高等职业教育教材

高等数学

GAODENGSHUXUE

4

丁杰 姜文玲 主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等职业教育教材

高　等　数　学

主　编　丁　杰　姜文玲
副主编　陈　洁　刘振云

天津大学出版社

图书在版编目(C I P)数据

高等数学/丁杰,姜文玲主编.—天津:天津大学出版社,2001.9 (2002.3重印)
ISBN 7-5618-1501-7

Ⅰ.高… Ⅱ.①丁…②姜… Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 061255 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印　　刷 河北省昌黎县第一印刷厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 850mm×1168mm 1/32
印　　张 15.5
字　　数 403 千
版　　次 2001 年 9 月第 1 版
印　　次 2002 年 3 月第 2 次
印　　数 5001-8000
定　　价 25 50元

前　言

为了更好地适应高等职业学校培养高等技术应用型人才的需要,提高学生的基本素质和教学质量,解决高等职业教育这一层次《高等数学》课程的教材问题,我们根据高等职业学校对数学教学的基本要求,本着教学与专业相融,基础教学为专业服务和以应用为目的,以必须、够用为度的原则,在多年从事高等职业教育教学实践基础上,编写了本教材.

本教材在保证科学性、系统性、严密性的基础上,注意概念的引出、例题的配置,认真贯彻少而精的原则,尽量减少繁琐而又难以起到启发思维作用的逻辑证明,将主要篇幅用于较简单的典型情况,因而降低了难度,又无损于基本内容.我们特别注重了对学生的基本运算、分析问题与解决问题能力的培养,突出了应用性和实用性,内容通俗易懂.这样既达到了大纲的要求,又便于学生学习,充分体现了高等职业教育的特色.

本教材的教学时数为130学时(其中 * 号的内容需另加学时).各章节后的习题即为作业题,习题答案附于书后.另外还编写了与本教材配套的《高等数学练习题集》,可供学生复习与提高使用.

本教材初稿由丁杰、姜文玲、王济平、陈洁、丁国生、刘振云、马恩广、王善述等同志执笔,经主编和副主编反复研讨,几易其稿(最后修改定稿).限于编者的水平,教材中必有考虑不周之处,难免出现缺点和错误,敬请广大师生、读者批评指正.

在此,对本教材出版发行给予帮助的同志们一并表示感谢!

编　者

2001年5月

目　录

第一章　函数　极限　连续

初等数学研究的对象基本上是不变的量，而高等数学研究的对象是空间形式与数量关系，即变量与变量之间的函数关系，其研究方法是极限论的方法．本章先在中学数学关于函数知识的基础上对函数概念进一步扩展，然后介绍极限思想，最后用函数的极限概念讨论函数的一种重要性态——连续性．

第一节　函数

一、绝对值、区间、邻域

1．绝对值

定义1　设 x 为一实数，如果记 $|x|=\sqrt{x^2}$，则称 $|x|$ 为实数 x 的绝对值．

在数轴上，实数 x 的绝对值 $|x|$ 表示点 x 与原点 O 之间的距离．如图 1-1 所示．

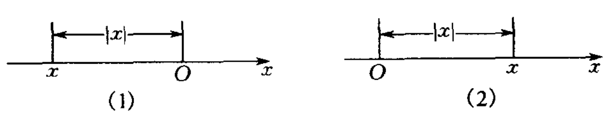

图 1 1

绝对值 $|x|$ 具有下列性质：

(1) $|x|\geqslant 0$；

(2) $|-x|=|x|$；

(3) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$

由绝对值的定义知,这些性质是明显的,另外,它还具有下列等价关系:

(4) $|x|\leqslant a \Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a$;

(5) $|x|\geqslant a(a>0)\Leftrightarrow x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a$.

绝对值还具有以下的运算性质:

(6) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

即和的绝对值不大于各项绝对值的和.

事实上,由 $|x|$ 的性质(3)得 $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$, $-|y|\leqslant y\leqslant|y|$,两式相加得 $-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant(|x|+|y|)$,再由等价关系(4)即得 $|x+y|\leqslant|x|+|y|$

(7) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$.

即差的绝对值不小于各项绝对值的差.

这是因为 $|x|=|(x-y)+y|\leqslant|x-y|+|y|$,所以

$$|x-y|\geqslant|x|-|y|.$$

(8) $|xy|=|x||y|$.

即乘积的绝对值等于各项绝对值的乘积.

(9) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}\ (y\neq 0)$.

即商的绝对值等于被除式的绝对值与除式绝对值的商.

2. 区间

区间分为有限区间和无限区间两大类. 下面分别予以介绍.

1)有限区间

所谓有限区间是指介于两个实数 a 和 b 之间的所有实数构成的集合,其具体定义如下.

