高等代数常用方法

王向东　周士藩　主编

科学出版社

1989

内 容 简 介

本书是以论述高等代数方法与技巧为主的教学参考书，内容包括：多项式理论的常用方法、行列式的计算方法与技巧、线性方程组中的常用方法、矩阵理论中的常用方法、二次型中的常用方法、线性空间与线性变换中的常用方法、欧氏空间中的常用方法等七章，每章还附有一定量的练习题。

全书各章内容由浅入深，重点突出，方法全面、系统，例题典型、新颖，语言简明、流畅。可供理工科院校数学系师生配合教材使用。特别对师范院校、各种成人高校、在职中学数学教师以及自学青年和工程技术人员均具有一定的指导作用。

高等代数常用方法

王向东　周士藩　主编

责任编辑　徐一帆

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100707

中国科学院开封印刷厂印刷

科学出版社发行　新华书店经销

*

1989年11月第一版　开本：787×1092 1/32

1989年11月第一次印刷　印张：14

印数：0001-14 100　字数：320 000

ISBN 7-03-001587-8/G·128

定价：4.95元

前　言

目前，国内有关高等代数这门重要学科的教科书及各种习题集虽然不少，但以论述高等代数解题方法为主的参考书，尚不多见. 由于高等代数问题比较抽象，解题方法灵活多变，使得不少人普遍感到这门学科"难学"，试题"难做"，似乎无规律可循. 所以，很多人都期待着能有一本专门论述"高等代数"方法的书籍出版. 另外，随着教育体制改革的不断深化，我国高等教育发展十分迅速，广大师生以及广大工程技术人员，甚至社会科学工作者，都急需掌握高等代数这门基础学科的方法和技巧. 但由于没有合适的参考书，给教学和自学带来很多不便，直接影响了教学质量的提高. 为此，我们组织了全国 20 多所大专院校的 20 几名教学经验丰富的教师，共同编写了这本《高等代数的常用方法》.

本书用大量的典型实例揭示了高等代数的解题规律和技巧，总结、归纳了高等代数的常用解题方法.

全书共 7 章，各章自成体系，基本上包括了高等代数的主要内容. 在章节安排上，不拘泥于逻辑的次序，每一方法都独立成节，并按照"主要内容"、"方法与例题分析（应用举例）"、"练习"三步曲逐步展开. "主要内容"是必须掌握的基本概念和基本理论（为节省篇幅，所有定理都略去证明）；"方法与例题分析"是解决某一类问题方法的系统总结和归纳，并用例题揭示方法的运用技巧和应当注意的问题. 此外，本书有些问题还用多种方法予以解决，并比较了各方法的优劣.

本书由王向东、周士藩先生主编．参加编写者有：王文省（聊城师院）、王金中（周口师专）、宁治玉（绵阳师专）、刘仁化（赤峰教育学院）、刘学鹏（临沂师专，副主编）、刘瑞贞（安阳师专）、李庆（雷州师专）、李国才（天津师专）、朱怡权（黄冈师专）、吕廷轩（南阳师专）、许思孝（济宁师专）、陈福元（龙岩师专）、吴世敏（泰安师专）、沈泽琪（北京师院）、张庆尧（台州师专）、张洪谦（昌淮师专）、张慧敏、刘延新（齐齐哈尔师院）、徐士达（上饶师专）、洪玉兴（江阴教师进修学院）、曾广兴（抚州师专）、晏能中（达县师专）、郭佑镇（渭南师专）、凌瑞官（湖州师专）、常庆龙（太兴教师进修学院）、韩普宪（许昌教育学院）、王学志、周苍、徐清舟、张德全等同志．

本书作者们虽然为本书的理想效果做了不少努力，但限于我们的水平，加之是初次尝试，时间仓促，难免有处理不当与片面之处，甚至可能有某些谬误与疏漏．热诚欢迎广大读者批评指正．

编　者

1989年9月10日

目　　录

第一章　多项式理论中的常用方法

多项式是代数学中的一个基本概念，是中学代数中的主要研究对象之一，它的理论和方法是高等代数中的一个重要组成部分。

§1.1　综合除法及其应用

一、主要内容和方法

设以 $x-a$ 除 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 时，所得的商及余式分别为 $b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}$ 及 r，则有

$$
\begin{aligned}
a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n &= (x-a)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}\\
&\qquad +\cdots+b_{n-1})+r\\
&= b_0x^n+(b_1-ab_0)x^{n-1}+(b_2-ab_1)x^{n-2}+\cdots+(b_{n-1}\\
&\qquad -ab_{n-2})x+(r-ab_{n-1})
\end{aligned}
$$

