, c=2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{6})^2 - 4 \times 3 \times 2 = 24 - 24 = 0$$

$\therefore$ 原方程有两个相等的实数根.

(3)原方程 $a=\sqrt{3}, b=-\sqrt{2}, c=2$. $\Delta = b^2 - 4ac = (-\sqrt{2})^2 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = 2 - 8\sqrt{3} < 0$.

$\therefore$ 原方程没有实数根.

评注 要先把方程化为一般式,再确定 a, b, c ,最后再判断判别式的符号.

例2 不解方程,判断关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (K-1)x + (K-3) = 0$ 的根的情况.

解: 此方程的判别式为: $\Delta = (K-1)^2 - 4(K-3)$

$$= K^2 - 2K + 1 - 4K + 12 = K^2 - 6K + 13 = (K-3)^2 + 4$$

$\therefore (K-3)^2 \geq 0 \therefore (K-3)^2 + 4 > 0 \therefore \Delta > 0 \therefore$ 原方程有两个不相等的实根.

例3 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2 - 2mx + (m+2) = 0$ 在下列条件下,分别确定 m 的取值范围:

(1)有两个相等的实数根; (2)没有实数根.

解: (1)方程有两个相等的实数根的条件是

$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta = (-2m)^2 - 4(m-1)(m+2) = 0 \end{cases}$$

解,得 $\begin{cases} m \neq 1 \\ m = 2 \end{cases}$ 所以 $m=2$

$\therefore$ 当 $m=2$ 时,方程有两个相等的实数根.

(2)方程无实数根的条件是

$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta = -4m + 8 < 0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m \neq 1 \\ m > 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 当 $m > 2$ 时,方程没有实数根.



鉴定题

填空题

1. 方程 $x^2 - ax - 5 = 0$, $\Delta =$ _____, 方程 _____ 实根.
2. 方程 $x^2 + mx + 2m^2 = 0$, $\Delta =$ _____, 方程 _____ 实根.
3. 方程 $\sqrt{2}x^2 + 3mx + m^2 = 0$, $\Delta =$ _____, 方程 _____ 实根.
4. 方程 $x^2 - ax + a^2 + 1 = 0$, $\Delta =$ _____, 方程 _____ 实根.
5. 当 K _____ 时, 方程 $x^2 - 2(K+1)x + (K^2 - 2) = 0$, 有两个不相等的实数根.
6. 当 m _____ 时, 方程 $x^2 - (m+1)x + 4 = 0$, 有两个相等的实数根.
7. 如果方程 $x^2 - 2x + \frac{a}{2} = 0$ 没有实数根, 那么 a 的取值是 _____.

解答题

1. 关于 x 的方程 $mx^2 + 5x + 3 = 0$ 有两个不相等的实根, 求 m 的取值范围.
2. 已知关于 x 的方程 $a(1 - x^2) + 2bx + c(1 + x^2) = 0$ 有两个相等的实数根, 且 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边, 判断 $\triangle ABC$ 的形状.
3. 求证: 不论 m 为何值, 关于 x 的方程 $(m^2 + 1)x^2 - 2mx + (m^2 + 4) = 0$ 都没有实数根.
4. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2(a+2)x + a^2 - 16 = 0$ 的一次项系数是正数, 且有两个实数根, 求 a 的整数值.

§4 一元二次方程的根与系数的关系

* 知识导学



1. 掌握一元二次方程根与系数的关系;

2. 能运用根与系数关系由已知一个一元二次方程的根求另一个根与未知系数;
3. 会求一元二次方程两个根的倒数和与平方和.

知识平台

1. 如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两个根 x_1, x_2 , 那么 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.
若方程 $x^2 + px + q = 0$, 它的两根 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, 以 x_1, x_2 为根的一元二次方程(二次项系数为1)是 $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$

2. 已知方程的一个根, 可利用 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ 求出另一个根及未知系数的值.

3. 一元二次方程两根的倒数和 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$, 两根的平方和 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$.

情景展示

例1 把下列各代数式分别用含 $x_1 + x_2, x_1 \cdot x_2$ 的代数式表示.

(1) $x_1^2 + x_2^2$; (2) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; (3) $(x_1 - x_2)^2$; (4) $x_1^3 + x_2^3$; (5) $|x_1 - x_2|$

(6) $x_1 x_2^2 + x_2 x_1^2$; (7) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

解: (1) $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$;

(2) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_1}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$;

(3) $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 - 4x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$;

(4) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 - 3x_1 x_2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2] = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2(x_1 + x_2)$

(5) $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}$

(6) $x_1 x_2^2 + x_2 x_1^2 = x_1 x_2(x_1 + x_2)$

(7) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 \cdot x_2)^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2}$

例2 已知方程 $3x^2 + 5x - 4K = 0$ 的一个根是 -2 , 求它的另一个根 α 和 K 的值.

