集記

集　　論

F. 豪斯道夫 著

张义良　顏家駒 譯

科　学　出　版　社

1960

F. HAUSDORFF
MENGENLEHRE
Watter de Hruyter
1935

內 容 簡 介

全書共分十章及一个附录．第一章至第四章討論集及其結合，集的势、型及序数；第五章講集系，內容包括环，体，Borel 集及 Suslin 集；第六第七章为点集論，而 Borel 集及 Suslin 集在此获得进一步的闡述；第八章，空間的映象；第九章，实函数；第十章是比較近代的材料，內容包括 Baire 条件及半单叶映象；附录中所列亦系較新材料，但不加証明，作为正文中有关部分的参考．

本書对 Borel 集，Suslin 集以及 Baire 函数有較完全的处理，对連續映象及同胚也講得比較深入．

集　論

F. 豪斯道夫 著
张义良　顏家駒 譯

*

科学出版社出版（北京朝陽門大街 117 号）
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号
中国科学院印刷厂印刷　新华書店总經售

*

1960 年 4 月第一版　　书号：2179
1960 年 4 月第一次印刷　　字数：280,000
（京）报精 1–3,700　　开本：787×1092 1/27
（京）報平 1–4,200　　印張：12 16/27　　插頁：2

定价：报紙精装本 2.30 元
定价：报紙平装本 1.60 元

前　註

实数区間，各按端点是否也算在内，分别用方括弧或圓括弧記之。故若 $a<b$，則

$$[a,b] \quad [a,b) \quad (a,b] \quad (a,b)$$

分别表示滿足下列条件

$$a\leqslant x\leqslant b \quad a\leqslant x<b \quad a<x\leqslant b \quad a<x<b$$

的数 x 所成的集。$[a,b]$称为閉区間，(a,b)称为开区間，其余两个称为半閉的或半开的。对于单側无限区間(閉的及开的半直綫)我們采用不屬于区間的非固有端点 $+\infty$，$-\infty$；是則

$$[a,+\infty) \quad (a,+\infty) \quad (-\infty,b] \quad (-\infty,b)$$

分别是滿足下列条件

$$x\geqslant a \quad x>a \quad x\leqslant b \quad x<b$$

的数 x 所成的集。$(-\infty,+\infty)$是由所有实数(整个直綫)所成的集。

有限多个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的最大者和最小者各称为极大和极小，記作

$$\max[x_1,x_2,\cdots,x_n], \quad \min[x_1,x_2,\cdots,x_n].$$

例如 $\max[2,-3]=2$，$\min[2,-3]=-3$，$\max[2,2]=\min[2,2]=2$。同理，若无限多个数中有最大者及最小者存在，則仿此記之。

若一实数列 $x_1,x_2,\cdots$是向上有界的，就是說，如果有这样的数 v 存在，对于任一 n 总成立 $v\geqslant x_n$，則这种数 v 中必有一最小的v_1，此数一般称为数列x_n的上限(Weierstrass；也有称为上界的)；我們把它譯作上确界(Supremum)并写成

$$v_1=\sup[x_1,x_2,\cdots]=\sup x_n.$$

例如 $\sup\left[0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\cdots\right]=\sup\frac{n-1}{n}=1$。若数列有极大，則上限与极大合一。同样可以定义向下有界数列的下限或下确界(Infimum)

$$u_1=\inf[x_1,x_2,\cdots]=\inf x_n.$$

相应的記法适用于非数列形式的数集，如

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

对于一个向上有界的数列，所有下列上限

$$v_n=\sup[x_n,x_{n+1},x_{n+2},\cdots]$$

都存在，且 $v_1\geqslant v_2\geqslant\cdots$；如果这些 v_n 是向下有界的，且 v 为其下限之值，则称此值为数列 x_n 的上极限或上限的极限（Limes superior），記作

$$v=\lim\sup x_n=\overline{\lim}\, x_n.$$

仿此可以定义下极限或下限的极限（Limes inferior）

$$u=\lim\inf x_n=\underline{\lim}\, x_n.$$

当有界性的假定不成立时，则采用記号 $\pm\infty$。例如对于一个向上无界的数列 x_n，则令 $\sup x_n=+\infty$, $\overline{\lim}\, x_n=+\infty$；对于一个向上有界但其上述上限 v_n 向下无界的数列 x_n，令 $\overline{\lim}\, x_n=-\infty$。