这种计算可以排成如下格式进行，从而求得商及余式：

$$
\begin{array}{l|lllll|l}
a & a_0 & a_1 & a_2 & & a_{n-1} & a_n \\
\hline
 & a_0=b_0, & a_1+ab_0=b_1, & a_2+ab_1=b_2, & \cdots, & a_{n-1}+ab_{n-2}=b_{n-1} & a_n+ab_{n-1}=r
\end{array}
$$

这种计算格式，通常称为综合除法。

二、应 用 举 例

例1　求 $x+2$ 除 $2x^3+3x^2-5x+1$ 的商及余式.

解　作综合除法

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-2 & 2 & 3 & -5 & 1 \\
\hline
 & 2 & -1 & -3 & \boxed{7}
\end{array}
$$

由此得商及余式分别是 $2x^2-x-3$ 及 7.

如作带余除法(用分离系数法格式写):

$$
\begin{array}{rr|rrrr|rrr}
1 & 2 & 2 & 3 & -5 & 1 & 2 & -1 & -3 \\
 & & 2 & 4 & & & & & \\
\hline
 & & & -1 & -5 & 1 & & & \\
 & & & -1 & -2 & & & & \\
\hline
 & & & & -3 & 1 & & & \\
 & & & & -3 & -6 & & & \\
\hline
 & & & & & 7 & & &
\end{array}
$$

同样得到商为 $2x^2-x-3$,余式为 7.

从上述两个算式可见,当除式为一次式时,用综合除法比用带余除法较为简便些,但需要注意,用综合除法,是以 $x-a$ 除 $f(x)$,所以例 1 中以 $x+2$ 除 $2x^3+3x^2-5x+1$ 时,要把除式 $x+2$ 表为 $x-(-2)$,即这里的 $a=-2$. 同时,用综合除法时,其除式的首项系数是 1 的一次多项式,因此当除式为 $bx+c$ $(b\neq0)$时,需要变形为 $b\left(x-\frac{-c}{b}\right)$,然后以 $x-\frac{-c}{b}$ 除 $f(x)$,才可用综合除法求得商及余式,比如下面的

例2 以 $2x-1$ 除 $f(x)=2x^4+3x^3+4x^2+5x+1$,求商及余式.

解 作综合除法

$$
\begin{array}{c|ccccc}
\frac{1}{2} & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\
\hline
 & 2 & 3+\frac{1}{2}\cdot2=4 & 4+\frac{1}{2}\cdot4=6 & 5+\frac{1}{2}\cdot6=8 & \boxed{1+\frac{1}{2}\cdot8=5}
\end{array}
$$

由此得 $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(2x^3+4x^2+6x+8)+5$ (1)

$$=(2x-1)(x^3+2x^2+3x+4)+5 \qquad (2)$$

于是商及余式分别是 x^3+2x^2+3x+4 及 5.

评注 (1) 用综合除法只能得到(1)式，而(1)式中 $2x^3+4x^2+6x+8$ 是 $x-\dfrac{1}{2}$ 除 $f(x)$ 的商，并不是 $2x-1$ 除 $f(x)$ 的商，所以必须转化为(2)式，才为所求.

(2) 本例如果改为以 $2x-1$ 除 $f(x)=2x^4+3x^3+4x^2+5x+1$，求余式. 那么就是求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，仍可以用上述综合除法求得，且比其它计算方法都简便. 特别是有些问题需要多次以一次多项式作为除式的运算，综合除法更显示出它的作用，比如下面的两例.

例3 把 $5x^4-6x^3+x^2+4$ 按 $x-1$ 的方幂展开.

分析 根据题意，要把原式表为 $a_4(x-1)^4+a_3(x-1)^3+a_2(x-1)^2+a_1(x-1)+a_0=\{[(a_4(x-1)+a_3)(x-1)+a_2](x-1)+a_1\}(x-1)+a_0$，这样，用一次综合除法，把 $x-1$ 除原式可得商式 $q_1(x)=[(a_4(x-1)+a_3)(x-1)+a_2](x-1)+a_2$ 及余式 $r_1=a_0$，再用一次综合除法，把 $x-1$ 除 $q_1(x)$ 可得商 $q_2(x)=(a_4(x-1)+a_3)(x-1)+a_2$ 及余式 $r_2=a_1$，再依次用两次综合除法分别可得商及余式 $q_3(x)=a_4(x-1)+a_3$，$r_3=a_2$ 及 $q_4(x)=a_4$，$r_4=a_3$ 因而即得所求.

