成人高校辅导丛书

刘维翰
吴增炽 主编

胡长华
李毓芝 编著
张旭辉

概率与数理统计简明辅导

广西科学技术出版社

成人高校辅导丛书

概率与数理统计简明辅导

刘维翰　吴增炽　　主编

胡长华　李[illegible]芝　张旭辉　　编著

广西科学技术出版社

内 容 简 介

本书内容共分十二章，第一章到第六章是概率部分，包括预备知识、随机事件及其概率、随机变量与概率分布、随机变量的数字特征、随机向量、极限定理；第七章至第十二章是数理统计部分，包括数理统计的基本概念及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析、正交试验设计等。每章均包括四个部分：主要内容简述；典型例题分析及解法指导；小结；自我检查题和自测题。

本书是各类成人高校学员、自学者学习概率与数理统计的辅导用书，亦可供普通高等工科院校、师范院校学生及辅导教师参考使用。

成人高校教学研究丛书

概率与数理统计简明辅导

刘维翰 吴增炽 主编

*

广西科学技术出版社出版

（南宁市河堤路14号）

广西新华书店发行

广西大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张14.625 字数327,800

1989年5月第1版 1989年5月第1次印刷

印 数：1—5,000册

ISBN 7-80565-087-X

0·6 定价：4.50元

前　言

一

本书根据中央广播电视大学使用的“概率与数理统计”教材内容及教学大纲，结合我们多年来在电大及其它成人高等院校教学、辅导的体会，针对成人学习的特点而编写的，目的是为各类成人高校学员、自学者学习“概率与数理统计”提供一本简明辅导书。本书特点是内容简明，重点突出，例题典型、广泛，解题方法、规律指导明确，复习资料完整。

本书共分十二章，每章包括下述四个部分：

一、主要内容简述　归纳了一章的基本概念的定义、重要定理、常用的法则和公式。

二、典型例题分析及解法指导　例题包括概念题、计算题、证明题和应用题，还有较灵活的综合题。选题广泛、典型。不少例题作了解题前的分析及解题思路指导。解题详尽，解后作了解题小结。

三、小结　这一部分扼要地归纳了一章所学内容，明确该章的重点及基本要求，并提出学习该章内容的注意事项。

四、自我检查题与自测题　自我检查题着重检查对该章的基本概念、常见计算公式、法则的理解和掌握的程度；自测题除了检查对该章的基本知识的掌握程度外，还检查了分析与处理问题及综合应用知识的能力。

最后，书末附上历届电大“概率与数理统计”期考试题

（并作了详尽的解答）。

本书编写过程中，得到一些老师的支持和帮助，在此特向有关同志表示衷心感谢。

由于水平有限，成书仓促，缺点和错误在所难免，欢迎读者指正。

编　者

1987.4.

目　录

第一章　预备知识

一、主要内容简述

（一）加法原理与乘法原理

1. 加法原理

完成某事，独立地存在 n 类办法，第一类有m_1种方法，第二类有m_2种方法……，第 n 类有 m_n 种方法，那么完成这件事共有

$$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

种不同方法。

2. 乘法原理

完成某事，需先后分 n 个步骤，做第一步有m_1种方法，做第二步有m_2种方法……，做第 n 步有 m_n 种方法，那么完成这件事共有

$$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$$

种不同方法。

注意　加法原理的特点是各类办法彼此独立；乘法原理的特点是各个步骤要连续完成。两个原理的共同点是：办一件事，共有多少种方法。这两个原理是解决排列与组合问题的基础知识。

（二）排列

排列分非重复排列与重复排列，本书重点研究非重复排列。

1．排列定义及排列数公式（指非重复排列）

（1） 定义

从 m 个不同元素中任取 n（$n \leqslant m$）个不同元素，按照一定顺序排成一列，叫做从 m 个不同的元素中每次取 n 个不同元素（简称 m 中选 n）的一个排列。其种数称为排列数，记作 P_m^n（或 A_m^n）。

（2） 排列数公式

① $P_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$，其中：$1 \leqslant n \leqslant m$，且 m、n 均为自然数。

② 当 $n = m$ 时，$P_n = P_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$（$n!$ 读做 n 阶乘），这种排列称为全排列。