定义 2 (1)满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 构成的集合,记作 $[a,b]$,称其为闭区间;

(2)满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 构成的集合,记作 (a,b),称其为开区间;

(3)满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的所有实数 x 构成的集合,记作 $(a,b]$ 或 $[a,b)$,称其为半开半闭区间.

上述三种实数集合统称为有限区间.

2)无限区间

所谓无限区间也是特殊的实数集合,其具体定义如下.

定义 3 (1)满足不等式 $x>a$ 或 $x\geqslant a$ 的所有实数 x 构成的集合,记作 $(a,+\infty)$ 或 $[a,+\infty)$;

(2)满足不等式 $x<b$ 或 $x\leqslant b$ 的所有实数 x 构成的集合,记作 $(-\infty,b)$ 或 $(-\infty,b]$;

(3)满足不等式 $-\infty<x<+\infty$ 的所有实数 x 构成的集合,记作 $(-\infty,+\infty)$.

上述三种实数集合统称为无限区间.

注意,符号“$+\infty$”和“$-\infty$”分别读作“正无穷大”与“负无穷大”.它们不是数,仅仅是记号.

3)区间的表示

在数轴上,有限区间用有限线段来表示;而无限区间则用射线或整个数轴来表示,如图 1-2 所示.

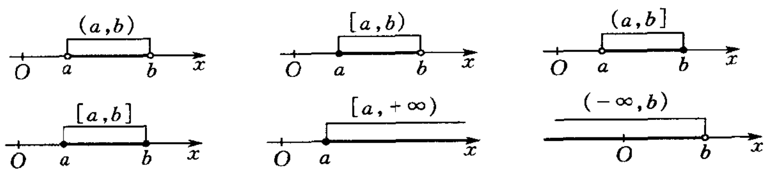

图 1-2

区间还有如下的表示法:

$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$;$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$;

$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$;$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$;

$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$;$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$;

$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$;$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$;

$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$.

3. 邻域

定义 4 设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$. 数集

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\},$$

点 a 称为 $U(a,\delta)$ 的中心，δ 称为 $U(a,\delta)$ 的半径.

因为 $|x-a|<\delta$ 等价于 $-\delta<x-a<\delta$. 所以点 a 的 δ 邻域还可表示为开区间 $(a-\delta,a+\delta)$

从数轴上看，点 a 的 δ 邻域表示了以点 a 为中心，长度为 2δ 的开区间，如图 1-3 所示.

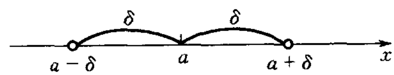

图 1-3

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心后，称为点 a 去心的 δ 邻域，记作 $U(\hat{a},\delta)$，即

$$U(\hat{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

这里 $0<|x-a|$ 表示了 $x\neq a$.

例 1 用不等式和开区间表示出点 2 的 $\frac{1}{2}$ 邻域.

解 不等式为 $|x-2|<\frac{1}{2}$；

由于上面的不等式等价于 $-\frac{1}{2}<x-2<\frac{1}{2}$，即 $1\frac{1}{2}<x<2\frac{1}{2}$，所以可用开区间表示为 $(1\frac{1}{2},2\frac{1}{2})$.

二、函数概念

在实际问题中，经常遇到各种不同的量，有的量是不变的，称为常量，有的量是变化的，称为变量.

很多情况下,一些量是相互联系的,例如计算正在充气过程中的气球的体积.由公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ 知,当测量半径 R 为某一值时,体积 V 就对应一确定的值,即 R 在充气过程中是个变量,V 也是变量,R 和 V 这两个变量之间通过上述公式互相联系,而这种对应关系正是函数概念的实质.

定义 5　设有两个变量 x 和 y,如果变量 x 在其取值范围内任取一个值时,变量 y 按照一定的法则总有确定的值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的函数,记作 $y=f(x)$. x 称为自变量,y 称为因变量.自变量的取值范围称为函数的定义域

在讨论函数关系时,常说函数 $y=f(x)$ 在某点 x_0 有定义,即当自变量取某个已知值 x_0 时,函数 y 就有确定的值 $f(x_0)$ 与之对应,$f(x_0)$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值.函数值的全体称为该函数的值域.

如果自变量在其定义域内任取一个确定的值时,函数都只有一个确定值与之对应,则称这种函数为单值函数;否则就称为多值函数.

有时会遇到对于自变量的一个确定值,函数有一个以上的值与之对应的情形,而对于这种多值函数的情形,我们主要是限制其函数值的范围,使之成为单值,再进行研究.