解: 根据根与系数的关系, 有 $\alpha + (-2) = -\frac{5}{3}$ $\therefore \alpha = -2 - \frac{5}{3} = -\frac{11}{3}$

又由根与系数的关系, 得 $-\frac{4}{3}K = (-2) \times \frac{1}{3}$ $\therefore K = \frac{1}{2}$

$\therefore K = \frac{1}{2}, \alpha = -\frac{11}{3}$.

例3 a 为何值时, 一元二次方程 $2x^2 - 3x - a = 0$

(1)有两个正实数根,(2)有两个符号相反的实数根.

解: (1)设 x_1, x_2 是方程 $2x^2 - 3x - a = 0$ 的两个实数根, 则 $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}, x_1 \cdot x_2 = -\frac{a}{2}$

$$\text{由题意得} \begin{cases} \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2(-a) \geq 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{3}{2} > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{a}{2} > 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a \geq -\frac{9}{8} \\ a < 0 \end{cases} \therefore \text{当 } -\frac{9}{8} \leq a < 0 \text{ 时, 方程有两个正实数根.}$$

$$(2) \text{根据题意分析可知, 只须} \begin{cases} \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2(-a) \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{a}{2} < 0 \end{cases} \text{解之, 得} \begin{cases} a \geq -\frac{9}{8} \\ a > 0 \end{cases}$$

$\therefore$ 当 $a > 0$ 时, 原方程有两个符号相反的实数根.

鉴定题

填空题

1. 已知方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根为 -3 和 5, 则 $p =$ _____, $q =$ _____.
2. 已知方程 $x^2 - bx + 22 = 0$ 的一个根为 $5 - \sqrt{3}$, 则另一个根为 _____, $b =$ _____.
3. 已知方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 的一个根为 $2 + \sqrt{3}$, 则另一个根为 _____, $m =$ _____.
4. 设 x_1, x_2 是方程 $2x^2 + 4x - 3 = 0$ 的两个根, 则 $(x_1 + 1)(x_2 + 1) =$ _____, $x_1^2 + x_2^2 =$ _____, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} =$ _____, $(x_1 - x_2)^2 =$ _____.
5. 以 $\sqrt{3} + 1$ 和 $\sqrt{3} - 1$ 为根的一元二次方程是 _____.
6. 若两数的和为 3, 它们的积为 -4, 则这两个数分别是 _____ 和 _____.
7. 对于一元二次方程 $x^2 + mx + n = 0$, 如果它的两个根互为相反数, $m =$ _____; 如果两根互为倒数, 那么 $n =$ _____.

选择题

1. 关于 x 的方程 $2x^2 - 8x - p = 0$ 有一个正根, 一个负根, 则 p 的值是 _____ ()
A. 0 B. 大于零 C. -8 D. -4
2. 若关于 x 的方程 $3x^2 + 21x + a = 0$ 的一个根是 -5, 则另一个根和 a 的值分别是 _____ ()
A. -2, 30 B. -2, -30 C. -2, -10 D. -2, 10

3. 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a > 0)$ 有两个正实根的条件是 ()

A. $\Delta > 0, a, b$ 异号, a, c 同号

B. $\Delta \geq 0, b < 0, c > 0$

C. $\Delta < 0, c > 0, b > 0$

D. $\Delta \geq 0, a, b$ 异号, a, c 异号

解答题

已知关于 x 的方程 $2x^2 - 5 + (1 - m) = 0$

(1) m 为何值时, 有一个根为 0;

(2) m 为何值时, 两实根互为倒数;

(3) m 为何值时, 有两个正实根;

(4) m 为何值时, 有两个异号的实根;

(5) m 为何值时, 有两个不相等的实根 x_1 和 x_2 , 且 $x_1^2 + x_2^2 = \frac{17}{4}$.

§5 二次三项式的因式分解(用公式法)

* 知识导学

1. 了解二次三项式的因式分解与解方程的关系;
2. 会利用一元二次方程的求根公式在实数范围内将二次三项式分解因式.

* 知识平台

1. 形如 $ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的多项式叫二次三项式.
2. 二次三项式的因式分解方法有: ①十字相乘法, ②乘法公式法. 以上两种方法仅限于系数比较简单或特殊情况.
3. 求根公式法: 这种方法适合于一般的二次三项式的分解, 其步骤是: 先求出二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 所对应的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根 x_1, x_2 , 然后写成 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

* 情景展示

例 1 在实数范围内分解因式

(1) $x^2 - x - 1$

(2) $4x^2 - 8x + 1$