

高等职业教育教材

高等数学

丁杰 姜文玲 主编



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等职业教育教材

高等数学

主 编 丁 杰 姜文玲

副主编 陈 洁 刘振云

天津大学出版社

图书在版编目(C I P)数据

高等数学/丁杰,姜文玲主编. —天津:天津大学出版社,2001.9 (2002.3重印)

ISBN 7-5618-1501-7

I. 高… II. ①丁…②姜… III. 高等数学—高等学校: 技术学校—自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 061255 号

出版发行 天津大学出版社

出版人 杨风和

地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)

电 话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742

印 刷 河北省昌黎县第一印刷厂

经 销 全国各地新华书店

开 本 850mm×1168mm 1/32

印 张 15.5

字 数 403 千

版 次 2001 年 9 月第 1 版

印 次 2002 年 3 月第 2 次

印 数 5001—8000

定 价 25.50 元

前 言

为了更好地适应高等职业学校培养高等技术应用型人才的需要,提高学生的基本素质和教学质量,解决高等职业教育这一层次《高等数学》课程的教材问题,我们根据高等职业学校对数学教学的基本要求,本着教学与专业相融,基础教学为专业服务和以应用为目的,以必须、够用为度的原则,在多年从事高等职业教育教学实践基础上,编写了本教材。

本教材在保证科学性、系统性、严密性的基础上,注意概念的引出、例题的配置,认真贯彻少而精的原则,尽量减少繁琐而又难以起到启发思维作用的逻辑证明,将主要篇幅用于较简单的典型情况,因而降低了难度,又无损于基本内容。我们特别注重了对学生的基本运算、分析问题与解决问题能力的培养,突出了应用性和实用性,内容通俗易懂。这样既达到了大纲的要求,又便于学生学习,充分体现了高等职业教育的特色。

本教材的教学时数为 130 学时(其中 * 号的内容需另加学时)。各章节后的习题即为作业题,习题答案附于书后。另外还编写了与本教材配套的《高等数学练习题集》,可供学生复习与提高使用。

本教材初稿由丁杰、姜文玲、王济平、陈洁、丁国生、刘振云、马恩广、王善述等同志执笔,经主编和副主编反复研讨,几易其稿(最后修改定稿)。限于编者的水平,教材中必有考虑不周之处,难免出现缺点和错误,敬请广大师生、读者批评指正。

在此,对本教材出版发行给予帮助的同志们一并表示感谢!

编 者

2001 年 5 月

目 录

第一章 函数 极限 连续	(1)
第一节 函数	(1)
习题 1-1	(13)
第二节 数列的极限	(15)
习题 1-2	(25)
第三节 函数的极限	(25)
习题 1-3	(32)
第四节 无穷大量与无穷小量	(32)
习题 1-4	(40)
第五节 极限的运算法则	(41)
习题 1-5	(48)
第六节 两个重要极限	(48)
习题 1-6	(56)
第七节 函数的连续性	(57)
习题 1-7	(68)
第二章 导数与微分	(69)
第一节 导数	(69)
习题 2-1	(79)
第二节 导数运算法则与基本公式	(80)
习题 2-2	(98)
第三节 函数的微分	(99)
习题 2-3	(109)
第三章 导数的应用	(110)
第一节 微分中值定理	(110)

习题 3-1	(118)
第二节 L'Hospital 法则	(118)
习题 3-2	(126)
第三节 函数的单调性与极值	(126)
习题 3-3	(135)
第四节 曲线的凹凸性与拐点	(136)
习题 3-4	(141)
第五节 函数的最大值和最小值	(142)
习题 3-5	(151)
第六节 函数图形的描绘	(152)
习题 3-6	(157)
第四章 不定积分	(159)
第一节 不定积分的概念与性质	(159)
习题 4-1	(164)
第二节 第一换元积分法	(165)
习题 4-2	(169)
第三节 第二换元积分法	(170)
习题 4-3	(177)
第四节 分部积分法	(177)
习题 4-4	(182)
第五章 定积分	(184)
第一节 定积分概念	(184)
习题 5-1	(191)
第二节 定积分的性质	(192)
习题 5-2	(195)
第三节 微积分基本公式	(196)
习题 5-3	(202)
第四节 定积分的换元法	(203)