③ $P_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$

④ 规定：$P_m^0 = 0! = 1$

注意 排列与排列数在概念上的区别。

2．重复排列及其排列数公式

从 m 个不同元素中，每次取出 n 个元素（元素可以重复出现，n 也不一定要小于或等于 m），按照一定的顺序排成一列，称为一个重复排列。

从 m 个不同的元素中，每次取出 n 个元素（简称m中选n）的重复排列种数是：m^n。

排列（非重复排列或重复排列）总是有序的。

（三）组合

1．组合定义及组合数公式

（1） 定义

由 m 个不同的元素任取 $n(n\leqslant m)$个元素编成一组，叫做从 m 个不同元素中任取 n 个元素（简称 m 中取n）的一个组合。其种数称为组合数，记为 C_m^n。

（2） 组合数公式

① $$C_m^n=\frac{P_m^n}{n!}=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1}$$

② $$C_m^n=C_m^{m-n}$$

③ $$C_m^n=\frac{m!}{n!(m-n)!}$$

④ 规定 $C_n^0=1$

注意 1° 组合与组合数在概念上的区别；

2° 组合中的元素是无序的。

（四）二项式定理

1．二项式定理

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r$$

$$=C_n^0 a^n b^0+C_n^1 a^{n-1} b^1+\cdots+C_n^r a^{n-r} b^r+\cdots$$

$$+C_n^n a^0 b^n$$

称这个展开式为二项式定理（注意 $C_n^n=C_n^0=1$）。

2．二项展开式通项公式

第 $r+1$ 项（$r=0，1，\cdots，n$）的通项公式是：

$$T_{r+1}=C_n^r a^{n-r} b^r$$

（3） 二项展开式性质

① 项数：共 $n+1$ 项

② 指数：a 的指数降幂排列，b 的指数升幂排列。a、b 指数和恒等于 n。

③ 系数（仅指 C_n^r）

1° 与首末两项“等距离”两项系数相等；

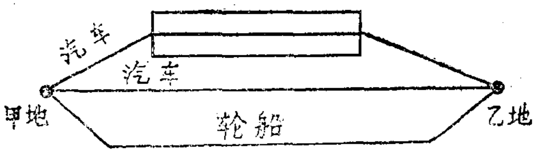
2° 最大系数居中：n 是偶数时，中间一项系数最大；n 是奇数时，中间两项系数最大。

3° 系数总和是 2^n。即 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$。

二、典型例题分析及解法指导

例 1 从甲地到乙地，有汽车、火车、轮船可达。如一天中汽车有 8 趟，火车、轮船各有 1 趟，问从甲地到乙地共有多少种走法？

分析　图示



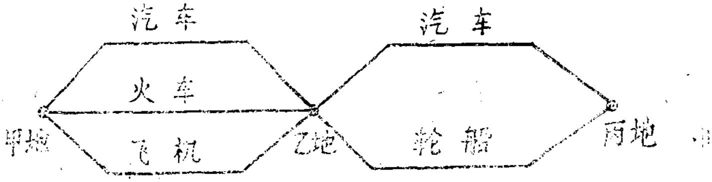
解　$N = 3 + 1 + 1 = 5$

答　从甲地到乙地共有5种走法。

说明　从甲到乙共有三种(火车、汽车、轮船)走法，各种走法彼此独立（均能到达乙地），可用加法原理计算总的走法。

例2　从甲到丙途经乙地。已知从甲到乙有汽车、火车、飞机三种交通工具可达，从乙到丙有汽车、轮船两种工具可达，问从甲到丙共有多少种不同走法。

分析　图示



解　$N = 3 \times 2 = 6$

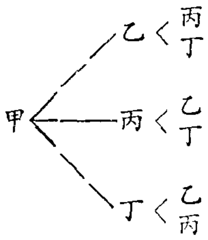
答　从甲到丙共有6种不同走法

说明　从甲到丙地途中必经乙地，每类均分两步连续才

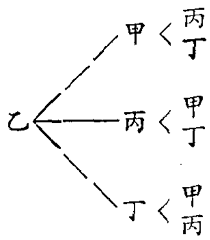
能完成。第一类共有3种走法，第二类共有2种走法，故必须使用乘法原理，计算出总的走法。

例3　甲、乙、丙、丁，可以组成哪些三人排列？这样排列共有多少个？

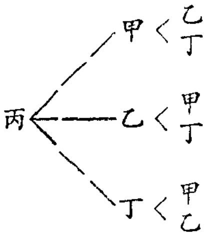
分析　观察树图



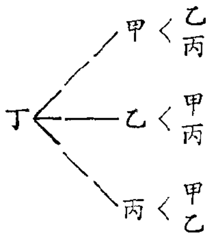
3 × 2 个



3×2个



3×2个



3×2个

解　因为排列是有序的，由题意分析，共有下面这些排列：

甲乙丙	乙甲丙	丙甲乙	丁甲乙
甲乙丁	乙甲丁	丙甲丁	丁甲丙
甲丙乙	乙丙甲	丙乙甲	丁乙甲
甲丙丁	乙丙丁	丙乙丁	丁乙丙
甲丁乙	乙丁甲	丙丁甲	丁丙甲
甲丁丙	乙丁丙	丙丁乙	丁丙乙