解 作如下四次综合除法

1	5	-6	1	0	4
1	5	-1	0	0	$4=r_1$
1	5	4	4	$4=r_2$	
1	5	9	$13=r_3$		
	$5=q_4$	$14=r_4$			

所以，原式 $=5(x-1)^4+14(x-1)^3+13(x-1)^2+4(x-1)+4$

评注 (1) 在应用综合除法时，实质上也是一种分离系数法，为此，缺项必须补上零系数的项(如原式中补上一次项系数 0)，否则计算就错了.

(2) 本例如改为求 $(x-1)^3$ 除原式的商及余式，则只需要用三次综合除法(见上式)，于是原式 $=(x-1)^3(5x+9)+13(x-1)^2+4(x-1)+4$，可见商及余式就是 $5x+9$ 及 $13x^2-22x+13$.

例4 设多项式 $7x^4+x^3-8x^2+8x-9=Ax(x-1)(x-2)(x-3)+Bx(x-1)(x-2)+Cx(x-1)+Dx+E$，求系数 A、B、C、D、E.

分析 因原式可表成 $\{[(A(x-3)+B)(x-2)+C](x-1)+D\}x+E$，现用类似于例 3 的方法，依次地作综合除法，就可求得.

解 作如下四次综合除法

0	7	1	-8	8	-9
1	7	1	-8	8	$-9=E$
2	7	8	0	$8=D$	
3	7	22	$44=C$		
	$7=A$	$43=B$			

因此，原式 $=7x(x-1)(x-2)(x-3)+43x(x-1)(x-2)+44x(x-1)+8x-9$.

说明 本例如改为如下命题，那么，它的证明难度(技巧)就大些了. 设 $f(x)$ 是 4 次复系数多项式，但 $f(-1)=-19$，$f(0)=-9$，$f(1)=1$，$f(2)=95$，$f(3)=541$，则 $f(x)$ 是一个

整系数多项式，并具体计算 $f(x)$．

证 把 $f(x)$ 写成例 4 中题设形式：

$$f(x)=Ax(x-1)(x-2)(x-3)+Bx(x-1)(x-2)+Cx(x-1)+Dx+E,$$

于是据题设可得 $24A-6B+2C-D+E=-19$，$E=-9$，$D+E=-1$，$2C+2D+E=95$，$6B+6C+3D+E=537$，于是可依次地得到 $E=-9$，$D=8$，$C=44$，$B=43$，$A=7$ 由此得

$f(x)=7x(x-1)(x-2)(x-3)+43x(x-1)(x-2)+44x(x-1)+8x-9$，再经计算得 $f(x)=7x^4+x^3-8x^2+8x-9$．

事实上，这一命题还可推广为：设 $f(x)$ 是 4 次复系数多项式，且当 x 取任意五个连续自然数时，$f(x)$ 恒为整数，则 $f(x)$ 是整值多项式(即 x 取任一整数，$f(x)$ 恒为整数)．

用综合除法还可以判别有理根，比如

例5 求 $f(x)=x^4-8x^3+27x^2-44x+28$ 的有理根

说明 关于有理根有如下定理：设有理数 $\frac{u}{v}$ 是整系数多项式 $f(x)$ 的根，$(u,v)=1$，则 $\dfrac{f(m)}{m-\frac{u}{v}}$ 是整数(m 是任意整数)，且 v、u 分别整除 $f(x)$ 的首项系数及常数项．

解 因 $f(x)$ 的首项系数是 1，常数项是 28，由上述性质知，$f(x)$ 的所有可能的有理根是 ±1，±2，±4，±7，±14，±28．而 $f(1)=4$，$f(-1)=108$，所以 ±1 不是 $f(x)$ 的根，对按照 $\dfrac{f(1)}{1-\frac{u}{v}}$，$\dfrac{f(-1)}{1+\frac{u}{v}}$ 计算得 $\dfrac{f(1)}{1-2}=-4$，$\dfrac{f(-1)}{1+2}=36$ 都是整数，都可能是 $f(x)$ 的根，用综合除法检验．

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 1 & -8 & 27 & -44 & 28 \\
\hline
2 & 1 & -6 & 15 & -14 & \multicolumn{1}{|r}{0} \\
\hline
2 & 1 & -4 & 7 & \multicolumn{1}{|r}{0} & \\
\hline
 & 1 & -2 & \multicolumn{1}{|r}{3\neq 0} & &
\end{array}
$$

所以 $f(x)=(x-2)^2(x^2-4x+7)$，又因 $(-4)^2-4\times1\times7=-12<0$，可见 $f(x)$ 仅有二重有理根 2.