习题 5-4	(208)
第五节 定积分的分部积分法	(208)
习题 5-5	(212)
第六节 广义积分	(212)
习题 5-6	(218)
第六章 定积分的应用	(220)
第一节 定积分的元素法	(220)
第二节 平面图形的面积	(223)
习题 6-2	(230)
第三节 体积	(231)
习题 6-3	(236)
第四节 平面曲线的弧长	(236)
习题 6-4	(241)
第五节 定积分在物理方面的应用	(242)
习题 6-5	(248)
第六节 函数的平均值	(249)
习题 6-6	(250)
第七章 微分方程	(251)
第一节 微分方程的基本概念	(251)
习题 7-1	(255)
第二节 一阶微分方程	(255)
习题 7-2	(267)
第三节 二阶常系数齐次线性微分方程	(268)
习题 7-3	(274)
第四节 二阶常系数非齐次线性微分方程	(275)
习题 7-4	(288)
第八章 空间解析几何	(289)
第一节 空间直角坐标系	(289)

习题 8-1	(293)
第二节 空间平面与直线及其方程	(293)
习题 8-2	(297)
第三节 空间曲面与曲线及其方程	(298)
习题 8-3	(300)
第四节 几种特殊曲面	(301)
习题 8-4	(306)
第九章 多元函数的微分学	(308)
第一节 多元函数的基本概念	(308)
习题 9-1	(315)
第二节 多元函数的极限与连续性	(315)
习题 9-2	(324)
第三节 偏导数	(324)
习题 9-3	(332)
第四节 全微分	(332)
习题 9-4	(338)
第五节 多元复合函数的求导法则	(339)
习题 9-5	(348)
第六节 二元函数的极值	(349)
习题 9-6	(355)
第十章 多元函数的积分学	(356)
第一节 二重积分的概念	(356)
习题 10-1	(362)
第二节 二重积分的计算与应用	(363)
习题 10-2	(385)
* 第三节 三重积分	(387)
习题 10-3	(395)
第十一章 无穷级数	(396)

第一节 常数项级数的概念与性质·····	(396)
习题 11-1 ·····	(403)
第二节 正项级数·····	(404)
习题 11-2 ·····	(411)
第三节 常见的几种任意项级数·····	(412)
习题 11-3 ·····	(419)
第四节 幂级数·····	(419)
习题 11-4 ·····	(430)
第五节 函数展开成幂级数·····	(430)
习题 11-5 ·····	(443)
* 第六节 Fourier 级数 ·····	(443)
习题 11-6 ·····	(461)
习题答案·····	(463)

第一章 函数 极限 连续

初等数学研究的对象基本上是不变的量,而高等数学研究的对象是空间形式与数量关系,即变量与变量之间的函数关系,其研究方法是极限论的方法.本章先在中学数学关于函数知识的基础上对函数概念进一步扩展,然后介绍极限思想,最后用函数的极限概念讨论函数的一种重要性态——连续性.

第一节 函数

一、绝对值、区间、邻域

1. 绝对值

定义 1 设 x 为一实数,如果记 $|x| = \sqrt{x^2}$,则称 $|x|$ 为实数 x 的绝对值.

在数轴上,实数 x 的绝对值 $|x|$ 表示点 x 与原点 O 之间的距离.如图 1-1 所示.

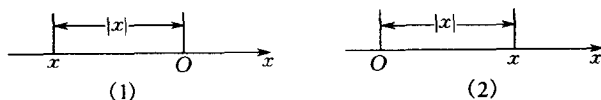


图 1 1

绝对值 $|x|$ 具有下列性质:

- (1) $|x| \geq 0$;
- (2) $|-x| = |x|$;
- (3) $-|x| \leq x \leq |x|$

由绝对值的定义知,这些性质是明显的,另外,它还具有下列等价关系:

$$(4) |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a;$$

$$(5) |x| \geq a (a > 0) \Leftrightarrow x \geq a \text{ 或 } x \leq -a.$$

绝对值还具有以下的运算性质:

$$(6) |x + y| \leq |x| + |y|.$$

即和的绝对值不大于各项绝对值的和.

事实上,由 $|x|$ 的性质(3)得 $-|x| \leq x \leq |x|$, $-|y| \leq y \leq |y|$,两式相加得 $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|)$,再由等价关系(4)即得 $|x + y| \leq |x| + |y|$.

$$(7) |x - y| \geq |x| - |y|.$$

即差的绝对值不小于各项绝对值的差.

这是因为 $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$,所以

$$|x - y| \geq |x| - |y|.$$

$$(8) |xy| = |x| |y|.$$

即乘积的绝对值等于各项绝对值的乘积.

$$(9) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0).$$

即商的绝对值等于被除式的绝对值与除式绝对值的商.

2. 区间

区间分为有限区间和无限区间两大类.下面分别予以介绍.

1) 有限区间

所谓有限区间是指介于两个实数 a 和 b 之间的所有实数构成的集合,其具体定义如下.

定义 2 (1)满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的所有实数 x 构成的集合,记作 $[a, b]$,称其为闭区间;

(2)满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数 x 构成的集合,记作 (a, b) ,称其为开区间;

(3) 满足不等式 $a < x \leq b$ 或 $a \leq x < b$ 的所有实数 x 构成的集合, 记作 $(a, b]$ 或 $[a, b)$, 称其为半开半闭区间.