例如,反正弦函数 $y=\mathrm{Arcsin}\ x$ 是多值的.当限制其函数值 y 的范围在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,就是单值的了,此时的反正弦函数习惯上记为 $y=\arcsin x$,而当研究了单值反正弦函数 $y=\arcsin x$ 后,对于多值反正弦函数 $y=\mathrm{Arcsin}\ x$ 就会有所了解.

以后本书凡是没有特别说明,函数都是指单值函数.

从函数的定义中知道,确定函数关系的两个主要因素是定义域和对应法则,两个函数只有这两个因素完全相同时,才表示它们

是同一函数.不同的函数必须用不同的记号表示,如表示为$f(x)$、$g(x)$、$\varphi(x)$等等.

下面举几个函数的例子.

例 2 函数 $y=x^2$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=[0,+\infty)$,它的图形称为抛物线,如图 1-4 所示.

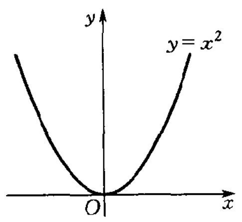

图 1-4

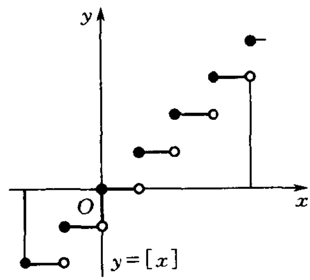

图 1-5

例 3 设 x 为任一实数,不超过 x 的最大整数简称为 x 的最大整数,记作$[x]$.此函数称为取整函数.例如

$$\left[\frac{5}{7}\right]=0,[\sqrt{2}]=1,[\pi]=3,[-1]=-1,[-3.5]=-4.$$

把 x 看作变量,则函数 $f(x)=[x]$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 W 为全体整数,它的图形如图 1-5 所示,此图形称为阶梯曲线.在 x 为整数值处,图形发生跳跃,跃度为 1.

例 4 函数

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

称为符号函数,它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{-1,0,1\}$.它的图形如图 1-6 所示.

对于任何实数 x,下列关系成立:

$$x=|x|\operatorname{sgn} x.$$

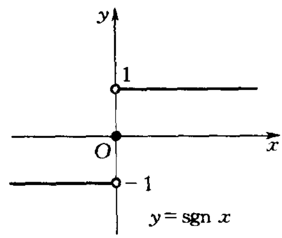

图 1-6

在例 3 和例 4 中可以看到，有时函数是用几个式子表示的. 这种自变量在不同取值范围中用不同式子表示的函数，通常称为分段函数. 需要说明的是分段函数是用几个式子表示一个函数，而不是表示几个函数. 对分段函数的讨论，关键是分段点，要特别注意在分段点处函数的性态.

例 5　设分段函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0,\\ x^2+4, & x<0.\end{cases}$$

求函数值 $f(-1),f(0),f(1),f(x-1)$.

解　分段函数 $f(x)$的值，根据自变量 x 所在区间的对应规律确定，于是有

$$f(-1)=(-1)^2+4=5;$$

$$f(0)=2\times 0+1=1;$$

$$f(1)=2\times 1+1=3;$$

$$f(x-1)=\begin{cases}2(x-1)+1, & x-1\geqslant 0,\\ (x-1)^2+4, & x-1<0,\end{cases}$$

即

$$f(x-1)=\begin{cases}2x-1, & x\geqslant 1,\\ x^2-2x+5, & x<1.\end{cases}$$

三、函数的几种简单性质

为了更好地理解函数，下面介绍函数的几种简单性质.

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$在某一区间内有定义，如果存在正数 M，使得对

该区间的任何一个自变量 x 的值,其对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在该区间内有界.如果这样的正数 M 不存在,则称函数 $f(x)$在该区间内无界.

例如,函数 $f(x)=\cos x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是有界的,这是因为无论自变量 x 取任何数值,均有不等式

$$|\cos x|\leqslant 1$$

成立,在这里 $M=1$(当然也可取大于 1 的任何数作为 M,而 $|\cos x|\leqslant M$ 成立).

又如,函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$在开区间$(0,1)$内是无界的.这是因为不存在着任何一个正数 M 使不等式

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|\leqslant M$$

对于区间$(0,1)$内的一切值 x 都成立.但是该函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$在开区间$(-1,0)$内却是有界的,而这是因为如果取 $M=1$,则不等式

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|\leqslant 1=M$$

对于区间$(-1,0)$内的一切值 x 均成立.

2.函数的单调性

如果函数的函数值在其定义域内随着自变量 x 的增大而增大,即对于其定义域内的任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时就有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在其定义域内是单调增加的.如果函数的函数值在其定义域内随着自变量 x 的增大而减小,即对于其定义域内的任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时就有

$$f(x_1)>f(x_2),$$