评注 (1) 在本例中，因先用综合除法检验2，且得 $f(x)=(x-2)^2(x^2-4x+7)$，在此已判断了仅有 2 是二重根，且无其它有理根了，因而对其余的 ±4，±7，±14，±28，没有必要再检验了.

(2) 计算$\dfrac{f(1)}{1-\dfrac{u}{v}}$ 及 $\dfrac{f(-1)}{1+\dfrac{u}{v}}$时要仔细，特别是计算 $f(1)$，$f(-1)$要正确，否则直接影响到下面的检验，而使整个题目都计算错了.

(3) 本例也可看作用综合除法分解因式.

(4) 本例如改为证明：2 是 $f(x)$ 的二重根，则直接可用综合除法证之.

例6 设 $(x-1)^2|ax^4+bx^3+1$，求 a，b 及商.

解 因原式被 $(x-1)^2$ 整除，则必被 $x-1$ 整除，可作二次综合除法：

$$
\begin{array}{c|ccccc}
1 & a & b & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & a & a+b & a+b & a+b & \multicolumn{1}{|c}{a+b+1=0} \\
\hline
 & a & 2a+b & 3a+2b & \multicolumn{1}{|c}{4a+3b=0} &
\end{array}
$$

由此得 $a+b+1=0$ (1)，$4a+3b=0$ (2)

解(1)(2)得 $a=3, b=-4$；再以此代入商 $ax^2+(2a+b)x+3a+2b$ 得商为 $3x^2+2x+1$.

例7 求作一个多项式，使它的各个根分别等于多项式 $f(x)=x^4-3x^2+7$ 的各个根减 1.

解 先类似于例 3 的方法，把 $f(x)=x^4-3x^2+7$ 表示成 $(x-1)$ 的方幂展开式，作综合除法：

1	1	0	−3	0	7
1	1	1	−2	−2	5
1	1	2	0	−2	
1	1	3	3		
	1	4			

所以，$f(x)=(x-1)^4+4(x-1)^3+3(x-1)^2-2(x-1)+5$. 以 y 代替 $x-1$，得 $f(y-1)=y^4+4y^3+3y^2-2y+5$，可以验证多项式 $y^4+4y^3+3y^2-2y+5$ 即为所求.

小结 从上述各例可见，在一定的条件下，用综合除法可方便地求出商式、余式，因式分解，有理根，还可判别多项式的整除性，以及表成特定形式的多项式(如例 3，4).

例8 求 x^2-3x+1 除 $2x^4-3x^3+4x^2-6x+8$ 的商及余式.

解 作综合除法

3	−1	2	−3	4	−6	8
				−2	−3	−11
+			6	9	33	
		2	3	11	24	−3

由此得商及余式分别是 $2x^2+3x+11$ 及 $24x-3$.

练　习　1.1

1. 当 m 是什么数时，多项式 x^3-3x^2+4x+m 除以 $x-2$ 所得的余数是3？并求其商.

2. 证明 $5x+2$ 是 $5x^5+2x^4-5x^2+3x+2$ 的一个因式.

3. 用综合除法证明 $x^2+x-6 \mid x^3+3x^2-4x-12$，并把 $x^3+3x^2-4x-12$ 分解因式.

4. 求多项式 $f(x)=9x^3-6x^2+1$ 的有理根.

5. 用综合除法，求 $2x^2-3x+1$ 除 $3x^4-5x^3-6x^2-7x+8$ 的商及余式.

§1.2　多项式的整除性

一、主 要 内 容

由带余除法可知，一个多项式未必能除尽另一个多项式，因此，关于多项式的整除性的研究，在多项式理论和方法中，占有一个较重要的地位，也是当前中学数学竞赛中的热门试题.

1. 整除

设 $f(x), g(x) \in P[x]$（记号 $P[x]$ 表示数域 P 上一元多项式环），且有 $h(x) \in P[x]$，使 $f(x)=g(x)\,h(x)$，则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，或称 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 除尽，以符号 $g(x) \mid f(x)$ 表示，否则称 $g(x)$ 不整除 $f(x)$，以符号 $g(x) \nmid f(x)$ 表示.