上述三种实数集合统称为有限区间.

2) 无限区间

所谓无限区间也是特殊的实数集合, 其具体定义如下.

定义 3 (1) 满足不等式 $x > a$ 或 $x \geq a$ 的所有实数 x 构成的集合, 记作 $(a, +\infty)$ 或 $[a, +\infty)$;

(2) 满足不等式 $x < b$ 或 $x \leq b$ 的所有实数 x 构成的集合, 记作 $(-\infty, b)$ 或 $(-\infty, b]$;

(3) 满足不等式 $-\infty < x < +\infty$ 的所有实数 x 构成的集合, 记作 $(-\infty, +\infty)$.

上述三种实数集合统称为无限区间.

注意, 符号“ $+\infty$ ”和“ $-\infty$ ”分别读作“正无穷大”与“负无穷大”. 它们不是数, 仅仅是记号.

3) 区间的表示

在数轴上, 有限区间用有限线段来表示; 而无限区间则用射线或整个数轴来表示, 如图 1-2 所示.

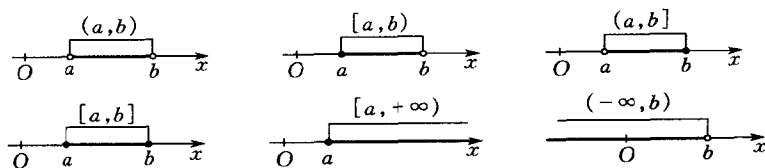


图 1-2

区间还有如下的表示法:

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}; (a, b) = \{x \mid a < x < b\};$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}; [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\};$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}; (a, +\infty) = \{x \mid x > a\};$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}; (-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\};$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}.$$

3. 邻域

定义 4 设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$. 数集

$$\{x | |x - a| < \delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x | |x - a| < \delta\},$$

点 a 称为 $U(a, \delta)$ 的中心, δ 称为 $U(a, \delta)$ 的半径.

因为 $|x - a| < \delta$ 等价于 $-\delta < x - a < \delta$. 所以点 a 的 δ 邻域还可表示为开区间 $(a - \delta, a + \delta)$

从数轴上看, 点 a 的 δ 邻域表示了以点 a 为中心, 长度为 2δ 的开区间, 如图 1-3 所示.

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心后, 称为点 a 去心的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即

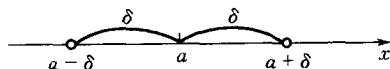


图 1-3

$$U(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\},$$

这里 $0 < |x - a|$ 表示了 $x \neq a$.

例 1 用不等式和开区间表示出点 2 的 $\frac{1}{2}$ 邻域.

解 不等式为 $|x - 2| < \frac{1}{2}$;

由于上面的不等式等价于 $-\frac{1}{2} < x - 2 < \frac{1}{2}$, 即 $1\frac{1}{2} < x < 2\frac{1}{2}$, 所

以可用开区间表示为 $(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$.

二、函数概念

在实际问题中, 经常遇到各种不同的量, 有的量是不变的, 称为常量, 有的量是变化的, 称为变量.

很多情况下,一些量是相互联系的,例如计算正在充气过程中的气球的体积.由公式 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ 知,当测量半径 R 为某一值时,体积 V 就对应一确定的值,即 R 在充气过程中是个变量, V 也是变量, R 和 V 这两个变量之间通过上述公式互相联系,而这种对应关系正是函数概念的实质.

定义 5 设有两个变量 x 和 y ,如果变量 x 在其取值范围内任取一个值时,变量 y 按照一定的法则总有确定的值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的函数,记作 $y = f(x)$. x 称为自变量, y 称为因变量.自变量的取值范围称为函数的定义域.

在讨论函数关系时,常说函数 $y = f(x)$ 在某点 x_0 有定义,即当自变量取某个已知值 x_0 时,函数 y 就有确定的值 $f(x_0)$ 与之对应, $f(x_0)$ 称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值.函数值的全体称为该函数的值域.

如果自变量在其定义域内任取一个确定的值时,函数都只有一个确定值与之对应,则称这种函数为单值函数;否则就称为多值函数.

有时会遇到对于自变量的一个确定值,函数有一个以上的值与之对应的情形,而对于这种多值函数的情形,我们主要是限制其函数值的范围,使之成为单值,再进行研究.

例如,反正弦函数 $y = \text{Arcsin } x$ 是多值的.当限制其函数值 y 的范围在 $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ 时,就是单值的了,此时的反正弦函数习惯上记为 $y = \arcsin x$,而当研究了单值反正弦函数 $y = \arcsin x$ 后,对于多值反正弦函数 $y = \text{Arcsin } x$ 就会有所了解.