对于数列及函数的收斂我們照例沿用箭头符号，例如以

$$x_n\to x \text{ 表示 } \lim x_n=x,$$

同样对于本义发散亦沿用此記号($x_n\to+\infty$, $x_n\to-\infty$)。

一个关于自然数 $n(=1,2,3,\cdots)$ 的命題，如果它从某一确定的 n 开始($n\geqslant n_0$)始終成立，或至多除了有限多个例外外对所有 n 都成立，则称此命題为最后成立或对于几乎一切 n 成立 (G. Kowalewski)；如果它对于无限多个 n 成立 (例如对于 $n=2,4,6,8,\cdots$ 成立)，则称此命題为无限次成立。当我們說到某数列 x_n 的几乎一切項或无限多項时，意思是指該数列中隶屬于几乎一切 n 或无限多个 n 的那些項 x_n 而言，不管这些項相異与否。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

二版序言摘录

本書試图通过詳尽的論証闡明集論中一些最重要的理論，使通篇不需另外的輔助材料，但却有由此进研广泛文献的可能。对于讀者，只假定具备微积分的初步基础，不必有更高深的数学知識，但应有一定的抽象思考敏銳力，大学二三年級学生讀之可望获致成效。个别章末的較难材料，初学时不妨略过；讀者若只欲得知点集論的梗概，則在浏覽首二章之后可卽讀第六章。——对于专家們，希望至少就形式方面，特别是通过定理的加强，証明的简化，以及多余假設的取消等向他們提供一些新东西。

对范围如此广博且尙在日益扩展中的本門学科，材料的选择不得不多少带有主观性，且許多愿望（包括著者的在內）都无法滿足；教本固不能希冀专著的完备性。再者，照本書目前的规模，較之第一版（集論綱要，萊比錫 1914）要求在取材范围上大加限制，以致就連最小的部分也得有所更动，結果著者就索性重新写过了。在第一版的材料中，相信首先可删除的是比較独立的有序集理論（除一小部分仍予保留外），其次是 Lebesgue 測度与积分理論初阶，关于这些內容，都不乏别的著作。此外的一些删节也許将被認为是可惜的，那是为了进一步节省篇幅，在点集論里舍棄了拓扑論点（原先的講法，显然曾使第一版博得多方好評）而限制在尺度空間的較簡单的理論上，对此，§ 40 关于拓扑空間的概述是不足抵补的。最后，在专門性的理論方面，著者也作了如上的同样限制而删去了欧氏空間的特殊理論（例如关于平面曲綫的 Jordan 定理），卽几乎所有建立在迫近多边形及多面形上的理論都删掉了；讀者虽还能遇到大量关于欧氏空間的定理，但都只是以欧氏空間为可离空間或完全空間或局部連通空間等等的特殊情況而对之成立的。—这些删节，使我們有可能对 Borel 集，Suslin 集（1917 年发現）以及 Baire 函数作比較全面的处理；連續映照及同胚亦較以往講得

深入些。至于有关矛盾及基础評論方面的討論，和以往一样，現在仍不打算列入。

三 版 序 言

集論的不断蓬勃发展，使著者很想把本書再重写一次；由于一些客观原因，不得不放棄此想。因此前九章几乎是二版的无所更动的再版。但为了使这期間获得的进展至少部分地在此得到应有的反映，著者在新添的第十章中詳細闡述了两个題材（这些是著者觉得特别应該重視的）以及在附录中不加証明地介紹了另外三个內容；如果不是受篇幅的限制，所涉范围原是可以大大扩充的。

目　录

第一章 集及其結合

§1. 集

把一个个的东西集合起来成一整体，这样便形成一个集. 把許多东西一起当作一个单体考虑，这便是一个集. 这样的或类似的說法若欲当作集的定义，則我們有理由不同意，因为这是一种自相定义，甚至可說是以莫名定义莫名. 但是我們可以把它当作一种說明、当作是对原始的，人所公認的思維过程的指証，这种思維过程之演解为更原始的过程也許是既不可能亦不必要. 我們将以此为滿足，而把下面所說的当作基本事实：一事物M以特有的但不可定义的方式确定了某些别的事物$a,b,c,\cdots$，而这些事物又反过来确定了M；这一关系用話来說便是：集M由事物$a,b,c,\cdots$所組成.