2. 整除的基本性质

(1) 若 $f(x) \mid g(x)$，$g(x) \mid f(x)$ 则有非零常数 C，使 $f(x)$

$=Cg(x)$；

(2) 若 $f(x)|g(x)$，$g(x)|h(x)$．则 $f(x)|h(x)$（整除的传递性）；

(3) 若 $f(x)|g_i(x)$ $(i=1,\cdots,t)$，则 $f(x)\left|\sum_{i=1}^{t}h_i(x)g_i(x)\right.$（$h_1(x)$，$\cdots h_t(x)$ 是任意多项式）；

(4) 若 $f(x)|g(x)$，$h(x)|g(x)$，且 $f(x)$ 与 $h(x)$ 互素，则 $f(x)\ h(x)|g(x)$，一般地，若 $f_i(x)|g(x)$，$f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 两两互素，则 $f_1(x)\cdots f_n(x)|g(x)$；

(5) （因式定理）a 是多项式 $f(x)$ 的根的充要条件是 $(x-a)|f(x)$；

(6) （整除性判别定理） 若多项式 $f(x)$，$g(x)$ 有 $g(x)\neq 0$，则 $g(x)|f(x)$ 的充要条件是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式等于零．

二、方 法 举 例

下面介绍六种方法探讨多项式的整除性．

1．利用单位根及因式定理

例1 证明 $x^2+x+1|x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ （m，n，p 是三个任意的正整数）．

证 因 $w=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 是1的三次单位根，且 $w^2+w+1=0$，于是 $x^2+x+1=(x-w)(x-w^2)$，且 $w^{3m}=w^{3n}+w^{3p}=1$，现设 $f(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$，有 $f(w)=1+w+w^2=0$，同理 $f(w^2)=0$，所以由因式定理知 $x-w$，$x-w^2$ 都整除 $f(x)$，而 $x-w$ 与 $x-w^2$ 互素，由性质 4 知：$(x-w)(x-w^2)|f(x)$，由此得证．

评注 (1)类似于例1的证法，注意适当变形，也可得到下面的命题：设正整数 n 不是3的倍数，则 $x^2+xy+y^2|x^{2n}+x^ny^n+y^{2n}$. 事实上，因为 $x^2+xy+y^2=(x-wy)(x-w^2y)$，设 $f(x,y)=x^{2n}+x^ny^n+y^{2n}$，则 $f(wy,y)=(wy)^{2n}+(wy)^ny^n+y^{2n}=y^{2n}(1+w^n+w^{2n})=y^{2n}\cdot 0=0$，同理 $f(w^2y,y)=0$. 于是由因式定理知 $x-wy|f(x,y)$，$(x-w^2y)|f(x,y)$，又因 $x-wy$ 与 $x-w^2y$ 互素，由性质4知，$(x-wy)(x-w^2y)|f(x,y)$，由此得证.

(2) 本例的证明中，$(x-w)(x-w^2)|f(x)$ 是指在复数域 C 上，而命题本身可理解为在一般数域 P 上 $x^2+x+1|x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3n+2}$，这是因为整除的概念是在带余除法基础上定义的，而带余除法所得的商及余式不随系数域的扩大而改变，因此，上述多项式在 P 上与在 C 上整除是一致的.

例2 设 $x^2+x+1|f(x^3)+xg(x^3)$，则 $x-1|f(x)$，$x-1|g(x)$.

证 由因式定理知 $f(w^3)+wg(w^3)=0$，即 $f(1)+wg(1)=0$ (1)，$f(w^6)+w^2g(w^6)=0$，即 $f(1)+w^2g(1)=0$ (2)，由方程(1)、(2)解得 $f(1)=g(1)=0$，又由因式定理即得证明.

例3 设 $h(x)(x^2+x+1)+g(x)(x-1)+f(x)(x-2)$ 与 $h(x)(x^2+x+1)+g(x)(x+1)+f(x)(x+2)$ 都是零多项式，则 x^2+x+1 整除 $g(x)$ 和 $f(x)$.

证 因

$$h(w)(w^2+w+1)+g(w)(w-1)+f(w)(w-2)=0. \tag{1}$$

$$h(w)(w^2+w+1)+g(w)(w+1)+f(w)(w+2)=0. \tag{2}$$

解方程(1)、(2)得 $f(w)=g(w)=0$，同理，可得 $f(w^2)=g(w^2)=0$，由因式定理及性质4知 $(x-w)(x-w^2)$ 整除 $f(x)$ 和 $g(x)$，由此得证.