以后本书凡是没有特别说明,函数都是指单值函数.

从函数的定义中知道,确定函数关系的两个主要因素是定义域和对应法则,两个函数只有这两个因素完全相同时,才表示它们

是同一函数.不同的函数必须用不同的记号表示,如表示为 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $\varphi(x)$ 等等.

下面举几个函数的例子.

例 2 函数 $y = x^2$ 的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = [0, +\infty)$, 它的图形称为抛物线, 如图 1-4 所示.

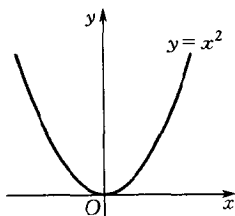


图 1-4

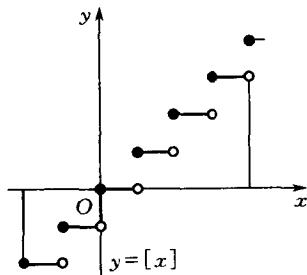


图 1-5

例 3 设 x 为任一实数, 不超过 x 的最大整数简称为 x 的最大整数, 记作 $[x]$. 此函数称为取整函数. 例如

$$\left[\frac{5}{7}\right] = 0, [\sqrt{2}] = 1, [\pi] = 3, [-1] = -1, [-3.5] = -4.$$

把 x 看作变量, 则函数 $f(x) = [x]$ 的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 W 为全体整数, 它的图形如图 1-5 所示, 此图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数值处, 图形发生跳跃, 跃度为 1.

例 4 函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

称为符号函数, 它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{-1, 0, 1\}$. 它的图形如图 1-6 所示.

对于任何实数 x , 下列关系成立:

$$x = |x| \operatorname{sgn} x.$$

在例 3 和例 4 中可以看到,有时函数是用几个式子表示的. 这种自变量在不同取值范围中用不同式子表示的函数,通常称为分段函数. 需要说明的是分段函数是用几个式子表示一个函数,而不是表示几个函数. 对分段函数的讨论,关键是分段点,要特别注意在分段点处函数的性态.

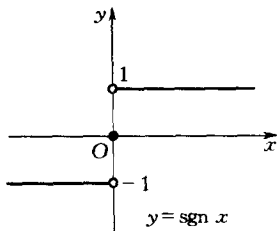


图 1-6

例 5 设分段函数为

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 0, \\ x^2 + 4, & x < 0. \end{cases}$$

求函数值 $f(-1), f(0), f(1), f(x-1)$.

解 分段函数 $f(x)$ 的值, 根据自变量 x 所在区间的对应规律确定, 于是有

$$f(-1) = (-1)^2 + 4 = 5;$$

$$f(0) = 2 \times 0 + 1 = 1;$$

$$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3;$$

$$f(x-1) = \begin{cases} 2(x-1) + 1, & x-1 \geq 0, \\ (x-1)^2 + 4, & x-1 < 0, \end{cases}$$

即

$$f(x-1) = \begin{cases} 2x-1, & x \geq 1, \\ x^2-2x+5, & x < 1. \end{cases}$$

三、函数的几种简单性质

为了更好地理解函数, 下面介绍函数的几种简单性质.

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在某一区间内有定义, 如果存在正数 M , 使得对

该区间的任何一个自变量 x 的值,其对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)| \leq M,$$

则称函数 $f(x)$ 在该区间内有界. 如果这样的正数 M 不存在,则称函数 $f(x)$ 在该区间内无界.

例如,函数 $f(x) = \cos x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的,这是因为无论自变量 x 取任何数值,均有不等式

$$|\cos x| \leq 1$$

成立,在这里 $M = 1$ (当然也可取大于 1 的任何数作为 M , 而 $|\cos x| \leq M$ 成立).

又如,函数 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无界的. 这是因为不存在着任何一个正数 M 使不等式

$$\left| \frac{1}{x-1} \right| \leq M$$

对于区间 $(0, 1)$ 内的一切值 x 都成立. 但是该函数 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 在开区间 $(-1, 0)$ 内却是有界的, 而这是因为如果取 $M = 1$, 则不等式

$$\left| \frac{1}{x-1} \right| \leq 1 = M$$

对于区间 $(-1, 0)$ 内的一切值 x 均成立.

2. 函数的单调性

如果函数的函数值在其定义域内随着自变量 x 的增大而增大, 即对于其定义域内的任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时就有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在其定义域内是单调增加的. 如果函数的函数值在其定义域内随着自变量 x 的增大而减小, 即对于其定义域内的任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时就有

$$f(x_1) > f(x_2),$$