一个集可以由某个自然数所表示的那么多个(即有限多个——譯者)事物組成，也可以由无限多个事物組成；我們分别称之为有限集或无限集. 某一城市的居民組成的集，太阳上氫原子的集，从1到1,000的自然数的集，这些都是有限集的例；另一方面，由所有自然数組成的集，直綫上所有点組成的集，平面上所有圓組成的集，这些都是无限集的例. 从有限集推进到无限集是 Georg Cantor (1845-1918) 的不朽功績，这是通过一系列内心的和外界的斗爭而后完成的：对表面上显現的矛盾，对因袭的成見、哲学的武断(无限不存在)，以及对普遍存在着的怀疑，而这就連当代的大数学家也不例外. Cantor 由此成为一門嶄新科学—集論—的締造者(因有限集的探討固不出初等算术与組合論的范围)，于今，集論已构成全部数学的基础了. 就 Cantor 思想的这一胜利来說，据我們的看法，并未改变这一事实，即由于造集时的高度任意性而产生的一桩矛盾还需加以圓滿的解释与消除.

一事物a与它所屬的集A之間的基本关系，依 G. Peano，我們

用下面的話和式子来表示：

$$a\text{是}A\text{的元：}\quad a\in A.$$

这断語的反面是：

$$a\text{不是}A\text{的元：}\quad a\overline{\in}A.$$

当且仅当两集中任一集的每一元都是另一集的元时（即当二者含有相同的元时）方定义此二集相等，記作

$$A=B.$$

据此，知一集是由它的元所单义确定的；此事可如此表出，即以写在花括弧里的元来表示这些元所組成的集，此时，凡未給出的元統以点子示之。例如

$$A=\{a\},\quad A=\{a,b\},\quad A=\{a,b,c\}$$

分别是由一个元 a，两个元 a,b，三个元 a,b,c 所組成的集；而

$$A=\{a,b,c,\cdots\}$$

則是由元 a,b,c 以及（可能有的）其它元所組成的集。这些由点子表示的其它元到底应是什么，自然必須用某种方式加以給出，例如

自然数的集 $\{1,2,3,\cdots\}$，

偶自然数的集 $\{2,4,6,\cdots\}$，

平方数的集 $\{1,4,9,\cdots\}$，

2 的冪的集 $\{1,2,4,8,\cdots\}$，

質数的集 $\{2,3,5,7,\cdots\}$。

事物 a 与仅仅含此事物的集 $\{a\}$，二者間的区分在概念上无論如何是必要的（即使实用上往往不要求），因为单拿下述事实来說，已見有此必要：我們也容許有这样的集，这种集的元本身即是集（所謂集系）。集 $a=\{1,2\}$ 由两个元 1,2 所組成，而集 $\{a\}$ 是由一个元 $a=\{1,2\}$ 組成的。

为方便計，也容許有集 0，所謂零集或空集，这是不含任何元的集[1]。据集的相等定义知只有一个零集。$A=0$ 的意义是，集 A 沒有元，是空的，"消失了"。要是不把零集当作集，則势将在无数

1）記号 0 究屬表示零集还是数零，由出現处行文的上下联系，不致发生疑义。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

情况中，只要我們講到一集，就得添上一个附註："如果此集是存在的"。事实上，因为单凭一集的元的定义，往往还全不知道这样的元到底是否存在；例如，到現在还不知道能使方程

$$x^{n+2}+y^{n+2}=z^{n+2}$$

对自然数 x,y,z 可解的自然数 n 的集是否空集(卽著名的 Fermat 定理是否眞确)。故断語 $A=0$ 能表达一項实在的認識——自然，在別的一些情况中也可能是件显見的事实；許多数学断語，甚至一切数学断語，若不憚繁瑣，都可轉化成 $A=0$ 的形式。因此，零集的引入正如数零的引入一样，系出于方便合用的理由；另方面，这也常常是为了要能明确地指說某集在一定理的假設下的不消失(正如某数的不消失)。