这是4中选3的无重复排列，其排列总数为：

$P_4^3=4\times3\times2=24$（个）

说明 1° 树图是学好排列的基础。初学者掌握它对学好排列知识是非常实用的（复杂问题不宜采用）。

2° 排列是有序的，排列数的计算可直接由公式得出，其原理是乘法原理。

3° 注意排列与排列数是两回事。

例4 某信号兵团用红、黄、蓝三面旗子从上到下排在竖直旗杆上表示信号，每次可任挂一面，任挂二面或三面，并且不同顺序表示不同信号，一共可表示多少种不同信号。

分析 旗子颜色顺序不同所表示信号也不同，因此它是排列问题。又因为从三面不同颜色旗子中任选一面、二面、三面均可表示不同信号，因此是三类彼此独立问题，故先用乘法原理，后用加法原理求信号总数。

解 $P_3^1+P_3^2+P_3^3=3+3\times2+3\times2\times1=15$（种）

答 共可表示15种不同信号。

例5 用0到9这十个数字可以组成多少个无重复数字的三位数？

解法一 （直接法，观察填空图）

百位数上的数字不能为0，故

0，1，2，…，9

↓	↓	↓
百位	十位	个位
P_9^1	P_9^1	P_8^1

只有P_9^1种选法，百位上数字确定后，十位数上的数字可从

余下的九个数字中（注意数字0可入选）选出，有 P_9^1 种选法。同理，个位数上的数字有 P_8^1 种选法。由乘法原理，所求的三位数的个数是

$$P_9^1 \cdot P_9^1 \cdot P_8^1 = 9 \times 9 \times 8 = 648$$

解法二 （直接法）

百位数上的数字选法与解法一相同，综合分析十位和个位上数字，可以从余下的九个数字中任选两个，有 P_9^2 种选法，故所求的三位数的个数是

$$P_9^1 \cdot P_9^2 = 9 \times 9 \times 8 = 648$$

解法三 （间接法）

固定0排头，从其余的九个数字中任选两个排成的三位数共有 P_9^2 个，从总数 P_{10}^3 去掉以0排头的 P_9^2 个三位数，即为所求。

$$P_{10}^3 - P_9^2 = 10 \times 9 \times 8 - 9 \times 8 = 648$$

解法四 （间接法）

以0排头的三位数，占从0～9这十个数字排头的三位数的个数的十分之一，故所求的三位数的个数是：

$$P_{10}^3 - \frac{1}{10} P_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 - \frac{1}{10} \times 10 \times 9 \times 8 = 648$$

说明 1° 求排列数的方法是多种的，但思维方式和处理手段不外乎是直接法和间法两种。对某些问题，间接法比直接法更易凑效。

2° 解法二是解法一的改进，解法四是解法三的变种．一般来说，此题宜用解法二或解法三。

3° 填空图是初学者分析和解决简单排列问题行之有效

的方法。

4° 注意特殊元素及特殊位置。如本例数字0不能排头。

例6 某城市的电话号码是四位数，问

（1） 若每个用户只占一个电话号码，该城市电话局能容纳多少个用户？

（2） 非重复数字出现的电话号码是多少个？

解 （1） 因为电话号码的数字可重复，而m中选n的重复排列数是m^n，故该城市的电话局能容纳用户个数是

$$m^n=10^4=10000$$

（2） 非重复数字出现的号码个数是

$$P_{10}^4=10\times9\times8\times7=5040$$

例7 （1） 若$C_x^3=120$， 求P_x^3；

（2） 已知 $3C_m^4=5C_{m-1}^{m-6}$，求m。

解 （1） $C_x^3=\dfrac{P_x^3}{3!}=120$ $\therefore P_x^3=3!\times120=720$

（2） $\because$ $C_{m-1}^{m-6}=C_{m-1}^{(m-1)-(m-6)}=C_{m-1}^5$

$\therefore$ $3C_m^4=5C_{m-1}^5$

$$3\cdot\frac{m!}{4!(m-4)!}=5\cdot\frac{(m-1)!}{5!(m-1-5)!}$$

$$3\cdot\frac{5!\cdot m!}{4!(m-1)!}=5\cdot\frac{(m-4)!}{(m-6)!}$$