設 A,B 为两集，則产生这样的問題，卽其中一集的元是否也屬于另一集。若 a,b 分别表示 A,B 的元，則我們可先作出下列二交替，卽：

每个 $a\in B$，并非每个 $a\in B$，

每个 $b\in A$，并非每个 $b\in A$。

經組合，由此得四种可能，其中前三种并用一附带的式子記之：

(1) 每个 $a\in B$，每个 $b\in A$：$A=B$

(2) 每个 $a\in B$，并非每个 $b\in A$：$A\subset B$

(3) 并非每个 $a\in B$，每个 $b\in A$：$A\supset B$

(4) 并非每个 $a\in B$，并非每个 $b\in A$。

在情况(1)中，据两集相等的定义知此二集确实相等。在情况(2)中，A 只包含 B 的元但并未包尽 B 的一切元，因此，A 有作为較小的集、B 有作为較大的集的特征；我們用記号 $A\subset B$ 記之，这里可回忆数值关系 $\alpha<\beta$。在情况(3)中，一切与(2)相反，故为 $A\supset B$，也就是 $B\subset A$。一般情况下出現的不是以上所說的任一种，而是情况(4)，对此不需特別的記号。

"小于"这一关系是传递的，卽由 $A\subset B$，$B\subset C$ 可得 $A\subset C$("大于""等于"两关系自然也一样)。

若每个 $a\in B$，则情况(1)(2)之一出現，合併[1] 記之为

$$A\subseteq B,\qquad A\text{是}B\text{的子集}$$

(亦称 B 的部分或部分集)；若較强的关系 $A\subset B$ 成立，則有时称 A 为 B 的眞子集。故在 B 的諸子集中，B 本身及零集都算在內；当 $A=0$ 时，則因事实上根本不存在 a，故关系

$$\text{每个 } a\in B$$

当然满足[2]。此时，$0\subset B$ 或 $B\supset 0$ 表示集 B 不空。作这样的約定，其便利性例如在計数一有限集的諸子集时卽可見到。$\{1,2,3\}$ 的子集为：

$$0,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\},$$

共計 $8=2^3$ 个。n 个元的集，其含有 m 个元的子集計有 $\binom{n}{m}$ 个，这里，$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ 为二項系数且 $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$；子集的总数共計

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n.$$

只此簡单結果，已足說明上述子集概念的意义了。

若 $A\subseteq B$，則

$$B-A$$

表示 B 的元不屬于 A 者的集；这个差也称 A 在 B 中的余集。显有

$$B-0=B,\quad B-B=0,$$

$$B-(B-A)=A.$$

这里应加申明，因为别的著者不是这样，卽在构成差时，我們总假定减集是被减集的子集。例如 $C-(B-A)$，当先假定 $A\subseteq B$，然后假定 $B-A\subseteq C$。例：設 $A=\{5,6,7,\cdots\}$ 为 5 以上的自然数集，$B=\{1,2,3,\cdots\}$ 为一切自然数的集，$C=\{1,2,3,4,5,6\}$ 为前六个自然数的集，則 $B-A=\{1,2,3,4\}$，$C-(B-A)=\{5,6\}$。

---

1) 对此，許多著者并不保留等号。也有不用圓形不等号而用各种尖形符号的。

2) 說得清楚些：断語"若 $a\in A$，則 a 亦 $\in B$"是眞确的，因为 $a\in A$ 这一假定根本不成立。若 p,q 是两判断，而 p 是錯誤的，則断語"若 p 是对的，則 q 也对"(由 p 得 q)一定眞确。从一錯誤判断可得任何判断；若 $2\times2=5$，則妖精存在。

§2. 函 数

函数概念差不多同集概念一样基本和原始. 函数关系之由元偶构成正如集由单个的元构成一样.

替代单个的元,我們考虑按一定次序并立的两个元(或称有序元偶) (a, b), 其中 a 是第一元, b 是第二元. 两个这样的有序元偶,当且仅当它們具有相同的第一元和相同的第二元时, 方为相等:

$$(a^*,b^*)=(a,b), \text{当且仅当 } a^*=a, b^*=b.$$

据此,则当 $a\neq b$ 时,元偶(a,b)与(b,a)不等; 另方面,并不妨碍用两个相同的元作成有序元偶 (a, a). 例如組合自然数, 得下列有序元偶

$$(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1),\cdots;$$

这类元偶乃矩陣或行列式中元的双指标. 組合实数則得有序数偶(x,y); 以此作为笛卡儿坐标(横坐标 x 与縱坐标 y 不得交換), 則可表示平面上的点.

有序元偶(a, b)是一个与集$\{a, b\}$不同的概念; 后者的 a, b 乃假定相異,且与次序无关.

有了有序元偶,就可引入函数概念,且在引入集的相乘(§4)与集的序(§9)諸概念时亦将用到. 設 P 是一个由有序元偶 $p=(a, b)$ 組成的集; 对于 P 中出現的每一个元偶 $p(p\in P)$, 我們将称 b 为 a 的映象, a 为 b 的原象, 并設 A 为所有原象 a (卽所有元偶 $p\in P$ 的第一元) 組成的集, B 为所有映象 b (卽所有元偶 $p\in P$ 的第二元) 組成的集. 据此則每个 a 决定其映象 (一般不止一个), 每个 b 决定其原象 (一般不止一个); 这是一个由元偶集 P 造成的介于集 A 与集 B 之間的联系: 我們說, 这里发生了一集在另一集上的映照.

在特殊情况下, 每个 a 只有唯一的映象 b, 則此被 a 决定且与 a 相关的元 b 我們以

$$b=f(a)$$

記之,并称它是一个定义在集 A 中的、a 的单义函数. 例如由元偶

(1,2) (2,1) (3,2) 組成的集定义了集 $A=\{1,2,3\}$ 在集 $B=\{1,2\}$ 上的一个映照，且在集 A 中是一单义函数，即

$$f(1)=2,\quad f(2)=1,\quad f(3)=2.$$

此外，若每个 b 也只有唯一的原象 a，則此被 b 决定的元 a 我們以

$$a=g(b)$$

記之，并从而得到一个定义在 B 中的、b 的单义函数。此二函数的任一个称为另一个的逆或反；二者称为单义可逆或一一对应；处于 A 与 B 間的映照称为一一对应的或单叶的，并称具有如此关系的两集 A, B 是对等的，記作

$$A\sim B,\quad B\sim A.$$

这个对等的基本概念将构成第二章的基础；这里仅举自然数集 A 与正偶数集 B 間的对等为例。由有序元偶

$$(1,2)(2,4)(3,6)\cdots$$

組成的集造成如此的一一对应关系，即每个自然数 a 对应其映象 $b=2a$，每个偶数 b 对应其原象 $a=\frac{1}{2}b$。

若元 a 有好多个映象，則記号 $b=f(a)$ 在下述意义下仍可保留，即 $f(a)$ 不是表示唯一的一个而是許多个（也許无限多个）元 b；于是我們得一多义函数 $f(a)$。相应的解释适用于 $g(b)$；二者（一般是多义函数）现在还是称作互逆。一个常遇的情况是：$f(a)$ 虽是单义的，但反函数 $g(b)$ 則是多义的。例如当 a 走遍所有实数时，有序元偶 $(a, \sin a)$ 所成的集定义了集 A（由所有实数組成）在集 B（由数 $-1\leqslant b\leqslant 1$ 組成）上的这样一个映照：$b=\sin a$ 虽是单义的，但 $a=\arcsin b$ 則大家知道是多义的，就是說 $\arcsin b$ 不仅表示一个数 $a_0(b=\sin a_0)$，而是同时表示了所有的数 $2k\pi+a_0$ 及 $(2k+1)\pi-a_0$（k 为整数）。若将 a 限制在区間 $-\frac{\pi}{2}\leqslant a\leqslant\frac{\pi}{2}$ 上，則两集間的关系就成为单义可逆的了。

这里所給函数概念的定义，对迄还囿于初等函数（且总是連續的！）的初学者似覺有些抽象；但为了使这一基本概念不受任何約束并賦以应有的普遍性，这样的定义是必要的。在单义函数方面只有一点是主要的，即 $f(a)$ 是一个按照某一規則（这里是借元偶

集P給出的)由a完全决定的元，至于此規則能否用"解析式"或其它方法加以确定，都不是主要的，而且我們的知識和工具是否容許我們卽使仅仅对于一个a把$f(a)$的实际确定作出来，同样不是主要的。这里关于普遍函数概念(Dirichlet 建立的)所作的說明，也正是对 Cantor 的集概念所要說的。有理数集是完全定义了的，虽然我們并不知道π^π是否屬于这个集，而函数$f(a)$当a为有理数时等于1，a为无理数时等于0，也是完全定义了的，虽然我們并不知道$f(\pi^\pi)$的值。

§3. 和与交

設A, B为两集，則它們的和

$$S = A \dotplus B$$

是指由所有不屬于A卽屬于B(或同时屬于二者)的元所組成的集，它們的交

$$D = AB$$

是指由所有同时屬于A与B的元所組成的集。当$D=0$时，亦卽A, B两集无公共元时，称此两集为彼此互外或互不相交；在这种情况下，我們也用

$$S = A + B$$

来記它們的和，并注意此时显然成立：$S-A=B$, $S-B=A$[1]。

例. 設A为区間[2] $[1,3]$，卽满足$1 \leqslant x \leqslant 3$的实数$x$的集，同样，$B$为区間$[2,4]$。則$S$为区間$[1,4]$，$D$为区間$[2,3]$。

若A, B为有限集且互不相交，又A由m个元、B由n个元組成，則$A+B$由$m+n$个元組成。

今有

$$S-A=B-D, \quad S-B=A-D,$$

第一式的集卽是一切只屬于B而不屬于A的元所組成的集，第二

1) 也有把和称为联合或联合集的；又卽使加項并非互不相交，也有仍用簡单加号的(沒有帽点)。符号$\dotplus$系 C. Carathéodory 所引入。

2) 关于区間的記法，可参閱"前註"。

式反之．故有

$$D=B-(S-A)=A-(S-B),$$

即交可借和与差来构成．

和、交两构成，可直接推广到任意多个(有限多或无限多)集上去．作为和的简写記号，我們采用德文字母 $\mathfrak{S}$，当加項互不相交时也用希腊字母 $\sum$，交的簡写記号采用德文字母 $\mathfrak{D}$．我們先設想自然数 $1,2,3,\cdots,k$ 或所有自然数 $1,2,\cdots$ 对应于諸集 $A_1,A_2\cdots$(这里已用到 §2 中单义函数的概念)，这些集，此外完全不必两两互異，則它們的和

$$S=A_1\dotplus A_2\dotplus\cdots=\mathfrak{S}_m A_m$$

是指由所有至少屬于一个 A_m 的元所組成的集，它們的交

$$D=A_1A_2\cdots=\mathfrak{D}_m A_m$$

是指由所有同时屬于一切 A_m 的元所組成的集．只在加項互不相交时，即两两互外因而

$$A_mA_n=0\quad(m\neq n)$$

时，我們也把和写成

$$S=A_1+A_2+\cdots=\sum_m A_m.$$

末了，普遍情况：設对于一集 $M=\{m,n,p,\cdots\}$ 的每一元 m，各有一集 A_m 与之对应；此时，和

$$S=A_m\dotplus A_n\dotplus A_p\dotplus\cdots=\mathfrak{S}_m^M A_m$$

是指由所有至少屬于一个 A_m 的元所組成的集，它們的交

$$D=A_mA_nA_p\cdots=\mathfrak{D}_m^M A_m$$

是指由所有同时屬于一切 A_m 的元所組成的集；在加項互不相交(两两互外)时，和亦可写成

$$S=A_m+A_n+A_p+\cdots=\sum_m^M A_m.$$

例：設 $M=\{0,1,2,\cdots\}$ 是 $\geqslant 0$ 的整数的集，A_m 是刚好能被 2^m 除尽的自然数的集，即

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com